

Vladimír Guth

Určení výšek a viditelné části dráhy meteoru grafickou metodou

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 2, 132--141

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109452>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1938

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# ČÁST FYSIKÁLNÍ.

## Určení výšek a viditelné části dráhy meteoru grafickou metodou.

Vladimír Guth, Ondřejov.

(Došlo 22. září 1937.)

Věnováno panu profesorovi dr. Františku Nušlovi k jeho sedmdesátinám v den 3. prosince 1937.

Autor popisuje jednoduchou metodu určení výšek a dráhy meteoru. K řešení užívá centrální projekce sféry a příslušné rovnice  $a - f$  řeší nomograficky.

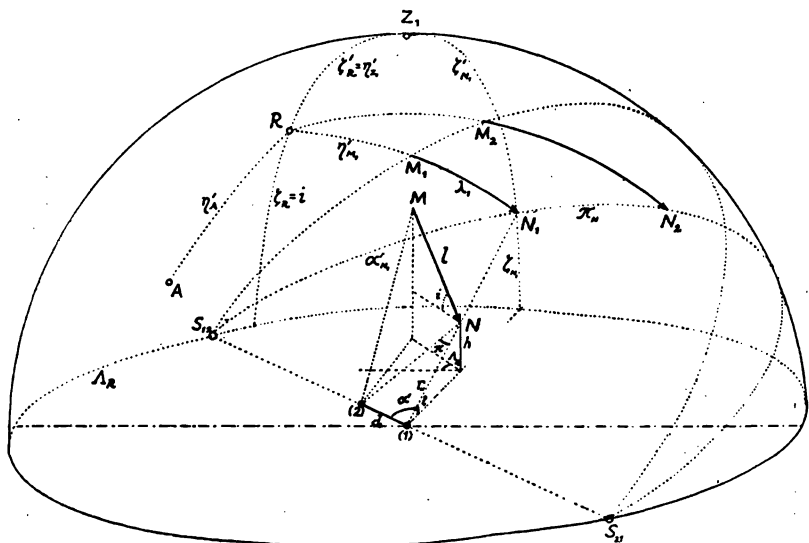
Účelem těchto řádek jest rozvinouti jednoduchou metodu, která by s přesností odpovídající pozorováním, řešila tuto úlohu: určití výšky a viditelnou část dráhy meteoru, z pozorování vykonaných na dvou místech. Početní řešení zpravidla užívaná, přesahují ve většině případů daná pozorování svou přesností a proto se hodí jen pro dokonalá pozorování jako jsou na př. snímky meteoru zachycené z obou pozorovacích míst. Níže uvedené vývody lze ovšem aplikovati i na jiné podobné problémy, jako jsou: určení vzdáleností a výšek polárních září, výšek mraků, určení výšek a drah pilotovacích balonků a pod. Některé z pouček lze s výhodou užítí i v navigačních a avigačních problémech, které vyžadují rychlá přibližná řešení.

Označování: Body označujeme velkými, úsečky malými písmeny; body promítnuté na sféru mají index podle toho pozorovacího místa, odkud byly promítnuty. Úhly označujeme řeckými písmeny: jsou bez čárky, jde-li o úhlové vzdálenosti od roviny; úhlové vzdálenosti od pólů, doplňky předešlých, se čárkují: platí tedy na př.  $\alpha' + \alpha = 90^\circ$ .

Úloha (obr. 1): Meteor, jehož přímá dráha světelná počala v bodě  $M$  a skončila v bodě  $N$  je pozorován ze dvou míst: 1 a 2, jichž polohy a vzájemnou vzdálenost  $d$  známe; určití jest vzdálenost, výšku a polohu bodu  $M$  i  $N$ , délku, sklon a směr dráhy  $l$ .

Meteor  $MN \equiv l$  se promítá z pozorovacího místa 1 na sféru jako část největší kružnice  $M_1N_1$  ( $\equiv \lambda_1$  délka zdánlivé dráhy);

z místa 2 jako  $M_2N_2 \equiv \lambda_2$ .<sup>1)</sup> Úběžný bod dráhy t. zv. zdánlivý radiant  $R$  leží v zpětném průseku obou těchto největších kružnic. Úhlové distance od  $R$  označme  $\eta'$ . Pozorovací místo 2 promítnuté na sféru z 1 se promítá do bodu  $S_{12}$ , naopak 1 promítnuté z 2 je v  $S_{21}$ . Pólové vzdálenosti od bodu  $S_{12}$  označme  $\alpha'$ . Pro průměty téhož bodu dráhy meteoru platí podmínka Besselova: body sobě



Obr. 1.

odpovídající (na př.  $M_1M_2$  nebo  $N_1N_2$ ) leží na největší kružnici, která prochází průmětem druhého ( $S_{12}$ ) resp. prvního ( $S_{21}$ ) pozorovacího místa promítnutého na sféru z 1. resp. 2. stanoviště. Podmínka vyplývá z toho, že jde o průměty rovin procházejících středem promítání: rovina  $(1, 2, M) \equiv$  rov.  $(MM_1M_2)$  a rovina  $(1, 2, N) \equiv$  rov.  $(NN_1N_2)$ . Úhlovou vzdálenost sobě odpovídajících průmětů, tedy  $\widehat{M_1M_2}$  resp.  $\widehat{N_1N_2}$ , nazýváme paralaxou a značíme  $\pi$ ; jinak definováno: paralaxa jest zorný úhel, pod kterým se nám z uvažovaného bodu dráhy meteoru jeví základna  $d$  obou pozorovacích stanovišť.  $Z_1$  budiž zenit místa 1 a příslušné zenitové distance označíme  $\zeta'$ , bude tedy  $\zeta$  výška nad obzorem. Azimut měřený od bodu severního označme  $A$ . Je-li  $A$  apexem — směrem, ke kterému míří naše Země — bude  $\eta'_A$  vzdálenost apexu od zdánlivého radiantu. Vzdálenosti od bodu 1 resp. 2 označíme  $r$  s pří-

<sup>1)</sup> Poloměr sféry můžeme předpokládati velmi veliký, takže při promítání na sféru body 1, 2,  $M$ ,  $N$ , splynou se středem promítání  $I$ .

slušným indexem. Pro základnu 1—2, tedy  $r_{12}$  zachovejme označení  $d$ . Lineární výšky značíme  $h$ .

**Pozorování:** Pozorování zaznamenává se tak, že se stopy meteoru zakreslí na 1. i 2. stanovišti buď

1. na hvězdný globus (způsob, který užívají hlavně angličtí pozorovatelé),<sup>2)</sup>

2. nebo do hvězdné mapy. Užívá se map kreslených

a) v centrální projekci, kam zařazujeme i fotografii,

b) v stereografické projekci,<sup>3)</sup>

c) s ekvidistantní sítí.

3. Souřadnice (zpravidla obzorníkové) se odečítají přímo přístroji zvanými meteoroskopy.

Pro praxi se nejlépe osvědčil způsob 2a), na který můžeme po př. ostatní převést. Pro určení dlouhých drah, jaké mívají velké meteory, se hodí pro redukci lépe mapy stereografické. V dalším se omezíme na projekci centrální.

Centrální projekce sféry: Jedině v této projekci platí, že všechny největší kružnice se promítají jako přímky, tedy i zdánlivé dráhy meteoru  $M_1N_1$  resp.  $M_2N_2$  objeví se jako přímky. Pro jiné projekce platí promítání v přímku jen pro případ, že radiant je totožný se středem projekce.

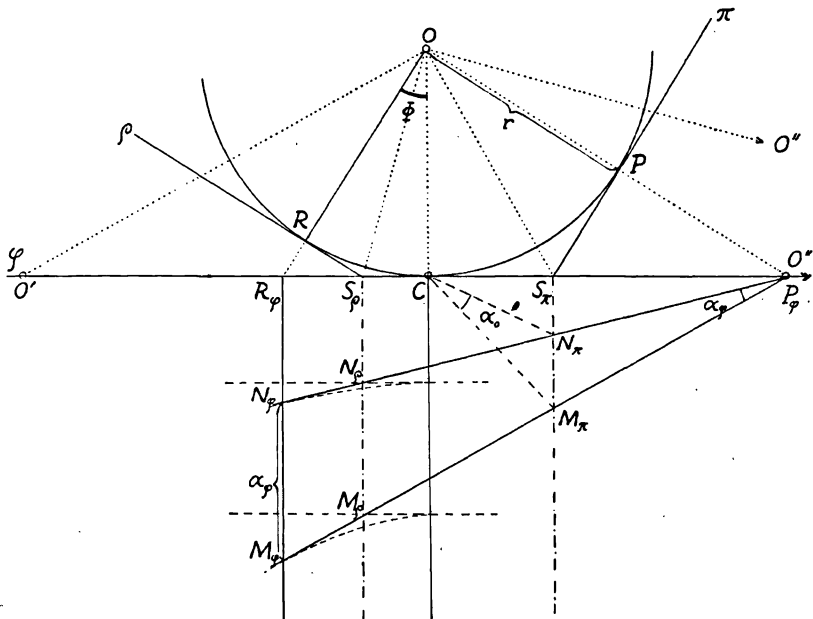
Měření úhlů a distancí v centrální projekci: Nejjednodušší případ této projekce je průmět polární, kde meridiány se paprskovitě rozbíhají z centra promítání, a rovnoběžky se zobrazují jako kružnice o poloměrech úměrných tangencím polárních distancí. Vhodný je i průmět aequatoreální, kde meridiány jsou rovnoběžné přímky, jichž vzdálenosti jsou úměrné tangencím úhlových vzdáleností od středu; rovnoběžky se objeví jako hyperboly. Každou obecnou polohu středu promítání můžeme převést na tyto dva případy, neboť souvisí spolu perspektivní kolineací.

V obraze 2 buď  $O$  střed sféry o poloměru  $r$ ,  $P$  pól,  $R$  rovník. Zvolíme-li střed projekce tak, aby padl do bodu  $C$  (šířka  $\Phi$ ), promítne se pól do bodu  $P_\varphi$  a rovník do  $R_\varphi$  v rovině  $\varphi$ . Polární projekci bychom dostali, kdybychom v bodě  $P$  vedli tečnou rovinu  $\pi$  a do ní sféru promítli. Rovina  $\pi$  protíná rovinu  $\varphi$  v přímce  $S_\pi$ : poněvadž pak  $PS_\pi = S_\pi C$ , splyne při sklopení roviny  $\pi$  do  $\varphi$  pól s centrem  $C$ . Vzájemný vztah je pak definován osou koll.  $S_\pi$ , středem  $O'$  a párem sdružených bodů  $P_\varphi, C$ . Chceme-li tedy určit pravou velikost úhlu  $\alpha$ , stačí, spojíme-li průsečíky jeho ramen (meridiány  $P_\varphi N$  a  $P_\varphi M$ ) s osou  $S_\pi$  tedy body  $N_\pi$  a  $M_\pi$  s centrem  $C$ , kde se nám objeví jako nezakreslený úhel  $\alpha_0$  meridiánů  $M_\pi \widehat{CN}_\pi$ . Opačně postupujeme, máme-li v bodě  $P_\varphi$  vynéstí úhel  $\alpha$

<sup>2)</sup> Redukce pozorování viz Proc. of the Nat. Acad. of Sc. U. S. A., 19 (1933), 209.

<sup>3)</sup> Na př. G. van Biesbroeck, Bull. de la Soc. belge d'Astr. 1908.

k danému směru. Podobně si počínáme, chceme-li navázati rovinu  $\varphi$  na ekvatoreální průmět  $\varrho$  (tečná rovina k rovníku  $R$ ). Osou kolli-neace bude  $S_\varrho$ , střed  $O''$ , pár sdružených bodů  $P_\varphi, P_\varrho = \infty$ . Úhel  $\alpha$  projeví se jako vzdálenost obou meridiánů  $N_\varrho$  a  $M_\varrho =$  roz-dílu tang. jejich úhlové vzdálenosti od centra. Tento rozdíl snadno zjistíme měřítkem se stupnicí  $r \operatorname{tg} \alpha$ . Úhel  $\alpha_\varphi$  objeví se konečně



Obr. 2.

jako část největší kružnice, t. j. na rovníku  $R$  mezi body  $N_\varphi$  a  $M_\varphi$ ; s výhodou tu opětně použijeme ekvatoreální projekce. Představíme si totiž  $R$  jako meridián (nejv. kružnice),  $\varphi$  jako rovník; pak  $\alpha_\varphi$  je úhlová vzdálenost rovnoběžek procházejících body  $M_\varphi$  a  $N_\varphi$ . Prakticky: máme-li narýsovánu na průsvitném papíru ekvatoreální centrální síť o stejném poloměru jako má projekce sítě námi užívané, stačí stočiti ji (kolem středu  $C$ ) tak, aby meridiány byly rovnoběžné se spojnicí bodů, jichž vzdálenost chceme určovati; jejich vzdálenost pak mezi rovnoběžkami snadno odečteme.<sup>4)</sup> Uvedeného způsobu měření vzdáleností pomocí rovníkové sítě dá se užití i u jiných projekcí. Konečně bych rád poukázal

<sup>4)</sup> Tento způsob se dá aplikovati na měření distance dvou míst, viz na př. Immmler: Flugnavigation 1928, kde autor omezil se však jen na měření distancí v projekci polární.

na užití těchto sítí při transformaci souřadnic sférických (tedy na př. při přechodu z azimutálních na ekvatoreální, z těchto na ekliptikální a pod.). Na průsvitný papír položený na ekv. síť vyznačíme polohu bodu (na př. azimut a výšku), jehož transformaci souřadnic chceme provést, předpokládajíc, že máme před sebou síť prvního systému (tedy azimutální) a střed projekce že je oběma systémům společnou osou, která se transformací nemění. Pak stačí stočit průsvitný papír kolem středu sítě (t. j. společné osy) o tolik stupňů (v našem případě o  $90^\circ - \Phi$ , kde  $\Phi$  je zeměp. šířka), o kolik je stočen druhý systém vůči prvému; nyní nám představuje síť druhý systém (v našem př. ekvatoreální) a my můžeme snadno odečísti transformované souřadnice.<sup>5)</sup>

Redukce pozorování:

a) Výpočet základny. První pozorovací místo (1) je dáno zeměpisnými souřadnicemi:  $\lambda_1 \varphi_1 h_1$ . Druhé pozorovací místo (2) je dáno zeměpisnými souřadnicemi:  $\lambda_2 \varphi_2 h_2$ .

Distanci  $d$  a azimuty  $\mu, \nu$  stanic vypočteme nejlépe z Napierových analogií řešením trojúhelníka 1, 2, pól:

$$\operatorname{tg} \frac{\mu + \nu}{2} = \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \operatorname{cosec} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mu - \nu}{2} = \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \sec \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$\sin \varepsilon = \cos \varphi \sin \Delta \lambda \cos \nu = \cos \varphi' \sin \Delta \lambda \operatorname{cosec} \mu$$

$$d \doteq 2 \left( R + \frac{h_1 + h_2}{2} \right) \sin \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(h_2 - h_1)^2}{4R \sin \frac{1}{2} \varepsilon},$$

kde  $R$  je poloměr Země. Jde-li jen o určení velikosti základny, a není-li rozdíl zeměpisných šířek příliš malý, můžeme užití přibližného vzorce:

$$d \doteq R\varepsilon = R(\varphi_2 - \varphi_1) \left[ 1 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ekvatoreální souřadnice ( $AR, \delta$ ) bodu  $S_{12}$  dostaneme výše uvedenou grafickou transformací souřadnic, nebo ze vzorců:

$$\sin \delta = -\sin \varphi, \quad \sin i + \cos \varphi_1 \cos i \cos \beta \quad i \doteq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sin t = \frac{\sin \beta}{\cos \delta} \cdot \cos i \quad AR = \Theta - t$$

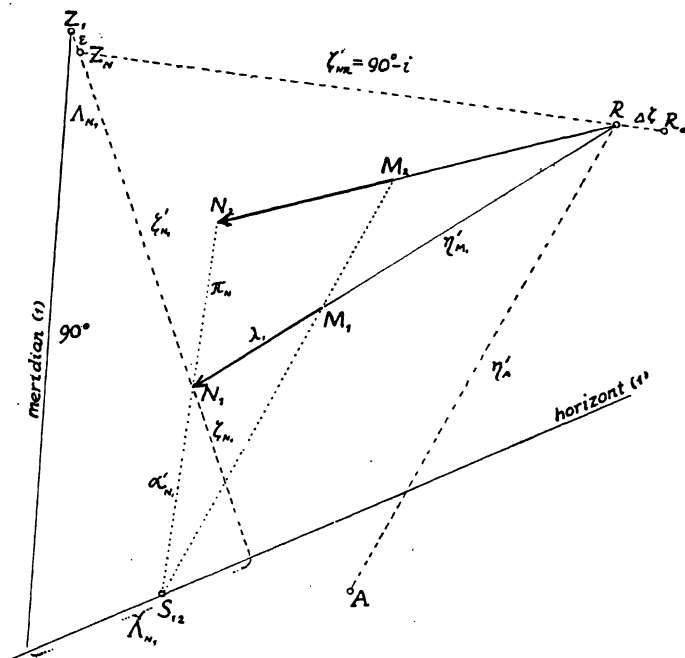
kde  $\Theta$  je místní hvězdný čas přeletu meteoru.

<sup>5)</sup> Na stejném principu jest založen mechanický transformátor souřadnic, který užívá však dvou sítí, kol sebe otočných. Event. nestejnost obou sítí a nedokonalost mech. otáčení jsou zdrojem nepřesností.

Jde-li o soustavná pozorování, pak jsou tyto veličiny konstantami, které jednou pro vždy určíme.

b) Vyčíslení úhlů: (omezíme se opět na centrální projekci. viz obr. 3).

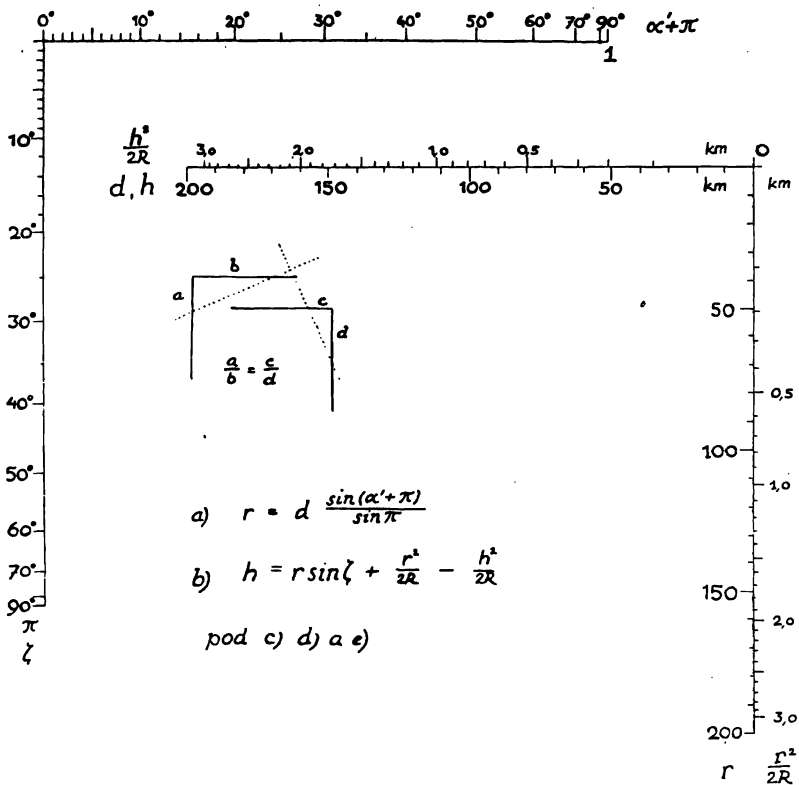
Do mapy, do které byly zakresleny stopy meteorů tak, jak byly pozorovány z obou míst:  $M_1N_1$  a  $M_2N_2$ , vyznačíme ještě polohu  $S_{12}$ , polohu zenitu  $Z_1$  ( $AR_{z1} = \theta_1$ ,  $\delta_{z1} = \varphi_1$ ) a polohu apexu  $A$  (jeho souřadnice jsou uvedeny v Hvězdářské ročence).



Obr. 3.

Radiant  $R$  dostaneme zpětným prodloužením obou stop  $N_1M_1$  a  $N_2M_2$ . Kontrolou správnosti pozorování je Besselova podmínka t. j. aby  $S_{12}N_1N_2$  i  $S_{12}M_1M_2$  ležely v jedné přímce. Eventuelní nesrovnalosti bud' popravíme (nejsou-li veliké) nebo počítáme výšky zvlášť pro  $N_1$  tím, že korespondující bod ( $N_2$ ) získáme jako průsečík  $S_{12}N_1$  s  $RM_2$  (t. j. předpokládáme, že směr byl správně pozorován), a zvlášť pro bod  $N_2$  tak, že ( $N_1$ ) je průsečíkem  $S_{12}N_2$  s  $RM_1$ . Podle hořejší metody pak určíme tyto veličiny:

- $\alpha'_N, \pi_N$  (příp.  $\alpha'_M, \pi_M$  pro pozdější kontrolu)
- $\lambda_N, \zeta'_N$  (příp.  $\lambda_M \zeta_M$ )
- $\lambda, \eta', \eta'_A$ .



Obr. 4.

Jestliže je některý z bodů  $Z_1, S_{12}, R$  nepřístupný, pak měříme doplňkové úhly, t. j. vzdálenosti od příslušných rovin, jimž uvedené body tvoří póly: tedy úhel  $\alpha$  místo  $\alpha'$ ,  $\zeta$  místo  $\zeta'$ ,  $\eta$  místo  $\eta'$ .

Výpočet.

a) Vzdálenost  $r_{1N}$  (stejně počítáme i  $r_{2N}$  resp.  $r_{1M}$  a pod.) plyne z  $\Delta 1, 2, N$  (viz obr. 1):

$$r_{1N} = d \frac{\sin(\alpha'_N + \pi_N)}{\sin \pi_N} \quad (a)$$

b) Výška  $h$  se vypočte z  $\Delta: 1, N$ , střed Země, ( $\zeta'$  je zent. distance  $r$ ):

$$h = r \sin \zeta + \frac{r^2}{2R} - \frac{h^2}{2R} \quad (b)$$

poněvadž  $h$  i  $r \ll R$ , jsou poslední dva členy druhého řádu a lze je případně zanedbat.



c) Určení délky dráhy  $l$  plyne ze vzorce:

$$l = r \frac{\sin \lambda}{\sin \eta'} \quad (c)$$

d) Polohu místa, které mělo  $N$  v zenitu, vypočteme ze vztahů:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon &= \frac{r}{R+h} \sin \zeta' \\ \sin \Delta\lambda &= \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi} \sin A \\ \sin \Delta\varphi &= \sin \varepsilon \cos A - \sin 2\varphi \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \lambda_N &= \lambda_1 + \Delta\lambda \\ \varphi_N &= \varphi_1 + \Delta\varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon &\doteq \text{konst. } r \sin \zeta' \\ \Delta\lambda &\doteq \varepsilon \sin A \sec \varphi \\ \Delta\varphi &\doteq \varepsilon \cos A. \end{aligned} \quad (d)$$

Nanese-li vzdálenost  $\varepsilon$  na zenitovou distanci  $Z_1 N_1$  směrem od bodu  $Z_1$  (obr. 3) k  $N_1$ , dostaneme tak polohu zenitu  $Z_N$  místa  $N$ . Zenitová distance radiantu, měřená od tohoto bodu, je doplňkem sklonu dráhy  $i$  a směr určuje azimut dráhy.

e) Výpočet výšky bodu  $M$  provedeme buď z rovnice (a), nebo ze vztahu

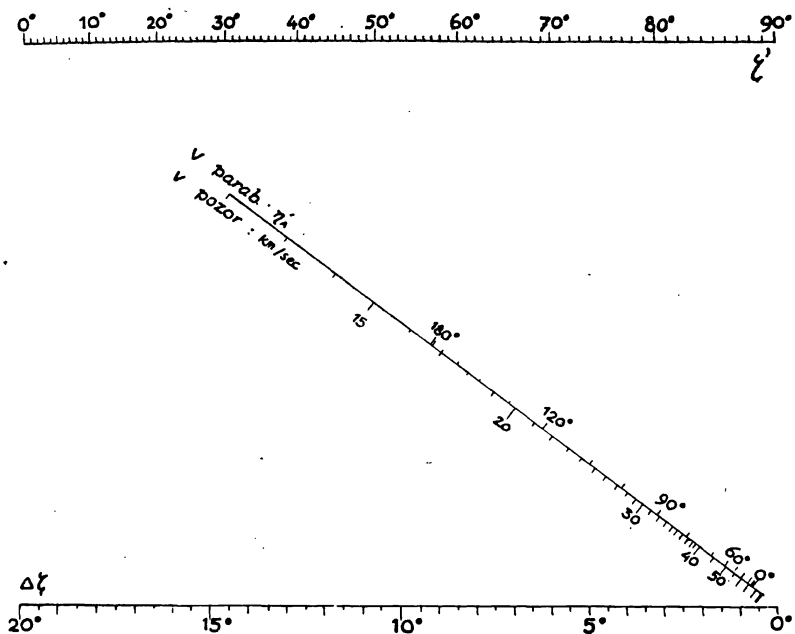
$$\begin{aligned} \Delta h &= l \sin i + \frac{l^2}{2(R+h)} - \frac{\Delta h^2}{2(R+h)} \\ h_M &= h_N + \Delta h \end{aligned} \quad (e)$$

f) Oprava polohy radiantu o zenitovou atrakci se vypočte ze vzorce

$$\text{tg} \frac{\Delta\zeta'}{2} = \frac{v-v'}{v+v'} \text{tg} \frac{\zeta'}{2}, \quad (f)$$

kde  $v$  je rychlost pozorovaná a  $v' = \sqrt{v^2 - 125,18}$  je rychlost opravená o tíži zemskou. Tím je daná úloha řešena.

Hořejší výpočet lze snadno řešit konstruktivně, ale příslušné rovnice jsou upraveny tak, že se dají dobře řešit i nomograficky. Jak je patrné, jde vesměs o vyjádření vztahů větou sinovou, takže se dají v podstatě řešit jedním typem nomografu. Volíme typ, který užil prof. Láška ve své sférické astronomii (viz obr. 4). Rovnice (b) je upravena tak, že korekční členy:  $r^2/2R$  resp.  $h^2/2R$  jsou jen funkcemi  $r$ , resp.  $h$  ( $R$  je konst.) a můžeme je tudíž přímo přiřadit stupnicím pro  $r$ , resp.  $h$ , takže jediným nastavením odečteme nejen hledanou přibližnou veličinu  $h$ , ale i její korekce na zakřivení Země na stupnicích pro  $r$  a  $h$ . Podobný tvar má i rovnice (e), kde sice v jmenovateli kor. členů vystupuje ještě  $h$ , ale toto můžeme buď vůči  $R$  zanedbat, poněvadž  $h$  je  $\ll R$ , nebo



$$f) \quad \operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta}{2} = \frac{v - v'}{v + v'} \operatorname{tg} \frac{\zeta'}{2} \quad v' = \sqrt{v^2 - 125,16} \quad \text{pro parabol. } v' = 29,6(\cos \eta'_0 \pm \sqrt{\cos^2 \eta'_0 + 1})$$

Obr. 5.

klademe za  $h$  konst. průměr. hodnotu 100 km. Rovnice (f) dá se řešit Z-nomogramem (obr. 5).

Hodnoty opraveného radiantu jsou východiskem pro výpočet dráhy v sluneční soustavě; také zde při různých transformacích nám s úspěchem může být nápomocna uvedená metoda centrální projekce. Vlastní určení prostorové dráhy můžeme provést pomocí hodografu, jak naznačil J. Svoboda.<sup>6)</sup>

\*

### Détermination des hauteurs et de la trajectoire réelle d'un météor par la méthode graphique.

(Extrait de l'article précédent.)

Le problème à résoudre est de déterminer, par un procédé le plus simple, les hauteurs  $h$ , les positions  $\lambda$ ,  $\varphi$ , la longueur  $l$ , l'inclinaison  $i$  et la direction  $A$  d'un météor  $MN$  (voir fig. 1) observé de deux stations (1) et (2). La distance  $d$  et les projections mutuelles

<sup>6)</sup> Rozpr. Čes. Akad., 24 (1915), čís. 7.

$S_{12}$  et  $S_{21}$  de ces deux points d'observation sur la sphère sont conues. D'après les observations nous pouvons déterminer les éléments suivants (voir fig. 1 et 3):  $\alpha'$  c'est à dire la distance angulaire d'un point quelconque  $N_1$  de la trajectoire au point  $S_{12}$ , la parallaxe  $\pi$ , l'azimut  $A$  et la distance zénithale  $\zeta'$  de ce point  $N_1$ ,  $\lambda_1$  la longueur angulaire de la trajectoire,  $\eta'_M$  la distance angulaire du radiant  $R$ ,  $\eta'_A$  celle de l'apex  $A$ . Nous pouvons facilement obtenir ces éléments à l'aide d'une carte céleste dessinée en projection centrale (voir fig. 3), qui contient les deux trajectoires correspondantes  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$ , observées de la station (1) et (2) et les projections du zénith  $Z_1$ , de l'apex  $A$  et de  $S_{12}$  or  $S_{21}$ . Nous pouvons très facilement déterminer l'angle et la distance angulaire dans la projection centrale générale (la latitude du centre de projection est  $\Phi$ , voir fig. 2) en transformant cette projection (plan  $\varphi$ ), soit en projection polaire (plan  $\pi$ ), soit en projection équatoriale (plan  $\varrho$ ) à l'aide des relations homographiques (le pôle  $O'$  ou bien  $O''$ , l'axe  $S_\pi$  ou bien  $S_\varrho$ , la paire des points correspondants  $P_\varphi C$  ou  $P_\varphi P_\varrho (P_\varrho = \infty)$ ). Les distances angulaires peuvent être mesurées directement à l'aide d'une feuille de papier calque sur laquelle est tracé le réseau équatorial. Le problème envisagé est résolu par les équations a)–f), qui peuvent être représentées sous la forme des nomogrammes (voir les fig. 4 et 5).

---