Kurt Mahler

Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. 3-4, 93--102

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109441

Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper.

Kurt Mahler, Manchester.

Herrn Prof. M. Dehn zum 60. Geburtstag gewidmet.

(Eingegangen am 8. August 1938.)

Der bekannte A. Khintchinesche Übertragungssatz[1]) verknüpft die Lösungsmaße der beiden Probleme, die Linearform

$$x_1\Theta_1 + \ldots + x_n\Theta_n + x_0.$$

bzw. die n simultanen linearen Formen

$$y_h - y_0\Theta_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

möglichst klein zu machen, mit einander, und besagt ungefähr, daß wenn eines dieser Maße sehr klein sein kann, dasselbe auch für das andere gilt. Der ursprüngliche Beweis von Khintchine war geometrisch und wurde dann von mir durch einen arithmetischen Beweis mittels des Minkowskischen Linearformensatzes ersetzt.[2]) Im vergangenen Jahr verallgemeinerte ich diese Methode und gab ein Übertragungsprinzip für zwei Systeme von je n reellen Formen

$$\xi_h = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k, \quad \eta_h = \sum_{k=1}^{n} A_{hk}y_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

für die identisch

$$\sum_{h=1}^{n} \xi_h\eta_h = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

ist.[3])

Alle diese Resultate sind enthalten in dem Hauptsatz der vorliegenden Arbeit. Seien $F(x)$ und $G(x)$ die Distanzfunktionen zweier in bezug auf die Einheitskugel polaren konvexen Körper K und K' mit Mittelpunkt im Ursprung; die Punkte der Oberfläche jedes dieser Körper sind also die Polaren der Stützebenen des

[1]) Rendiconti Palermo **50** (1926), besonders S. 189—195.

[2]) Matematitscheskij Sbornik **43** (1937), 961—962.

[3]) K. Mahler, Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen, Časopis **68** (1938/39), S. 85—92.

anderen Körpers. Seien ferner $\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(n)}$, bzw. $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)}$ die n successiven Minkowskischen Minima dieser beiden Körper[4]); d. h. also z. B. für den ersten Körper, daß es n linear unabhängige Gitterpunkte $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ mit $F(x^{(h)}) = \sigma^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ gibt, derart, daß $\sigma^{(1)}$ das Minimum von $F(x)$ in allen Gitterpunkten $x \neq 0$ und $\sigma^{(r)}$ für $r \geqq 2$ das Minimum von $F(x)$ in allen von $x^{(1)}, \ldots, x^{(r-1)}$ linear unabhängigen Gitterpunkten ist. Mein Übertragungsprinzip besagt alsdann, daß

$$\text{(I):} \qquad 1 \leqq \sigma^{(h)}\tau^{(n-h+1)} \leqq (n!)^2 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

ist; es berücksichtigt also sämtliche Minima und nicht nur $\sigma^{(1)}$ und $\tau^{(1)}$. Dies ist vor allem nützlich für Anwendungen auf inhomogene Probleme.

Der Beweis beruht auf elementargeometrischen Überlegungen und auf den Minkowskischen Ungleichungen

$$\frac{2^n}{n!\,J} \leqq \sigma^{(1)} \ldots \sigma^{(n)} \leqq \frac{2^n}{J} \quad \text{und} \quad \frac{2^n}{n!\,J'} \leqq \tau^{(1)} \ldots \tau^{(n)} \leqq \frac{2^n}{J'},$$

wo J und J' die Volumen von K und K' bedeuten.

§ 1. Polare konvexe Körper.

Die reellwertige Funktion $F(x) = F(x_1, \ldots, x_n)$ der Punkte des n-dimensionalen Euklidischen Raumes R habe folgende Eigenschaften[5]):

$$F(0) = 0, \; F(x) > 0 \text{ für } x \neq 0. \tag{1}$$

$$F(tx) = |\, t \,|\, F(x) \text{ für reelles } t. \tag{2}$$

$$F(x + y) \leqq F(x) + F(y). \tag{3}$$

Die Ungleichung

$$F(x) \leqq t \quad (t > 0)$$

definiert alsdann einen konvexen Körper $K(t)$ mit Mittelpunkt im Ursprung und zwar vom Volumen Jt^n, wenn J das Volumen des Eichkörpers $K = K(1)$ ist.

Der Körper K bildet eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge. Für jeden Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in R existiert demnach das Maximum

$$G(x) = G(x_1, \ldots, x_n) = \max_{F(y) \leqq 1} |\, xy \,| = \max_{y \neq 0 \text{ in } R} \frac{|\, xy \,|}{F(y)}, \tag{4}$$

[4]) Siehe das letzte Kapitel der „Geometrie der Zahlen".

[5]) Die Punkte von R schreiben wir $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, usw.; insbesondere bedeute $0 = (0, \ldots, 0)$ den Ursprung. Für reelles t sei $tx = (tx_1, \ldots, tx_n)$, ferner $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Mit $xy = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ und $|\, xy \,|$ bezeichnen wir das skalare Produkt von x und y, bzw. dessen Absolutbetrag. Untere Indizes beziehen sich auf die verschiedenen Koordinaten, obere auf verschiedene Punkte.

(die zweite Darstellung folgt aus der ersten wegen (2)). Auf Grund dieser Definition ist offenbar für zwei beliebige Punkte x und y

$$| xy | \leqq F(x)\, G(y). \tag{5}$$

Wie man leicht zeigt, hat $G(x)$ analog zu $F(x)$ folgende Eigenschaften:

$$G(0) = 0, \quad G(x) > 0 \text{ für } x \neq 0. \tag{1'}$$

$$G(tx) = | t | \, G(x) \text{ für reelles } t. \tag{2'}$$

$$G(x + y) \leqq G(x) + G(y). \tag{3'}$$

Auch die Ungleichung

$$G(x) \leqq t \qquad (t > 0)$$

definiert somit einen konvexen Körper $K'(t)$ mit Mittelpunkt im Ursprung und zwar vom Volumen $J't^n$, wenn J' das Volumen des Eichkörpers $K' = K'(1)$ bedeutet.

Während $F(x)$ die Distanzfunktion von K ist, stellt $G(x)$ die Stützfunktion von K dar; d. h. die sämtlichen Stützebenen von K werden durch

$$xy = G(y)$$

gegeben, wenn der Parameter y alle Punkte von R durchläuft. Die beiden Körper K und K' stehen in der Beziehung zu einander, daß die Randpunkte (bzw. die Stützebenen) von K die Polaren der Stützebenen (bzw. der Randpunkte) von K' in bezug auf die Einheitskugel sind. Wegen dieser Reziprozität muß demnach auch

$$F(x) = \max_{G(y) \leqq 1} | xy | = \max_{y \neq 0 \text{ in } R} \frac{| xy |}{G(y)} \tag{4'}$$

sein. Die beiden Körper K und K' und ebenso die zugehörigen Distanzfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ heißen polar zueinander.[6])

Falls K nur aus regulären Punkten besteht, d. h. durch jeden seiner Randpunkte nur eine einzige Stützebene geht, so sind die partiellen Ableitungen

$$F_h(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

stetige Funktionen von x; man erhält alsdann $G(y)$ durch Elimination von $x_1, \ldots, x_n$ aus den $n + 1$ Gleichungen

$$xy = G(y), \; y_1 = F_1(x), \ldots, y_n = F_n(x),$$

und entsprechenderweise ergibt sich $F(x)$ aus $G(y)$.

§ 2. Ungleichungen für das Produkt JJ'.

---

[6]) Wegen dieser Definitionen und Sätze verweise ich auf Bonnesen-Fenchel, Konvexe Körper, Erg. d. Math. III/1, 1934.

Seien

$$x_h{}^* = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} x_k \text{ und } y_h{}^* = \sum_{k=1}^{n} A_{hk} y_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

zwei zu einander kontragrediente lineare Transformationen, d. h. zwei Transformationen, die das skalare Produkt xy invariant lassen:

$$x^* y^* = xy.$$

Sind dann $F(x)$ und $G(x)$ zwei polare Distanzfunktionen und gehen diese durch die vorigen Transformationen über in

$$F^*(x^*) = F^*(x^*{}_1, \ldots, x^*{}_n) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

und

$$G^*(y^*) = G^*(y^*{}_1, \ldots, y^*{}_n) = G(y_1, \ldots, y_n),$$

so sind auch $F^*(x)$ und $G^*(x)$ wieder einander polare Distanzfunktionen. Sei

$$d = |\, a_{hk} \,|_{h,k=1,2,\ldots,n} \text{ und } D = |\, A_{hk} \,|_{h,k=1,2,\ldots,n},$$

so daß

$$d \neq 0,\ D \neq 0,\ dD = 1$$

ist. Die transformierten Eichbereiche

$$F^*(x) \leqq 1 \text{ und } G^*(x) \leqq 1$$

haben alsdann die Inhalte

$$J^* = dJ \text{ und } J'^* = DJ',$$

so daß bei der betrachteten Transformation das Produkt der Inhalte

$$\Delta = J^* J'^* = JJ'$$

ungeändert geblieben ist. Wir werden jetzt zeigen, daß Δ für jedes konvexe Körperpaar zwischen zwei positiven, allein von der Dimension n abhängigen Schranken bleibt.

Wahrscheinlich lauten die exacten Ungleichungen

$$\frac{4^n}{n!} \leqq JJ' \leqq \frac{\pi^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^2},$$

wobei die linke Seite zutrifft für das polare Körperpaar von Parallelepiped und Oktaeder

$$F(x) = \max_{h=1,2,\ldots,n} \left(\left| \sum_{k=1}^{n} a_{hk} x_k \right| \right) \leqq 1 \text{ und } G(x) = \sum_{h=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} A_{hk} x_k \right| \leqq 1$$

mit

$$J = 2^n d,\ J' = \frac{2^n D}{n!},\ JJ' = \frac{4^n}{n!}$$

und die rechte Seite für die polaren Ellipsoide

$$F(x) = \sum_{h=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k\right)^2 \leqq 1 \text{ und } G(x) = \sum_{h=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{hk}x_k\right)^2 \leqq 1$$

mit

$$J = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} d}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},\quad J' = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} D}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},\quad JJ' = \frac{\pi^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}.$$

Für unsere Zwecke reicht es jedoch aus, die folgenden schwächeren Ungleichungen zu beweisen:

$$\frac{4^n}{(n!)^2} \leqq JJ' \leqq 4^n, \tag{6}$$

deren Beweis durch folgende einfache geometrische Betrachtung gelingt:

Wir wählen auf der Oberfläche $F(x) = 1$ von K der Reihe nach n Paare von diametral gelegenen Punkten $(x^{(1)}, -x^{(1)}), \ldots, (x^{(n)}, -x^{(n)})$ mit n zugehörigen Paaren paralleler Stützebenen, die mit $(\xi^{(1)}, -\xi^{(1)}), \ldots, (\xi^{(n)}, -\xi^{(n)})$ bezeichnet seien, so daß also $\xi^{(h)}$, bzw. $-\xi^{(h)}$ eine Stützebene in $x^{(h)}$, bzw. in $-x^{(h)}$ ist. Diese Auswahl geschieht nach folgendem Prinzip: Das Punktepaar $(x^{(1)}, -x^{(1)})$ ist beliebig. Das Punktepaar $(x^{(2)}, -x^{(2)})$ genüge der Bedingung, daß die zugehörigen Stützebenen $(\xi^{(2)}, -\xi^{(2)})$ parallel zum Durchmesser von K durch $x^{(1)}$ und $-x^{(1)}$ sind. Allgemein werde das Punktepaar $(x^{(r)}, -x^{(r)})$ so ausgewählt, daß die zugehörigen Stützebenen $(\xi^{(r)}, -\xi^{(r)})$ parallel zu den sämtlichen Durchmessern von K durch $x^{(h)}$ und $-x^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, r-1)$ sind.

Durch diese Konstruktion erhalten wir zwei konvexe Körper K_1 und K_2, so daß K in K_1 und K_2 in K enthalten ist: K_1 sei nämlich das von den $2n$ Stützebenen $(\xi^{(1)}, -\xi^{(1)}), \ldots, (\xi^{(n)}, -\xi^{(n)})$ berandete Parallelepiped, und K_2 das Oktaeder, das die kleinste konvexe Hülle der $2n$ Punkte $(x^{(1)}, -x^{(1)}), \ldots, (x^{(n)}, -x^{(n)})$ darstellt, d. h. K_2 besteht aus allen Punkten x der Form

$$x = t_1x^{(1)} + \ldots + t_nx^{(n)},\quad |t_1| + \ldots + |t_n| \leqq 1.$$

Sei J_1, bzw. J_2 das Volumen von K_1, bzw. K_2; dann ist also

$$J_1 \geqq J \geqq J_2. \tag{7}$$

Hierneben besteht aber auch noch die Gleichung

$$J_1 = n!\, J_2, \tag{8}$$

wie sich unmittelbar daraus ergibt, daß nach Konstruktion der Abstand des Punktes $x^{(r)}$ von der durch $\mp x^{(1)}, \ldots, \mp x^{(r-1)}$ gelegten linearen Mannigfaltigkeit ebenso groß ist wie der der zugehörigen Stützebene $\xi^{(r)}$.

Bei der Polarentransformation von K in K' gehen nun die $2n$ Punkte $x^{(h)}$, $-x^{(h)}$ auf K über in $2n$ paarweise parallele Stützebenen $\eta^{(h)}$, $-\eta^{(h)}$ von K', und die $2n$ Stützebenen $\xi^{(h)}$, $-\xi^{(h)}$ von K in $2n$ paarweise einander diametrale Punkte $y^{(h)}$, $-y^{(h)}$ auf K'. Die $2n$ Stützebenen $\eta^{(h)}$, $-\eta^{(h)}$ bilden die Berandung eines Parallelepipeds K_1', das K' in seinem Innern enthält, und die kleinste konvexe Hülle K_2' der $2n$ Punkte $y^{(h)}$, $-y^{(h)}$ ist ein ganz in K' enthaltenes Oktaeder. Bedeuten J_1' und J_2' die Volumen von K_1' und K_2', so ist also

$$J_1' \geqq J' \geqq J_2'. \tag{7'}$$

Offenbar ist K_2' der zu K_1 und K_1' der zu K_2 polare konvexe Körper. Weiter genügen nach der Bemerkung zu Beginn dieses Paragraphen die Volumen j_1 und j_2 eines Parallelepipeds und des dazu polaren Oktaeders der Gleichung

$$j_1 j_2 = \frac{4^n}{n!}.$$

Somit ist insbesondere

$$J_1\, J_2' = J_1'\, J_2 = \frac{4^n}{n!} \tag{9}$$

Wegen (8) erhalten wir demnach die Gleichungen

$$J_2 = \frac{J_1}{n!}, \quad J_1' = \frac{4^n}{n!\, J_2} = \frac{4^n}{J_1}, \quad J_2' = \frac{4^n}{n!\, J_1},$$

also wegen (7) und (7') die Ungleichungen

$$J_1 \geqq J \geqq \frac{J_1}{n!} \quad \text{und} \quad \frac{4^n}{J_1} \geqq J' \geqq \frac{4^n}{n!\, J_1},$$

und hieraus folgt (6) unmittelbar durch Multiplikation.

§ 3. Anwendung auf die Minkowskischen Minima.

Wir betrachten nunmehr die beiden polaren konvexen Körper K und K' und deren Distanzfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ in bezug auf das Gitter aller Punkte x in R mit ganzen rationalen Koordinaten.

Zur Funktion $F(x)$ können wir n linear unabhängige Gitterpunkte $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ bestimmen, derart daß für

$$\sigma^{(h)} = F(x^{(h)}) \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

$\sigma^{(1)}$ das Minimum von $F(x)$ in allen Gitterpunkten $x \neq 0$ und ferner $\sigma^{(r)}$ für $r = 2, 3, \ldots, n$ das Minimum von $F(x)$ in allen von $x^{(1)}, \ldots, x^{(r-1)}$ unabhängigen Gitterpunkten darstellt. Alsdann ist nach Minkowski[4]):

$$0 < \sigma^{(1)} \leqq \sigma^{(2)} \leqq \ldots \leqq \sigma^{(n)}, \quad \frac{2^n}{n!\,J} \leqq \sigma^{(1)}\sigma^{(2)} \ldots \sigma^{(n)} \leqq \frac{2^n}{J}. \quad (10)$$

Entsprechenderweise gibt es zu $G(x)$ ein System von n linear unabhängigen Gitterpunkten $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$, so daß für

$$\tau^{(h)} = G(y^{(h)}) \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

$\tau^{(1)}$ das Minimum von $G(x)$ in allen Gitterpunkten $x \neq 0$ und ferner $\tau^{(r)}$ für $r = 2, 3, \ldots, n$ das Minimum von $G(x)$ in allen von $y^{(1)}, \ldots, y^{(r-1)}$ unabhängigen Gitterpunkten ist; analog zu (10) gilt

$$0 < \tau^{(1)} \leqq \tau^{(2)} \leqq \ldots \leqq \tau^{(n)}, \quad \frac{2}{n!\,J'} \leqq \tau^{(1)}\tau^{(2)} \ldots \tau^{(n)} \leqq \frac{2^n}{J'}. \quad (10')$$

Aus (10) und (10′) folgt insbesondere

$$\frac{4^n}{(n!)^2\,JJ'} \leqq \prod_{h=1}^{n} \sigma^{(h)}\tau^{(n-h+1)} \leqq \frac{4^n}{JJ'},$$

also wegen (6):

$$\frac{1}{(n!)^2} \leqq \prod_{h=1}^{n} \sigma^{(h)}\tau^{(n-h+1)} \leqq (n!)^2. \quad (11)$$

Es ist nun wichtig, daß nicht nur das Produkt $\prod_{h=1}^{n} \sigma^{(h)}\tau^{(n-h+1)}$ nach oben und unten durch nur von n abhängige positive Schranken begrenzt wird, sondern daß solche Schranken auch noch für die einzelnen Faktoren $\sigma^{(h)}\tau^{(n-h+1)}$ bestehen. Man erhält diese folgendermaßen:

Für jeden Index $h = 1, 2, \ldots, n$ betrachten wir das System der $n + 1$ Punkte

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(h)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-h+1)}.$$

Die h ersten sowohl als die $n - h + 1$ letzten dieser Punkte sind nach Voraussetzung linear unabhängig. Daraus folgt aber sogleich, daß die $h\,(n - h + 1)$ skalaren Produkte

$$x^{(i)}y^{(j)} \quad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \ldots, h) \\ (j = 1, 2, \ldots, n - h + 1) \end{array}$$

nicht alle gleichzeitig verschwinden können. Denn sonst würde jedes dieser $x^{(i)}$ auf jedem der $y^{(j)}$ senkrecht stehen, also auch die durch $0, x^{(1)}, \ldots, x^{(h)}$ gelegte lineare h-dimensionale Mannigfaltigkeit $L^{(h)}$ auf der durch $0, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-h+1)}$ gelegten linearen $(n-h+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M^{(n-h+1)}$. Das ist aber unmöglich, da $L^{(h)}$ und $M^{(n-h+1)}$ im Raum R von der Dimension n liegen, und $n < h + (n - h + 1)$ ist.

Sei also etwa

$$x^{(i_0)}y^{(j_0)} \neq 0.$$

Hier steht links das skalare Produkt zweier Gitterpunkte, somit eine ganze rationale Zahl. Daher folgt, daß

$$|\, x^{(i_0)}y^{(j_0)} \,| \geqq 1$$

ist. Aus der Ungleichung (5) ergibt sich also

$$1 \leqq |\, x^{(i_0)}y^{(j_0)} \,| \leqq F(x^{(i_0)})\, G(y^{(j_0)}) = \sigma^{(i_0)}\tau^{(j_0)}$$

und wegen

$$\sigma^{(h)} \geqq \sigma^{(i_0)}, \quad \tau^{(n-h+1)} \geqq \tau^{(j_0)}$$

schließlich die Ungleichung

$$\sigma^{(h)}\tau^{(n-h+1)} \geqq 1 \quad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{A}$$

Wir wenden diese Ungleichung auf alle Faktoren $\sigma^{(k)}\tau^{(n-k+1)}$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$ und $k \neq h$ in der rechten Hälfte von (11) an; dann ergibt sich auch noch eine obere Schranke

$$\sigma^{(h)}\tau^{(n-h+1)} \leqq (n!)^2 \quad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{B}$$

Diese beiden Ungleichungen (A) und (B) bilden das allgemeine Übertragungsprinzip für die Minkowskischen Minima polarer konvexer Körper.

Das Übertragungsprinzip nimmt eine von den speziellen Körpern unabhängige und daher besonders einfache Form an, wenn wir zwei Systeme von je n positiven Zahlen $s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}$ und $t^{(1)}, \ldots, t^{(n)}$ durch

$$\sigma^{(h)} = \frac{2s^{(h)}}{\sqrt[n]{J}}, \quad \tau^{(h)} = \frac{2t^{(h)}}{\sqrt[n]{J'}} \quad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

definieren. Wir nennen diese Zahlen die reduzierten Minima von $F(x)$, bzw. $G(x)$; sie stimmen mit den Minkowskischen Minima überein, falls $J = 2^n$ oder $J' = 2^n$ ist. Die Formeln (10), (10'), (A) und (B) ergeben für sie:

$$\begin{gathered} 0 < s^{(1)} \leqq s^{(2)} \leqq \ldots \leqq s^{(n)}, \quad \frac{1}{n!} \leqq s^{(1)}s^{(2)} \ldots s^{(n)} \leqq 1, \\ 0 < t^{(1)} \leqq t^{(2)} \leqq \ldots \leqq t^{(n)}, \quad \frac{1}{n!} \leqq t^{(1)}t^{(2)} \ldots t^{(n)} \leqq 1, \\ (n!)^{-\frac{2}{n}} \leqq s^{(h)}t^{(n-h+1)} \leqq (n!)^2 \quad (h = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{13}$$

Es ist hiernach insbesondere

$$s^{(1)}t^{(n)} \geqq (n!)^{-\frac{2}{n}}, \quad s^{(1)n-1}s^{(n)} \leqq 1, \quad t^{(1)n-1}t^{(n)} \leqq 1,$$

und also ergeben sich hieraus folgende Ungleichungen für die ersten und letzten Minima:

$$t^{(1)} \leqq (n!)^{\frac{2}{n(n-1)}} s^{(1)\frac{1}{n-1}} \text{ und } t^{(n)} \geqq (n!)^{-\frac{2}{n}} s^{(n)\frac{1}{n-1}}. \tag{14}$$

Indem man s und t vertauscht, erhält man noch zwei analoge Abschätzungen nach der anderen Richtung. Die erste der beiden Ungleichungen (14) enthält das Khintchinesche Übertragungsprinzip und auch meinen allgemeineren Satz aus dem vorigen Jahr [1], [2], [3].

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, daß die numerischen Koeffizienten in den Übertragungssätzen dieses Paragraphen verschärft werden können. Nimmt man z. B. für K und K' das durch die Distanzfunktionen

$$F(x) = \max_{h=1,2,\ldots,n} \left(\left| \sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k \right| \right) \text{ und } G(x) = \sum_{h=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} A_{hk}x_k \right|$$

bestimmte Parallelepiped und Oktaeder, so daß

$$JJ' = \frac{4^n}{n!}$$

ist, so erhält man u. a. die Ungleichungen

$$1 \leqq \sigma^{(h)}\,\tau^{(n-h+1)} \leqq n! \quad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 4. Bemerkungen über das inhomogene Problem.

Im Beweis eines von mir kürzlich veröffentlichten Satzes[7]) ist implizit folgendes Resultat enthalten: Ist $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein willkürlicher reeller Punkt in R, so gibt es einen Gitterpunkt x mit

$$F(x + \xi) \leqq (n + 1)^2\, \sigma^{(n)}.$$

Wegen (B) ist also erst recht die Ungleichung

$$F(x + \xi) \leqq \frac{\{(n + 1)!\}^2}{\tau^{(1)}} \tag{15}$$

lösbar, so daß die Schärfe der Lösbarkeit des inhomogenen F-Problems von der des homogenen G-Problems abhängt. Dieses Resultat ist bis auf den von n abhängigen Faktor im wesentlichen das Bestmögliche. Denn aus Minkowskischen Überlegungen im letzten Kapitel der „Geometrie der Zahlen" geht hervor, daß die Menge aller Punkte

$$\xi = t_1 x^{(1)} + \ldots + t_n x^{(n)},$$

[7]) Proceedings Academy Amsterdam **41** (1938), 634—637.

für die $(t_1, \ldots, t_n)$ im Einheitswürfel $0 \leqq t_1 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq t_n \leqq 1$ liegt und

$$F(x + \xi) \leqq \frac{\varepsilon \sigma^{(n)}}{2} \qquad (0 < \varepsilon \leqq 1)$$

durch einen Gitterpunkt x lösbar ist, in bezug auf den t-Raum höchstens das Maß ε hat; wegen (A) gilt daher erst recht dieselbe Maßabschätzung für die Ungleichung

$$F(x + \xi) \leqq \frac{\varepsilon}{2\tau^{(1)}}. \tag{16}$$

Die Sätze über inhomogene Probleme in diesem Paragraphen enthalten als sehr spezielle Fälle insbesondere einige Resultate, die V. Jarník vor kurzem gefunden hat und so freundlich war, mir schon vor der Veröffentlichung zur Verfügung zu stellen.

Montana, Juli 1938.*)

*

Věta o přenosu pro konvexní tělesa.

(Obsah předešlého článku.)

Buďte K, K' dvě konvexní n-rozměrná tělesa (symetrická vzhledem k počátku), jež jsou navzájem polární vzhledem k jednotkové kouli; budiž dále J obsah tělesa K a buďte $\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(n)}$ postupná minima, příslušná k tělesu K; buďte J', $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)}$ obdobná čísla pro těleso K'. Potom jest

$$\frac{4^n}{(n!)^2} \leqq JJ' \leqq 4^n,$$

$$1 \leqq \sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)} \leqq (n!)^2 \quad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

*) Anmerkung im Mai 1939. Herr Chabauty macht mich auf den Vortrag von Herrn M. Riesz, C. R. Congress Oslo, II, 36—37, aufmerksam, den ich ganz vergessen hatte. Herr Riesz gibt dort folgenden Satz, mit dem mein Resultat eng zusammenhängt: Zu den polaren konvexen Körpern $F(x) \leqq 1$ und $G(x) \leqq 1$ in n Dimensionen gibt es je n Gitterpunkte der Determinante 1,

$$X^{(1)}, \ldots, X^{(n)} \text{ und } Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)},$$

so daß

$$1 \leqq F(X^{(h)})\, G(Y^{(h)}) \leqq c \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten $c > 0$ ist. Darüber hinaus gilt, daß man diese Gitterpunkte polar zu einander annehmen kann, dh. $(X^{(h)}, Y^{(k)}) = \delta_{hk}$, wo δ_{hk} das Kroneckersche Zeichen ist. Die Beziehung zu den Minkowskischen Minima wird dagegen nicht in der Rieszschen Note gegeben. — Verf. möchte zum zweiten Teil des Rieszschen Satzes bemerken, daß dieser kein Analogon für die n unabhängigen Gitterpunkte $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ und $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ hat, die die Minkowskischen Minima liefern; man kann leicht Beispiele konstruieren, für die einige der skalaren Produkte $(x^{(h)}, y^{(k)})$ beliebig große Werte annehmen.