Bohumil Bydžovský

Sur les points et les coniques sextactiques d'une cubique plane

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. 3-4, 137--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109433

Sur les points et les coniques sextactiques d'une cubique plane.

B. Bydžovský, Praha.

(Reçu le 24 février 1939.)

Dédié en hommage à M. K. Petr.

1. Étant donnés, sur une cubique, trois points dont les points tangentiels sont situés sur une droite, les points donnés ou sont situés de même sur une droite, ou bien ce sont des points de contact de la cubique avec une conique. Donc, supposons que les points A, B, C de la cubique ne sont pas alignés, mais que leurs points tangentiels A', B', C' sont situés sur une droite q. Alors, il existe une conique qui touche la cubique aux points A, B, C. Les trois tangentes en ces points forment un triangle que j'appellerai tout court triangle de Brianchon et qui possède la propriété bien connue que les droites joignant les points A, B, C aux sommets du triangle passent par un même point Q (point de Brianchon). Je me suis demandé s'il est possible que le point Q et la droite q soient pôle et polaire par rapport au triangle des trois tangentes aux points A, B, C.

2. Prenons pour triangle de référence un triangle de Brianchon, formé par trois tangentes de la cubique, son point de Brianchon pour point-unité. Alors, les points de contact de ces trois tangentes sont, respectivement, (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) et l'équation de la cubique a la forme

$$(x_1 - x_2)^2 (ax_1 + bx_2) + (x_1 - x_3)^2 (ax_1 + cx_3) + \\ + (x_2 - x_3)^2 (bx_2 + cx_3) - (ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3) + 2kx_1x_2x_3 = 0.$$

Les trois points tangentiels des tangentes choisies se trouvent sur la droite

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Pour que cette droite soit la polaire du point-unité par rapport au triangle de référence, il faut et il suffit que

$$a = b = c.$$

L'équation de la cubique prend, en ce cas, la forme

$$a\,(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2^2 - x_2^2 x_3 - x_1 x_3^2 - x_2 x_3^2) + \\ + 2k x_1 x_2 x_3 = 0 \qquad (1)$$

les trois points tangentiels ont, respectivement, les coordonnées $0, 1, -1$; $1, 0, -1$; $1, -1, 0$. La polaire quadratique du point $(0, 1, -1)$ est

$$(x_2 - x_3)\,[2a\,(x_2 + x_3) - (k + a)\,x_1] = 0$$

ce qui veut dire que ce point est un point d'inflexion, la droite

$$x_2 - x_3 = 0$$

est sa polaire harmonique. On trouve, de même, que les points $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$ sont des points d'inflexion avec, respectivement, les polaires harmoniques

$$x_3 - x_1 = 0, \; x_1 - x_2 = 0.$$

Donc, les points $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ sont des points sextactiques, puisque ce sont des points dont les points tangentiels sont des points d'inflexion. On a le résultat:

„La condition, nécessaire et suffisante, pour que le point de Brianchon d'un triangle de Brianchon formé par les tangentes en trois points de la cubique dont les points tangentiels se trouvent sur une droite, et cette droite soient pôle et polaire par rapport à ce triangle, est celle que ces points soient des points sextactiques de la cubique".

Nous verrons à l'instant que la cubique (1) est, en géneral, une courbe de genre un. Exprimons les coordonnées de ses points, de la manière bien connue, par un paramètre elliptique de sorte que la collinéarité de trois points aux paramètres u, v, w soit exprimée par la congruence

$$u + v + w \equiv 0 \text{ (modd per)}.$$

Les points d'inflexion sont donnés par la congruence

$$3u \equiv 0.$$

Les trois points d'inflexion aux paramètres

$$0, \frac{2\omega_1}{3}, \frac{4\omega_1}{3},$$

$2\omega_i$ désignant les périodes des fonctions elliptiques, se trouvent sur une droite. Les tangentes menées de ces points à la cubique la touchent aux points sextactiques:

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \qquad \text{point tangentiel } 0,$$
$$-\frac{\omega_1}{3}, -\frac{\omega_1}{3} + \omega_2, -\frac{\omega_1}{3} + \omega_3, \text{ point tangentiel } \frac{2\omega_1}{3},$$

$$\frac{\omega_1}{3}, -\frac{2\omega_1}{3}+\omega_2, -\frac{2\omega_1}{3}+\omega_3, \text{ point tangentiel } \frac{4\omega_1}{3}.$$

On s'assure facilement de ce que les seuls triples de ces points, aux points tangentiels différents, qui ne sont pas situés sur une droite, sont les suivants:

$$\begin{aligned} &\omega_1, -\frac{\omega_1}{3}, \frac{\omega_1}{3}, \\ &\omega_2, -\frac{2\omega_1}{3}+\omega_2, -\frac{\omega_1}{3}+\omega_3, \\ &\omega_3, -\frac{2\omega_1}{3}+\omega_3, -\frac{\omega_1}{3}+\omega_2. \end{aligned} \tag{I}$$

Donc, les tangentes aux points de chaque triple forment un triangle de Brianchon, la droite polaire du point de Brianchon par rapport à ce ~~triangle~~ étant la droite de jonction des trois points d'inflexion.

Le point unité est commun aux polaires harmoniques des trois points d'inflexion alignés; ce point est toujours le même, n'importe lequel des trois triples de points sextactiques on considère. Ainsi on a le résultat suivant:

„Les neuf points sextactiques dont les trois points (d'inflexion) tangentiels sont situés sur une droite, peuvent être disposés en trois triples tels que les tangentes aux points de chaque triple forment un triangle de Brianchon. Ces trois triangles ont le même point de Brianchon, lequel est pôle de la droite des trois points d'inflexion par rapport à chacun de ces triangles."

La conique touchant la cubique aux trois points sextactiques situés sur les axes de coordonnées possède l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0. \tag{1a}$$

Le point-unité et la droite-unité sont pôle et polaire par rapport à cette conique. Le point-unité a pour droite polaire par rapport à la cubique la droite unité, puisque ce point est l'intersection des polaires quadratiques de trois des points de la droite. Donc:

„Le point de Brianchon commun des triangles de Brianchon dont il est question dans le théorème précédent a pour droite polaire par rapport à la cubique, par rapport aux coniques dont chacune est inscrite dans un des trois triangles de Brianchon et touche ses côtés aux points sextactiques, ainsi que par rapport à ces trois triangles, la même droite."

3. L'équation (1) nous permet d'établir les équations des coniques sextactiques, à savoir des coniques ayant, au points sextactiques, un contact du cinquième ordre avec la cubique. Une conique

ayant, p. ex. au point (1, 1, 0), la tangente $x_3 = 0$, a une équation de la forme

$$(x_1 - x_2)^2 + x_3 (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = 0 \tag{2}$$

et il s'agit de déterminer les constantes a_i de telle sorte que cette conique n'ait pas, en dehors du point (1, 1, 0), de point commun avec la cubique. La cubique

$$(x_1 + x_2) [(x_1 - x_2)^2 + x_3 (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)] = 0 \tag{3}$$

coupe la cubique (1) aux mêmes points que la conique précédente et la droite

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Multiplions (3) par a et soustrayons de l'équation obtenue l'équation (1); on obtient

$$x_3 [a (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 2kx_1x_2 + a (x_1 + x_2) \times \\ \times (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)] = 0.$$

Les points communs se trouvent sur la droite $x_3 = 0$ et sur la conique

$$a (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 2kx_1x_2 + \\ + a (x_1 + x_2) (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = 0. \tag{4}$$

Donc, il faut que les coniques (2) et (4) ne se coupent qu'au point (1, 1, 0), ce qui veut dire que l'équation (4) doit avoir la forme

$$k_1 [(x_1 - x_2)^2 + x_3 (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)] + k_2x_3^2 = 0. \tag{5}$$

En comparant les coefficients de (4) et (5), on obtient les relations:

$$2aa_1 = k - a, \ a_1 = a_2, \ 2k_1 = k + a, \ 4a^2a_3 = k^2 - 5a^2, \\ k_1a_3 + k_2 = - a.$$

L'équation (2) devient

$$4a^2 (x_1 - x_2)^2 + 2a (k - a) (x_1 + x_2) x_3 + (k^2 - 5a^2) x_3^2 = 0 \tag{2'}$$

et ceci est la conique sextactique au point (1, 1, 0) de la cubique. L'équation (4) se reduit à l'équation

$$2a (k + a) (x_1 - x_2)^2 + (k^2 - a^2) (x_1 + x_2) x_3 - 4a^2x_3^2 = 0. \tag{4'}$$

Cette conique coupe la cubique au point (1, 1, 0), qui est point de surosculation des deux courbes, et aux points où la cubique est coupée par la droite $x_1 + x_2 = 0$, excepté le point d'inflexion (1, — 1, 0).

Faisons remarquer que les coniques (2′), (4′) sont deux coniques ayant une surosculation avec la cubique au point sextactique et que, par conséquent, le faisceau de toutes les coniques jouissant de cette propriété est exprimé par l'équation

$$2a (x_1 - x_2)^2 + (k - a) (x_1 + x_2) x_3 + \lambda x_3^2 = 0,$$

λ désignant un paramètre.

4. L'équation (2') nous fournit des éléments géométriques necéssaires pour la détermination géométrique de la conique sextactique. Pour ce but, considérons la polaire quadratique du point d'inflexion (1, — 1, 0):

$$(x_1 - x_2) [2a (x_1 + x_2) - (a + k) x_3] = 0.$$

Elle est composée de la polaire harmonique

$$x_1 - x_2 = 0$$

du point d'inflexion considéré et de la tangente en ce point:

$$2a (x_1 + x_2) - (a + k) x_3 = 0.$$

On trouve facilement que cette polaire harmonique est en même temps la droite polaire du point d'inflexion considéré par rapport à la conique sextactique.

En deuxième lieu, considérons la polaire quadratique du point sextactique (1, 1, 0):

$$a (x_1 - x_2)^2 + (k - a) (x_1 + x_2) x_3 - a x_3^2 = 0. \tag{6}$$

L'équation (4') peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} 4a [a (x_1 - x_2)^2 + (k - a) (x_1 + x_2) x_3 - a x_3^2] - \\ - (k - a) [2a (x_1 + x_2) - (k + a) x_3] x_3 = 0 \end{aligned}$$

qui fait voir que la conique (6) et la conique sextactique qui se touchent, bien entendu, au point sextactique, se coupent, de plus, sur la tangente d'inflexion. On a donc le théorème suivant:

„La conique ayant, en un point sextactique, avec la cubique un contact du cinquième ordre coupe la polaire quadratique de ce point sur la tangente au point d'inflexion, point tangentiel du point sextactique considéré; la droite polaire de ce point d'inflexion par rapport à la conique est identique avec la polaire harmonique de ce point.“

Les deux données fournies par ce théorème ne sont pas, cependant, indépendantes, puisque, comme on s'en rend facilement compte, la même droite est droite polaire du point d'inflexion par rapport à la polaire quadratique du point sextactique. Pour caractériser géométriquement la conique sextactique d'une manière suffisante, faisons usage de ce que cette conique et la conique (4') sont en surosculation au point sextactique, la droite $x_3 = 0$ étant la tangente commune. On sait que deux coniques dans ces conditions ont, pour chaque point de la tangente commune, la même droite polaire. Donc, si l'on connaît la conique (4') et que l'on détermine la polaire d'un des points (différent, bien entendu, du point d'inflexion) de la tangente commune par rapport à cette conique, on connaît un pôle et sa polaire par rapport a la conique sextactique; comme on connaît un de ses points avec la tangente et, en vertu du théorème énoncé ci-dessus, un couple de ses points sur la tangente d'inflexion, la conique se trouve parfaitement déterminée.

5. Ceci suppose, bien entendu, qu'on possède des éléments qui suffisent à caractériser géométriquement la conique (4'). Son équation peut être écrite sous la forme

$$2(k+a)\left[a(x_1-x_2)^2+(k-a)(x_1+x_2)x_3-ax_3^2\right]-$$
$$-(k-a)\left[(k+a)(x_1+x_2)-2ax_3\right]x_3=0$$

qui fait voir que la conique (4') et la polaire quadratique du point sextactique se coupent sur la droite

$$(k+a)(x_1+x_2)-2ax_3=0 \tag{7}$$

(en outre, elles se touchent au point sextactique).

Or, cette équation peut être écrite de la manière suivante:

$$(k+3a)(x_1+x_2-x_3)+(k-a)(x_1+x_2+x_3)=0.$$

L'équation de la tangente au point d'inflexion respectif, trouvée plus haut, peut être mise sous la forme

$$(k+3a)(x_1+x_2-x_3)-(k-a)(x_1+x_2+x_3)=0$$

qui fait voir que les deux droites sont divisées harmoniquement par la droite des trois inflexions et par la droite joignant le point d'inflexion respectif aux points sextactiques (0, 1, 1), (1, 0, 1). Donc, on connaît la construction de la droite sur laquelle se trouvent deux points d'intersection de la conique en question avec la polaire quadratique (6). Puisque nous connaîssons dès l'abord un point de la conique avec sa tangente et deux de ses points d'intersection avec la cubique, la conique se trouve parfaitement déterminée.

6. Pour approfondir l'étude des coniques sextactiques, considérons les trois coniques sextactiques appartenant aux points sextactiques de notre triangle de Brianchon. Le calcul pour les points (0, 1, 1), (1, 0, 1) est tout à fait analogue à celui exécuté plus haut pour le point (1, 1, 0). On a ainsi les trois coniques:

$$4a^2(x_2-x_3)^2+2a(k-a)(x_2+x_3)x_1+(k^2-5a^2)x_1^2=0, \tag{8}$$
$$4a^2(x_1-x_3)^2+2a(k-a)(x_1+x_3)x_2+(k^2-5a^2)x_2^2=0, \tag{9}$$
$$4a^2(x_1-x_2)^2+2a(k-a)(x_1+x_2)x_3+(k^2-5a^2)x_3^2=0. \tag{10}$$

En faisant la soustraction de ces équations deux à deux, on obtient, après reduction et en supposant que $k+3a \neq 0$ (nous y reviendrons) les résultats suivants:

$$(8)-(9):(x_1-x_2)\left[(k-3a)(x_1+x_2)+2ax_3\right]=0,$$
$$(8)-(10):(x_1-x_3)\left[(k-3a)(x_1+x_3)+2ax_2\right]=0,$$
$$(9)-(10):(x_2-x_3)\left[(k-3a)(x_2+x_3)+2ax_1\right]=0.$$

Les droites $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$ sont les polaires harmoniques des trois points d'inflexion. On a donc le théorème suivant:

„Les coniques sextactiques aux trois points sextactiques, dont les tangentes forment un triangle de Brianchon, se coupent deux à deux sur les polaires harmoniques des trois points d'inflexion qui sont points tangentiels des points sextactiques considérés; deux de ces coniques se coupent sur la polaire harmonique du point d'inflexion qui n'est pas tangentiel pour les deux points sextactiques, points de contact des deux coniques."

Considérons p. ex. la droite

$$(k - 3a)(x_1 + x_2) + 2ax_3 = 0.$$

Sa conjuguée harmonique par rapport aux deux droites

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

est

$$2a(x_1 + x_2) + (k - 3a)x_3 = 0$$

dont la conjuguée harmonique par rapport aux droites

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 = 0$$

est

$$2a(x_1 + x_2) - (k + a)x_3 = 0$$

à savoir, la tangente au point d'inflexion $(1, -1, 0)$. Donc, on obtient la seconde droite, sur laquelle se coupent les coniques (8), (9), en partant de cette tangente et en construisant deux conjuguées harmoniques. Ainsi, on sait construire, pour chaque paire des coniques sextactiques, deux droites, sur lesquelles se trouvent leurs points d'intersection.

Cette circonstance peut aussi être utilisée pour la détermination géométrique de ces coniques. En particulier, si une de ces trois coniques est construite, on peut, en vertu du résultat acquis, construire facilement les deux autres.

7. L'équation

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2x_2 - x_1^2x_3 - x_1x_2^2 - x_2^2x_3 - x_1x_3^2 - x_2x_3^2) + \\ + 2kx_1x_2x_3 = 0 \tag{1}$$

de la cubique ayant les points $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ pour points sextactiques avec les tangentes respectives

$$x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 0$$

contient deux paramètres homogènes, ce qui fait voir que les cubiques satisfaisant aux conditions énoncées forment un faisceau. Déterminons les cubiques de ce faisceau contenant des points singuliers. Les conditions pour l'existence d'un point singulier sont exprimées par les équations

$$a\,(3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3) + 2kx_2x_3 = 0,$$
$$a\,(- x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3) + 2kx_1x_3 = 0,$$
$$a\,(- x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + 2kx_1x_2 = 0.$$

On trouve, sans trop de peine, les solutions suivantes de ce système d'équations:

a) pour $2k = 3a$ la cubique possède le point singulier 1, 1, 1;

b) pour $k = a$ la cubique possède trois points singuliers, à savoir: 0, 1, 1; 1, 0, 1; 1, 1, 0;

c) pour $k = - 3a$ la cubique possède deux points singuliers qui sont les intersections de la droite

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

et de la conique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0;$$

d) pour $a = 0$ la cubique possède trois points singuliers, à savoir (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

Le cas a) donne une cubique de genre 0 à l'équation .

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2x_2 - x_1^2x_3 - x_1x_2^2 - x_2^2x_3 - x_1x_3^2 - x_2x_3^2 + \\ + 3x_1x_2x_3 = 0.$$

Les tangentes au point double de cette cubique sont

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = 0, \; x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 = 0$$

où α désigne une racine cubique imaginaire de l'unité. La cubique possède un noeud; puisque toutes les cubiques à un noeud sont projectivement équivalentes, on a démontré le théorème suivant:

„La cubique de genre 0 possédant un noeud a trois points sextactiques; les tangentes en ces points forment un triangle de Brianchon. Le noeud et la droite joignant les trois points d'inflexion sont pôle et polaire par rapport à ce triangle; ils sont aussi pôle et polaire par rapport à la conique touchant les côtés de ce triangle aux points sextactiques."

Cette conique est une conique covariante de la cubique de genre zéro caractérisée par la propriété d'être l'enveloppe des droites joignant les paires de points conjugués de la cubique; points conjugués sont deux points de la cubique au même point tangentiel. Pour prouver cet énoncé, faisons remarquer d'abord que parmi ces droites de jonction figurent les tangentes au point double et les trois tangentes aux points sextactiques. Par ces cinq tangentes la conique covariante est déterminée d'une manière univoque. Or, la conique (1a) touche les trois tangentes aux points sextactiques et un calcul élémentaire fait voir qu'elle touche aussi les tangentes au noeud.*)

8. Pour toutes les cubiques du faisceau (1) le point unité et la droite unité sont pôle et polaire. De plus, il est facile de montrer que les sommets d'un triangle d'inflexion — triangle dont les cotés contiennent les neuf points d'inflexion — situés sur un de ses côtés sont donnés par l'Hessienne de la forme binaire cubique donnant les trois points d'inflexion situés sur ce côté. Si l'on se rappelle la propriété polaire du triangle d'inflexion, on trouve le résultat:

„Toutes les cubiques du faisceau (1) ont un même triangle d'inflexion".

Donc, toutes ces cubiques ont trois points d'inflexion communs, le lieu des six autres points d'inflexion sont deux droites.

Une cubique du faisceau considéré est déterminée p. ex., par un point sextactique ultérieur. Il est facile de construire, en ce cas, les neuf points sextactiques dont les points tangentiels se trouvent sur la droite unité. Le tableau (I) fait voir que par chaque point de ce tableau passent trois droites contenant, chacune, trois des neuf points sextactiques. Ainsi, on a, p. e.:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \equiv 0,$$

$$\omega_1 - \frac{\omega_1}{3} + \omega_2 - \frac{2\omega_1}{3} + \omega_2 \equiv 0,$$

$$\omega_1 - \frac{\omega_1}{3} + \omega_3 - \frac{2\omega_1}{3} + \omega_3 \equiv 0.$$

Alors, la construction suivante a lieu. Soient I_1, I_2, I_3 les trois points d'inflexion alignés, S_r le point sextactique dont I_r est le point tangentiel; les trois polaires harmoniques des points I_r passent par un même point I; IS_r est la polaire harmonique du point I_r par rapport à toutes les cubiques du faisceau. Soit S'_1 un deuxième point sextactique sur IS_1. Soit A le point d'intersection de $I_1S'_1$ et de IS_3; alors I_2A est une deuxième tangente sextactique, son point d'intersection avec IS_2 est S'_2, un deuxième point sextactique dont I_2 est le point tangentiel. On construit de la même manière le point S'_3, un deuxième point sextactique dont I_3 est le point tangentiel. Le point commun aux droites $S_1S'_2$, $S_2S'_1$ est S''_3, le troisième point sextactique dont I_3 est le point tangentiel; on construit, d'une manière analogue, les points S''_1, S''_2.

*

*) On retrouve ainsi le theorème disant que la polaire du noeud par rapport à la conique covariante définie ci-dessus est la droite des trois inflexions. J'ai énoncé ce théorème dans Časopis pro pěst. mat. a fys. 35 (1906), p. 16 („Inflekční přímka kubické křivky racionálné").

O sextaktických bodech a kuželosečkách rovinné kubiky.

(Obsah předešlého článku.)

Tečné ve třech bodech kubiky neležících v přímce, jichž tečnové body však v přímce leží, dotýkají se v těchto bodech kuželosečky a tvoří tudíž trojúhelník, který nazývám stručně Brianchonovým; spojnice jeho vrcholů s dotyčnými body protějších stran procházejí bodem Brianchonovým. Ukazuje se, že jen v případě, kdy tři body ležící v přímce jsou body inflexní, tři tečné tvořící trojúhelník Brianchonův tedy tečné sextaktické, je Brianchonův bod zároveň pólem přímky tří tečnových bodů vzhledem k Brianchonovu trojúhelníku. Jsou odvozeny rovnice sextaktických kuželoseček v uvedených třech sextaktických bodech. Kubiky mající společné tři inflexní body v přímce a tři sextaktické body ležící na stranách uvedeného Brianchonova trojúhelníku tvoří svazek; tento svazek obsahuje také jednu křivku s bodem uzlovým, mimo to křivky složené. Je-li dán další sextaktický bod, jehož bodem tečnovým je jeden z daných tří bodů inflexních, lze snadno sestrojiti všech devět sextaktických bodů, jichž body tečnové jsou dané tři body inflexní ležící v přímce.