Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 4, 281--320

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109410

„dokonalých“ a „nedokonalých“, plynů a par a že i „dokonalé“ plyny lze proměniti na kapaliny a tělesa tuhá. Roku 1878 podařilo se *Pictetovi* silným stlačením a značným schlazením proměniti *kyslík* na kapalinu, později (od r. 1883) vykonali zajímavá měření při kondensaci *vzduchu* a *dusíku* *Wroblewski* a *Olszewski*. Nejdéle vzdoroval vodík, jejž nutno při kondensaci ochladiti až na — 200° C.

V poslední době však konstruovány byly jednoduché apparáty ochlazovací (*Kirk, Coleman, Solvay, Linde, Kamerlingh*) kterými, jak *Dewar* ukázal, jest možno snadno a v několika minutách skapalniti vodík.

Úlohy.

Úloha 1.

Jak se dokáže správnost relace

$$\frac{\prod_{k=o}^{n}(a^{2^k}+b^{2^k})(c^{2^k}+d^{2^k})}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}+\frac{\prod_{k=o}^{n}(a^{2^k}+c^{2^k})(b^{2^k}+d^{2^k})}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)}+\frac{\prod_{k=o}^{n}(a^{2^k}+d^{2^k})(b^{2^k}+c^{2^k})}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)}\equiv 0?$$

Prof. Dr. *F. J. Studnička.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Schüller*, stud. VIII. tř. gymn. v Chrudimi.)

Násobíme-li rovnici společným jmenovatelem a vypíšeme naznačené součiny, nabývá daná relace tvaru

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\ldots(a^{2^k}+b^{2^k}).(c-d)(c+d)(c^2+d^2)\ldots (c^{2^k}+d^{2^k})-(a-c)(a+c)(a^2+c^2)\ldots$$

$$(a^{2^k} + c^{2^k}) . (b - d) (b + d) (b^2 + d^2) \dots (b^{2^k} + d^{2^k})$$
$$+ (a - d) (a + d) (a^2 + d^2) \dots (a^{2^k} + d^{2^k}) . (b - c) (b + c) (b^2 + c^2) \dots$$
$$(b^{2^k} + c^{2^k}) \equiv 0.$$

Vyvinutím součinů obdržíme, kladouce

$$A = a^{2^{k+1}}, \quad B = b^{2^{k+1}}, \quad C = c^{2^{k+1}}, \quad D = d^{2^{k+1}},$$

identitu

$$(A - B) (C - D) - (A - C) (B - D) + (A - D) (B - C) \equiv 0,$$

jejíž správností stvrzuje se též správnost relace dané.

Úloha 2.

Řešiti jest rovnici

$$x^5 - 2x^4 - x^3 + 6x - 4 = 0.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Břetislav Brzobohatý,* stud. V. tř. r. v Lipníku.)

Jeden kořen rovnice jest patrně

$$x_1 = 1,$$

pročež levá strana rovnice má činitele $x - 1$; dělením najdeme činitele druhého a dáme rovnici podobu

$$(x - 1) (x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4) = 0.$$

Jelikož také druhý činitel jest dělitelen rozdílem $x - 1$, obdržíme rovnici

$$(x - 1)^2 (x^3 - 2x - 4) = 0.$$

Vytkneme-li dále zřejmého činitele $x - 2$, bude

$$(x - 1)^2 (x - 2) (x^2 + 2x + 2) = 0.$$

Jsou tedy kořeny dané rovnice

$$x_1 = x_2 = 1, \; x_3 = 2,$$
$$x_{4,5} = -1 \pm i.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Jos. Berounský,* stud. VI. tř. r. v Jičíně.)

Pokládáme-li známým kořen $x_1 = 1$, zbývá řešiti rovnici

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

čili

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - \left(x + \frac{2}{x}\right) - 2 = 0.$$

Položíme-li

$$x + \frac{2}{x} = y,$$

tedy

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4,$$

obdržíme

$$y^2 - y - 6 = 0$$

a odtud

$$y_1 = 3, \quad y_2 = -2.$$

Rovnice

$$x + \frac{2}{x} = 3 \quad \text{čili} \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

poskytuje řešení

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 2,$$

kdežto

$$x + \frac{2}{x} = -2 \quad \text{čili} \quad x^2 + 2x + 2 = 0$$

má kořeny

$$x_{4,5} = -1 \pm i.$$

Úloha 3.

Který jest součet nekonečné řady, jejíž obecný člen jest

$$a_n = \frac{3 + 2n - 2^n}{3^n}?$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *G. Vetter,* stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze.)

Kladouce postupně

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

obdržíme řadu

$$S = \frac{3-1}{1} + \frac{5-2}{3} + \frac{7-4}{3^2} + \frac{9-8}{3^3} + \frac{11-16}{3^4} + \ldots,$$

která jest rozdílem řad

$$S_1 = \frac{3}{1} + \frac{5}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{9}{3^3} + \ldots$$

$$S_2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots.$$

Řadu S_1 násobme podílem $\frac{1}{3}$, i bude

$$\frac{1}{3} S_1 = \frac{3}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \ldots,$$

a odečtením této hodnoty od S_1 shledáme, že

$$\frac{2}{3} S_1 = 3 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots = 3 + \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 4,$$

tudíž

$$S_1 = 6.$$

Dále jest

$$S_2 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3,$$

pročež

$$S = S_1 - S_2 = 3.$$

P o z n á m k a. První 4 členy řady S jsou kladné, ostatní záporné; součet kladných jest

$$S' = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} = 4\,\frac{10}{27},$$

pročež součet záporných

$$S'' = S' - S = 1\frac{10}{27} = \frac{37}{27}.$$

Úloha 4.

Ustanoviti jest hodnotu nekonečného vzestupného řetězce

$$x = \frac{1 + \frac{3 + \frac{5 + \cdots}{2}}{2}}{2}$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Mik. Šmok,* stud. VIII. třídy gymn. v Hradci Králové.)

Daný řetězec jest patrně totožný s řadou

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots \text{ in inf.}$$

Abychom součet této sbíhavé řady stanovili, násobme ji podílem $\frac{1}{2}$; obdržíme tak

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \ldots.$$

Odečtouce druhou tuto rovnici od prvé najdeme

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2};$$

jest tedy mezná hodnota daného řetězce

$$x = 3.$$

Úloha 5.

Studující chce ze tří druhů sešitů po 11, 13 a 17 h koupiti 20 sešitů za 2·5 K. Kolikerým způsobem to může vykonati?

Učitel měšť. školy *A. Kozák* (v Milevsku).

Řešení. (Zaslal p. *Stanislav Zavadil,* stud. V. třídy r. v Lipníku.)

Nazveme-li počet sešitů jednotlivých druhů x, y, z, máme podmínky

$$11x + 13y + 17z = 250$$
$$x + y + z = 20.$$

Vyloučíme-li z, obdržíme neurčitou rovnici

$$3x + 2y = 45;$$

tato poskytuje obecné řešení

$$x = 15 - 2u, \quad y = 3u,$$

načež

$$z = 5 - u.$$

Aby řešení bylo kladné, třeba voliti

$$u = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

načež obdržíme hodnoty

$x = 15$	13	11	9	7	5
$y = 0$	3	6	9	12	15
$z = 5$	4	3	2	1	0

Může tedy student úmysl svůj 6terým způsobem uskutečniti.

Úloha 6.

Dány jsou body m, n, p. Sestrojiti jest rovnoramenný trojúhelník abc, jehož ramena $\overline{ac} = \overline{bc}$ *svírají daný úhel* γ, $\overline{ac}$ *prochází bodem m,* $\overline{bc}$ *bodem n,* $\overline{ab}$ *půleno jest bodem p.*

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Čanský,* stud. VII. třídy r. v Karlíně.)

Rozbor úlohy: Opíšeme-li trojúhelníku mnc kružnici K, jest v ní $\sphericalangle\, mcn = \gamma$ úhlem obvodovým na tětivě $\overline{mn}$; spojnice $\overline{cp}$ půlíc tento úhel obvodový půlí též příslušný oblouk $\widehat{mn}$. Z toho podává se následující sestrojení: Na tětivě $\overline{mn}$ sestrojme známým způsobem kruhový oblouk K_1 objímající obvodový úhel dané velikosti γ; doplňovací oblouk K_2 rozpolme bodem q a veďme spojnici $\overline{pq}$; průsečík její s obloukem K_1 jest hledaný vrchol c. Druhé dva vrcholy jsou v přímce $ab \perp pc$.

Úloha 7.

V trojúhelníku abc vedena jest příčka de || ab. Vésti jest v trojúhelníku cde příčku fg || de, aby bylo

$$A : B = B : C,$$

značí-li

$$A = \triangle\, cfg,\ B = degf,\ C = abed.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Šilháček,* stud. VIII. tř. gymn. v Budějovicích.)

Označme

$$\overline{ca} = a,\ \overline{cd} = b,\ \overline{cf} = x;$$

potom jest

$$\mathrm{A} : (\mathrm{A} + \mathrm{B}) : (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}) = x^2 : a^2 : b^2.$$

Dle úlohy má býti

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{AC},$$

čímž nabýváme úměr

$$\mathrm{A} : (\mathrm{A} + \mathrm{B}) = x^2 : a^2$$
$$\mathrm{A} : (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}) = x^2 : b^2.$$

Z první z těchto úměr vyjádříme

$$\mathrm{B} = \frac{a^2 - x^2}{x^2}\,\mathrm{A},$$

a dosadíce tuto hodnotu do úměry druhé obdržíme

$$1 : \left[1 + \frac{a^2 - x^2}{x^2} + \left(\frac{a^2 - x^2}{x^2}\right)^2\right] = x^2 : b^2$$

čili

$$x^2 : (x^4 - a^2 x^2 + a^4) = 1 : b^2.$$

Z rovnice odtud plynoucí

$$x^4 - (a^2 + b^2)\, x^2 + a^4 = 0$$

ustanovíme

$$x^2 = \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 \pm \sqrt{(b^2 - a^2)(b^2 + 3a^2)}\right].$$

Výraz ten vede k žádanému sestrojení.

Úloha 8.

Obdélník rozděliti jest příčkou rovnoběžnou k úhlopříčce jeho ve dvě části A, B tak, aby bylo

$$A : B = B : (A + B).$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Oldřich Košťál,* stud. VI. tř. real. v Ječné ul. v Praze.)

Rozměry obdélníka buďtež a, b; žádaná příčka odtíná od obdélníka pravoúhlý trojúhelník odvěsen x, y, při čemž

$$x : y = a : b.$$

Dle úlohy má býti

$$\frac{xy}{2} : \left(ab - \frac{xy}{2}\right) = \left(ab - \frac{xy}{2}\right) : ab$$

čili

$$\frac{bx^2}{2a} : \left(ab - \frac{bx^2}{2a}\right) = \left(ab - \frac{bx^2}{2a}\right) : ab.$$

Z této úměry plyne rovnice

$$x^4 - 6a^2 x^2 + 4a^4 = 0,$$

jejíž kořen

$$x = \sqrt{a^2 (3 - \sqrt{5})}$$

snadně sestrojíme uváživše, že

$$u = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$$

jest menším dílem úsečky a rozdělené dle zlatého řezu.

Úloha 9.

V lichoběžníku dány jsou obě úhlopříčky a obě ramena, jest nalézti jeho půdice.

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Mráz*, stud. VII. třídy g. na Smíchově.)

V lichobčžníku $ABCD$ buďtež půdice

$$\overline{AB} = a,\ \overline{CD} = b,$$

ramena

$$\overline{AC} = c,\ \overline{BD} = d$$

a úhlopříčky

$$\overline{AC} = m,\ \overline{BD} = n.$$

Vyjádříme-li rovnost trojúhelníků

$$\triangle ABC = \triangle ABD$$

užitím vzorce Heronova, obdržíme rovnici

$$(a + d + m)(a + d - m)(a - d + m)(- a + d + m)$$
$$= (a + c + n)(a + c - n)(a - c + n)(- a + c + n).$$

Vyvinuvše součiny obdržíme

$$[(a+n)^2 - c^2][c^2 - (a - n)^2] = [(a + m)^2 - d^2][d^2 - (a - m)^2]$$

čili

$$(a^2 - c^2 + n^2)^2 - 4a^2 n^2 = (a^2 - d^2 + m^2)^2 - 4a^2 m^2;$$

odtud ustanovíme

$$a^2 = \frac{(m^2 + n^2 - c^2 - d^2)(m^2 - n^2 + c^2 - d^2)}{2(m^2 - n^2 - c^2 + d^2)}$$

a dle obdoby

$$b^2 = \frac{(m^2 + n^2 - c^2 - d^2)(m^2 - n^2 - c^2 + d^2)}{2(m^2 - n^2 + c^2 - d^2)}.$$

Jiné řešení. (Zaslala sl. *Emilie Veselá*, stud. gymn. na Král. Vinohradech.)

V daném lichoběžníku jest

$$n^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$
$$m^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha;$$

vyloučíce úhel α najdeme vztah

$$(1) \qquad am^2 + bn^2 = ab^2 + a^2b + ac^2 + bc^2.$$

Podobně jest

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \beta$$
$$n^2 = b^2 + d^2 + 2bd \cos \beta,$$

tudíž

$$(2) \qquad bm^2 + an^2 = a^2b + ab^2 + ad^2 + bd^2.$$

Odečtením rovnice (2) od (1) plyne

$$(a - b)(m^2 - n^2) = (a + b)(c^2 - d^2),$$

součet pak obou rovnic poskytuje po zkrácení činitelem $a + b$ rovnici

$$m^2 + n^2 = 2ab + c^2 + d^2.$$

Jest tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{m^2 - n^2 + c^2 - d^2}{m^2 - n^2 - c^2 + d^2},$$

$$ab = \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - c^2 - d^2),$$

odkudž nabudeme týchž výrazů jako svrchu.

Úloha 10.

Sestrojiti jest lichoběžník, dány-li poloměry kružnic opsaných o trojúhelníky, ve které lichoběžník rozděluje se svými úhlopříčkami.

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Matas*, stud. VII. tř. real. v Kutné Hoře.)

Značíme-li strany lichoběžníka a_1, a_2, a_3, a_4, poloměry příslušných kružnic r_1, r_2, r_3, r_4 a úhlel úhlopříček ω, jest

$$\frac{a_1}{2r_1} = \frac{a_2}{2r_2} = \frac{a_3}{2r_3} = \frac{a_4}{2r_4} = \sin \omega,$$

tedy

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = r_1 : r_2 : r_3 : r_4.$$

Strany lichoběžníka jsou tedy úměrny k daným poloměrům, což platí také pro čtyrúhelník obecný.

Lichoběžník jest stranami svými určen; sestrojíme-li tedy lichoběžník ze stran r_1, r_2, r_3, r_4, bude tento podoben žádanému, který pak na základě stejnolehlé polohy snadně sestrojíme.

Uloha 11.

Řešiti jest trojúhelník, dán-li obsah jeho $\Delta = 5{\cdot}5$ a podmínka

$$tg\,\alpha : tg\,\beta : tg\,\gamma = \frac{1}{3} : \frac{1}{7} : \frac{1}{10}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal. p. *Fr. Beláček,* stud. VIII. tř. gymn. v Přerově.)

Úhly trojúhelníka činí zadost relaci

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta \,.\, \operatorname{tg}\gamma.$$

Dle dané podmínky jest

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{7}\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{10}\operatorname{tg}\alpha,$$

pročež

$$\operatorname{tg}\alpha \,.\left(1 + \frac{3}{7} + \frac{3}{10}\right) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{10}\operatorname{tg}^3\alpha;$$

odtud

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{11}{3}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{11}{7}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{11}{10}.$$

Ze vzorce

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

ustanovíme

$$\sin\alpha = \frac{11}{\sqrt{130}}, \quad \sin\beta = \frac{11}{\sqrt{170}}, \quad \sin\gamma = \frac{11}{\sqrt{221}},$$

načež dle vzorce

$$a = \sqrt{\frac{2\Delta \sin\alpha}{\sin\beta \sin\gamma}}$$

obdržíme strany trojúhelníka

$$a = \sqrt{17}, \quad b = \sqrt{13}, \quad c = \sqrt{10}.$$

Úloha 12.

Do krychle o hraně a vepsány jsou dva čtyrstěny pravidelné, *jichž hrany jsou úhlopříčkami stěn krychlových. Který jest obsah tělesa z těchto dvou pronikajících se čtyrstěnů složeného?*

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ant. Lochmann,* stud. VII. tř. gymn. v Mladé Boleslavi.)

Těleso pronikem čtyrstěnů vzniklé skládá se z pravidelného osmistěnu o hraně

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

a z osmi pravidelných čtyrstěnů téže hrany. Obsah osmistěnu jest

$$O = \frac{h^3}{3}\sqrt{2} = \frac{a^3}{6},$$

obsah čtyrstěnu pak

$$T = \frac{h^3}{12}\sqrt{2} = \frac{a^3}{24};$$

pročež obsah tělesa složeného

$$S = O + 8T = \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{2}.$$

Úloha 13.

Rovina protíná kolmý čtvercový jehlan tak, že na pobočných hranách jeho stanoví po řadě úseky a, b, c, d, počítané od temene. Dokažte, že jest

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vajgl,* stud. VIII. třídy gymn. v Brně.)

Budiž ABCD čtvercová základna jehlanu kolmého, V jeho témě, A′B′C′D′ průsek rovinou k základně nakloněnou. Dle úlohy jest

$$VA' = a, \ VB' = b, \ VC' = c, \ VD' = d.$$

Promítněme pobočné hrany jehlanu do základny; i bude střed její O průmětem vrcholu V, body pak A′, B′, C′, D′ nechť mají průměty A_1, B_1, C_1, D_1.

Označíme-li prosté hodnoty

$$OA_1 = \alpha,\ OB_1 = \beta,\ OC_1 = \gamma,\ OD_1 = \delta,$$

jest

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{\delta}{d} = \cos\varphi,$$

kdež φ značí odchylku pobočných hran od základny. Zvolme AC, BD osami souřadnými a položme úhlopříčky

$$OA = OB = OC = OD = u.$$

Čtverec ABCD a čtyrúhelníky A′B′C′D′, $A_1B_1C_1D_1$ jsou navzájem homologické; osou jich homologie jest přímka O, na které se protínají stejnolehlé strany, na př. AB s A_1B_1, BC s B_1C_1 atd. Hledejme rovnici této osy.

Strana AB má rovnici

$$x + y = u,$$

strana A_1B_1

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1;$$

průsečík obou, bod M, má souřadnice

$$x_1 = \frac{\alpha(u - \beta)}{\alpha - \beta},\quad y_1 = \frac{\beta(\alpha - u)}{\alpha - \beta},$$

kteréž z rovnic stran těch vyplývají.

Podobně z rovnic

$$y - x = u,\quad \frac{y}{\beta} - \frac{x}{\gamma} = 1$$

příslušných stejnolehlým stranám BC a B_1C_1 vypočítáme souřadnice jich průsečíku N

$$x_2 = \frac{\gamma(u - \beta)}{\beta - \gamma},\quad y_2 = \frac{\beta(u - \gamma)}{\beta - \gamma}.$$

Body M, N leží na ose O; jest tedy rovnice její

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dosadíce hodnoty svrchu nalezené, upravíme rovnici osy O na podobu

$$\beta(\alpha - \gamma)x + (\alpha\beta + \beta\gamma - 2\alpha\gamma)y - \beta(\alpha u + \gamma u - 2\alpha\gamma) = 0.$$

Na této ose protínají se též strany AD, A_1D_1 v bodě určitém P. Jelikož jest rovnice strany AD

$$y = x - u,$$

ustanovíme z obou posledních rovnic souřadnice bodu P; bude pak

$$x_3 = \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma - 2\alpha\gamma)u - \alpha\beta\gamma}{\alpha(\beta - \gamma)},$$

$$y_3 = \frac{\beta\gamma(u - \alpha)}{\alpha(\beta - \gamma)}.$$

Rovnice strany A_1D_1 k témuž bodu směřující jest pak

$$y = \frac{y_3}{x_3 - \alpha}(x - \alpha)$$

čili

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\delta} = 1.$$

Jest tedy

$$\delta = \frac{\alpha y_3}{x_3 - \alpha};$$

hledíce k hodnotám svrchu ustanoveným obdržíme

$$x_3 - \alpha = \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma)(u - \alpha)}{\alpha(\beta - \gamma)},$$

tudíž

$$\delta = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma}.$$

Této rovnici lze dáti tvar

$$(\alpha + \gamma)\beta\delta = (\beta + \delta)\alpha\gamma$$

čili

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\delta}.$$

Jelikož pak hodnoty úseků a, b, c, d od α, β, γ, δ jen stálým činitelem cos φ se liší, jest také

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d};$$

což bylo dokázati.

Příklad:

$$a=12,\ b=10,\ c=15,\ d=20.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Josef Honzák,* stud. V. tř. g. ve Vys. Mýtě.)

Rovina čtyrúhelníka A′B′C′D′ protínejž výšku jehlanu v bodě O′ a budiž

$$\overline{VO'}=v.$$

Bod O′ jest průsečíkem úhlopříček A′C′, B′D′ a jest

$$\sphericalangle A'VO'=\sphericalangle B'VO'=\sphericalangle C'VO'=\sphericalangle D'VO'=\omega.$$

Mimo to jest

$$\triangle A'C'V=\triangle A'VO'+\triangle C'VO'$$

čili

$$ac\sin 2\omega=av\sin\omega+cv\sin w,$$

tudíž

$$\frac{ac}{a+c}=\frac{v}{2\cos\omega}.$$

Z těchže důvodů jest

$$\frac{bd}{b+d}=\frac{v}{2\cos\omega},$$

pročež

$$\frac{ac}{a+c}=\frac{bd}{b+d}$$

čili

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

Poznámka redakce. Z tohoto vyvození zřejmo, že věta má platnost též pro jehlan kolmý se základnou obdélníkovou. Vedeme-li bodem O' rovinu rovnoběžnou k základně, odtíná rovina ta na hranách pobočných — od vrcholu V počítajíc — úseky u, pro které jest

$$u = \frac{v}{\cos \omega} = \frac{2ac}{a+c} = \frac{2bd}{b+d};$$

jest tedy u harmonickým průměrem úseků a, c, jakož i úseků b, d.

Úloha 14.

V pravidelném dutém čtyrstěnu nalézá se voda. Postavíme-li čtyrstěn stěnou spodní na rovinu vodorovnou, má voda ve čtyrstěnu výšku $10\sqrt{6}$; postavíme-li čtyrstěn na roh tak, že protější stěna jest vodorovná, stojí voda ve výšce $20\sqrt{6}$. Jakou má čtyrstěn hranu a kolik jest v něm vody?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Jiří Havelka,* stud. VII. třídy real. v Pardubicích.)

K řešení úlohy mějme na mysli, že čtyrstěn o hraně h má výšku

$$v = \frac{h}{3}\sqrt{6}$$

a obsah

$$T = \frac{h^3}{12}\sqrt{2}.$$

Stojí-li čtyrstěn rohem dolů, tvoří voda čtyrstěn o hraně a a výšce

$$\frac{a}{3}\sqrt{6} = 20\sqrt{6};$$

jest tedy

$$a = 60$$

a množství vody

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2} = 18000\sqrt{2}.$$

Spočívá-li čtyrstěn na vodorovné základně, a je-li hrana jeho x, hrana prázdného čtyrstěnu y, jest poměr hran roven poměru výšek, tudíž

$$x : y = \frac{x}{3}\sqrt{6} : \left(\frac{x}{3}\sqrt{6} - 10\sqrt{6}\right).$$

Odtud po náležitém zjednodušení plyne

$$x - y = 30.$$

Mimo to jest

$$\frac{x^3}{12}\sqrt{2} - \frac{y^3}{12}\sqrt{2} = 18000\sqrt{2}$$

čili

$$x^3 - y^3 = 216000.$$

Z rovnic těchto obdržíme známými obraty

$$x^3 - y^3 - 3xy(x - y) = 27000,$$
$$216000 - 90xy = 27000,$$
$$xy = 2100,$$
$$x^2 - 30x - 2100 = 0,$$

z čehož hrana čtyrstěnu celého

$$x = 15 + \sqrt{2325} = 5(3 + \sqrt{93}) = 63{\cdot}22\ldots$$

a hrana čtyrstěnu prázdného

$$y = -(15 - \sqrt{2325}) = -5(3 - \sqrt{93}) = 33{\cdot}22\ldots.$$

Úloha 15.

Kouli o poloměru r opsán jest kužel, který se dotýká koule nejen pláštěm, nýbrž i oběma základnami. Je-li poloměr větší základny 2r, jak velký jest povrch a obsah kužele?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Ant. Pokorný,* stud. VI. třídy real. v Kutné Hoře.)

Označme rozměry kužele takto: poloměr menší základny r_1, strana kužele s, výška v; jest pak

$$s = 2r + r_1, \quad v = 2r.$$

Jelikož jest

$$s^2 = (2r - r_1)^2 + v^2$$

čili

$$(2r + r_1)^2 = (2r - r_1)^2 + 4r^2,$$

ustanovíme odtud

$$r_1 = \frac{r}{2}.$$

Potom jest povrch komolého kužele

$$P = 4\pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi (2r + r_1) s$$

$$= 4\pi r^2 + \pi \frac{r^2}{4} + \pi \frac{25r^2}{4} = \frac{21}{2} \pi r^2,$$

obsah jeho

$$K = \frac{2}{3} \pi r \left(4r^2 + r^2 + \frac{r^2}{4}\right) = \frac{7}{2} \pi r^3 = \frac{1}{3} Pr.$$

Úloha 16.

Dán jest čtverec abcd souřadnicemi vrcholů

$$a\,(8, 0),\; b\,(0, 8),\; c\,(-8, 0),\; d\,(0, 8)$$

a homologický s ním čtyrúhelník $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$, *jehož tři vrcholy jsou:*

$$a_1\,(6, 0),\; b_1\,(0, 4),\; c_1\,(-3, 0).$$

Ustanoviti jest souřadnice čtvrtého vrcholu d_1.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ignát Velísek,* bohoslovec v Olomouci.)

Středem homologie (kollineace) obou čtyrúhelníků jest počátek soustavy, ve kterém se protínají spojnice $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$ a tedy i $\overline{dd_1}$. Proto pro bod d bude $x = 0$ a zbývá stanoviti pouze y. K tomu cíli hledejme nejprve osu obou čtyrúhelníků; na této protínají se strany

$$\overline{ab} \text{ s } \overline{a_1b_1} \text{ v bodě } m,\quad \overline{bc} \text{ s } \overline{b_1c_1} \text{ v bodě } n.$$

Rovnice těchto stran jsou:

$$\overline{ab} \equiv x + y - 8 = 0$$
$$\overline{a_1 b_1} \equiv 2x + 3y - 12 = 0$$
$$\overline{bc} \equiv y - x = 0$$
$$\overline{b_1 c_1} \equiv 4x - 3y + 12 = 0 .$$

Z rovnic těch ustanovíme

$$x_m = 12 , \quad y_m = -4$$
$$x_n = 12 , \quad y_n = 20 .$$

Jest proto osa $O \equiv \overline{mn}$ dána rovnicí

$$O \equiv x - 12 = 0 .$$

Na této protínají se též přímky $\overline{ad}$, $\overline{a_1 d_1}$ v bodě určitém p. Jelikož jest

$$\overline{ad} \equiv x - y - 8 = 0 ,$$

má bod p souřadnice

$$x_p = 12 , \quad y_p = 4$$

a rovnice strany $\overline{a_1 d_1}$ jest pak

$$\overline{a_1 d_1} \equiv \overline{a_1 p} \equiv 2x - 3y - 12 = 0.$$

Jelikož jest $x_{d_1} = 0$, ustanovíme z této rovnice

$$y_{d_1} = -4 .$$

Vrcholy b_1, d_1 leží souměrně dle osy $\overline{a_1 c_1}$; jest tedy čtyrúhelník $a_1 b_1 c_1 d_1$ souměrný různoběžník čili deltoid.

Úloha 17.

Stanoviti jest na ellipse bod, k němuž příslušná tečna má od středu vzdálenost rovnou střední měřické úměrné obou poloos ellipsy. Kterak dělí se dotyčným bodem část této tečny obsažená mezi osami? Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Ogoun,* stud. VIII. tř. gymn. v Kroměříži.)

Dána-li ellipsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

má tečna v bodě (x_1, y_1) rovnici

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2,$$

a vzdálenost tečny té od středu ellipsy jest

$$v = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}.$$

Podmínka úlohy žádá, aby bylo

$$v = \sqrt{ab}$$

čili

$$b^4x_1^2 + a^4y_1^2 = a^3b^3.$$

Připojíme-li k této podmínce rovnici

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

ustanovíme souřadnice dotyčného bodu

$$x_1 = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad y_1 = b\sqrt{\frac{b}{a+b}};$$

rovnice příslušné tečny jest pak

$$x\sqrt{b} + y\sqrt{a} = \sqrt{ab(a+b)}.$$

Úseky této tečny na osách jsou

$$a_1 = \sqrt{a(a+b)}, \quad b_1 = \sqrt{b(a+b)}.$$

Nazveme-li t_1 (t_2) část tečny omezenou bodem dotyčným a osou X (Y), jest

$$t_1 = \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + y_1^2} = b,$$
$$t_2 = \sqrt{(b_1 - y_1)^2 + x_1^2} = a.$$

Úloha 18.

Do ellipsy vepsán jest obdélník, jehož strany jsou v poměru os ellipsy, s nimiž jsou rovnoběžny. Dokázati jest, že úseče elliptické přilehlé ku stranám tohoto obdélníka jsou stejně velké.

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Gustav Graf,* stud. VII. třídy real. v Hradci Králové.)

Do ellipsy, jejíž rovnice jest

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

vepsán budiž obdélník rozměrů $2x$, $2y$ tak, že

$$x : y = a : b.$$

Z obou rovnic těchto vypočítáme

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad y = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Sestrojíme-li nad hlavní osou $2a$ kružnici a vytkneme-li na ní bod, jehož souřadnice jsou

$$x_1 = x, \quad y_1 = \sqrt{a^2 - x_1^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

jest patrně

$$y_1 = x_1.$$

Má tedy úseč kruhová přilehající ku $2y_1$ obsah

$$U_1 = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}(\pi - 2);$$

úseč elliptická, přilehající ku straně $2y$ má pak obsah

$$U = \frac{b}{a} U_1 = \frac{ab}{4}(\pi - 2).$$

Uvažujeme-li elliptickou úseč U' při straně $2x$, jest patrně

$$2U + 2U' + 4xy = \pi ab$$

čili

$$\frac{ab}{2}(\pi - 2) + 2U' + 2ab = \pi ab,$$

pročež

$$U' = \frac{ab}{4}(\pi - 2)$$

a tedy, jak tvrzeno,

$$U = U'.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Karel Pilz*, studující VII. třídy realky v Karlíně.)

Pokládáme-li ellipsu danou za orthogonalný průmět kruhu, jest rovina její R od průmětny P odchýlena o úhel α, při čemž $\cos \alpha = b/a$. Každý obrazec roviny R promítá se do roviny P tak, že plocha průmětu rovná se ploše promítnuté násobené $\cos \alpha$. Jsou-li tedy dva útvary v rovině R obsahem stejné, mají též průměty jich stejný obsah. Daný obdélník jest průmětem čtverce do kruhu vepsaného, úseče kruhové přilehlé ku stranám čtverce jsou stejné, proto i příslušné úseče elliptické jakožto jich průměty.

Úloha 19.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt{x+\sqrt{2}} \, . \, \sqrt[3]{x+\sqrt{2}} = \sqrt[6]{x^5-\sqrt{2}} \, .$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Nejdl*, stud. VIII. tř. gymn. v Klatovech.)

Zmocníme-li obě strany rovnice 6ti, obdržíme

$$(x+\sqrt{2})^5 = x^5 - \sqrt{2} \, ;$$

vykonáme-li zmocnění dvojčlenu 5ti a upravíme rovnici, nabude tvaru

$$x^4 + 2x^3\sqrt{2} + 4x + 2x\sqrt{2} + 1 = 0 \, .$$

Reciprokou tuto rovnici řešíme substitucí

$$x + \frac{1}{x} = y \, ,$$

kdež

$$y^2 + 2y\sqrt{2} + 2 = 0 \, ,$$

tedy

$$y = -\sqrt{2} \, .$$

Tím pak dospějeme k rovnici

$$x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

Úloha 20.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x^2 + y(x+1) = 67$$
$$y^2 + x(y+1) = 89.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Brunclík*, stud. VI. tř. real. na Král. Vinohradech.)

Sečteme-li obě rovnice dané, obdržíme

$$(x+y)^2 + (x+y) = 156,$$

z čehož

$$x + y = \frac{-1 \pm 25}{2}.$$

a) Je-li $x + y = 12$, dospějeme vyloučením y z rovnice této a z první z rovnic daných ku rovnici

$$x^2 + (12 - x)(x + 1) - 67 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 7.$$

b) Položíme-li

$$x + y = -13,$$

přijdeme touže cestou k rovnici

$$x^2 - (x + 13)(x + 1) - 67 = 0,$$

dle které

$$x_2 = -\frac{40}{7}, \quad y_2 = -\frac{51}{7}.$$

Jiné řešení.

Z první rovnice dané vyjádříme

$$y = \frac{67 - x^2}{x + 1}$$

a dosadíme do druhé; nabudeme tím rovnice

$$(67 - x^2)^2 + x(x + 1)(68 + x - x^2) - 89(x + 1)^2 = 0$$

čili

$$7x^2 + 5x - 200 = 0.$$

Odtud vyplývají kořeny svrchu nalezené.

Úloha 21.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$(x + y - a)^2 - (x - y + a)(x + y) = \frac{3}{4} a^2$$

$$(x - y + a)^2 - (x + y - a)(x - y) = \frac{7}{9} a^2.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Brix,* stud. VIII. tř. gymn. v Brně.)

Položme

$$x + y - a = u, \quad x - y + a = v;$$

tím přechází soustava daná v rovnice

$$u^2 - v(u + a) = \frac{3}{4} a^2$$

$$v^2 - u(v - a) = \frac{7}{9} a^2.$$

Sečtením jich nabudeme

$$(u - v)^2 + a(u - v) = \frac{55}{36} a^2,$$

z čehož

$$u - v = \frac{a}{2}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{55}{9}}\right] = \frac{a}{2}\left(-1 \pm \frac{8}{3}\right).$$

a) Budiž

$$u - v = \frac{5}{6} a;$$

vyloučíce v přicházíme k rovnici

$$u^2 - (u - \frac{5}{6} a)(u + a) = \frac{3}{4} a^2$$

čili

$$2au - a^2 = 0.$$

V případě tom jest

$$u_1 = \frac{a}{2}, \quad v_1 = -\frac{a}{3}$$

$$x_1 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{a}{12}, \quad y_1 = a + \frac{u_1 - v_1}{2} = \frac{17}{12} a.$$

b) Jest-li $$u - v = -\frac{11}{6} a,$$

jest

$$u^2 - (u + \frac{11}{6} a)(u + a) = \frac{3}{4} a^2$$

čili

$$34au + 31a^2 = 0;$$

odtud vyplývá

$$u_2 = -\frac{31}{34} a, \quad v_2 = \frac{47}{51} a,$$

$$x_2 = \frac{u_2 + v_2}{2} = \frac{a}{204}, \quad y_2 = a + \frac{u_2 - v_2}{2} = \frac{a}{12}.$$

Úloha 22.

Dokažte, že rovnice o realných součinitelích

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$(mx + n)^2 + mbx + ac + bn = 0$$

mají obě současně buď kořeny realné aneb obě kořeny imaginárné.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Drastich,* stud. VIII. tř. g. v Opavě.)

Jakost kořenů rovnice kvadratické

$$ax^2 + bx + c = 0$$

závisí od diskriminantu

$$D = b^2 - 4ac;$$

kořeny tyto jsou totiž buď realné různé, realné stejné aneb imaginárně sdružené dle toho, je-li $D > 0$, $D = 0$ aneb $D < 0$. Druhá rovnice daná, kterou též v podobě

$$m^2x^2 + m(2n + b)x + ac + bn + n^2 = 0$$

psáti lze, má diskriminant

$$\begin{aligned} D' &= m^2[(2n + b)^2 - 4(ac + bn + n^2)] \\ &= m^2(b^2 - 4ac) = m^2 D. \end{aligned}$$

Jest tedy současně D' s D buď kladné, buď rovno nulle aneb záporné; tudíž jakost kořenů v obou rovnicích stejná.

Úloha 23.

Dvoje věžní hodiny bijí zároveň a údery jejich splývají tak, že slyšíme celkem 14 rázů. Víme-li, 1) že sluchu našemu již v jeden splývají ty dva rázy, jež nedělí mezera delší jedné vteřiny, 2) že hodiny první předbíhají druhé o 3 vteřiny a 3) že údery hodin prvních následují v mezerách 5tivteřinových, údery hodin druhých v mezerách 4vteřinových — jest stanoviti, kolikátou hodinu orloje ony současně odbíjely.

Technik *Vladimír Ibl.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Bystřický,* stud. VII. tř. r. v Plzni.)

Údery obou hodin byly následující:

1.	úder	:	hodiny	I. bijí 1,
2.	„	:	„	II. po 3 vteřinách bijí 1,
3.	„	:	„	I. „ 5 „ „ 2,
4.	„	:	„	II. „ 7 „ „ 2,
5.	„	:	„	I. „ 10 a II. po 11 vteřinách bijí 3,
6.	„	:	„	I. i II. po 15 vteřinách bijí 4,
7.	„	:	„	II. po 19 a I. po 20 vteřinách bijí 5,

8\. úder : hodiny II. po 23 vteřinách bijí 6,
9\. „ : „ I. „ 25 „ „ 6,
10\. „ : „ II. „ 27 „ „ 7,
11\. „ : „ I. „ 30 „ „ 7 a II. po 31 vteřinách bijí 8,
12\. úder : hodiny I. po 35 vteřinách bijí 8 a II. současně 9,
13\. „ : „ II. „ 39 „ „ 10 a
„ I. „ 40 „ „ 9,
14\. „ : „ I. „ 45 „ „ 10.

Bylo tedy 10 hodin.

Postup úderů na obou hodinách lze přehledně znázorniti na dvou přímých řadách.

Úloha 24.

Která jest hodnota výrazu

$$\frac{a}{3}\cdot\frac{u^2+uv-2v^2}{u^2-v^2}+\frac{a}{5}\cdot\frac{u^3+u^2v-2v^3}{u^3-v^3},$$

je-li $u=v$?

Technik *Vladimír Ibl.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Drbal,* stud. VII. tř. gymn. v Olomouci.)

První člen daného výrazu jest

$$V_1=\frac{a}{3}\cdot\frac{(u+2v)(u-v)}{(u+v)(u-v)}=\frac{a}{3}\cdot\frac{u+2v}{u+v},$$

druhý pak

$$V_2=\frac{a}{5}\cdot\frac{(u^2+2uv+2v^2)(u-v)}{(u^2+uv+v^2)(u-v)}=\frac{a}{5}\cdot\frac{u^2+2uv+2v^2}{u^2+uv+v^2};$$

při $u=v$ jest

$$V_1=\frac{a}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{a}{2},\quad V_2=\frac{a}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{a}{3},$$

tudíž výraz celý

$$V=V_1+V_2=\frac{5}{6}a.$$

Úloha 25.

Jsou-li a, b čísla racionálná, jest odmocninu

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}}$$

rozložiti ve dvojčlen

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} \pm \sqrt{y-\sqrt{y}}\,,$$

kdež x a y jsou rovněž čísly racionálnými. Které jsou potřebné k tomu podmínky?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Emil Schoenbaum,* stud. VII. tř. g. v Benešově.)

Z rovnice

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} \pm \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}}$$

plyne zdvojmocněním

$$2x \pm 2\sqrt{x^2-y} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

a zdvojmocněním opětným

$$8x^2 - 4y \pm 8x\sqrt{x^2-y} = a \pm \sqrt{b}.$$

Při racionálných hodnotách a, b, x, y rozpadá se tato rovnice ve dvě:

$$8x^2 - 4y = a$$
$$64x^4 - 64x^2y = b\,.$$

Z rovnic těchto vyloučením neznámé y obdržíme

$$64x^4 - 16x^2(8x^2 - a) = b$$

čili

$$64x^4 - 16ax^2 + b = 0,$$

odtud pak

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a \pm c}{2}}, \quad y = \pm c\,,$$

kdež pro krátkost položeno

$$c = \sqrt{a^2 - b}\,.$$

Zádaný rozklad jest tedy možným, je-li c a zároveň $\sqrt{\frac{a \pm c}{2}}$ hodnota racionálná.

Příklad. $V = \sqrt[4]{11 + 6\sqrt{2}};$

$$a = 11,\ b = 72,\ c = 7;$$

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11+7}{2}} = \pm \frac{3}{2},\ y = + \frac{7}{4}.$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}}$$

$$V_2 = \sqrt{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}} - \sqrt{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}}.$$

Při $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11-7}{2}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2},\quad y = -\frac{7}{4}$

obdržíme

$$V_3 = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{7}}$$

$$V_4 = \sqrt{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{7}} - \sqrt{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{7}}.$$

Úloha 26.

Jest dokázati:

Je-li s součin dvou po sobě následujících čísel celých, jest dvojčlen

$$s^2 + 10s$$

dělitelen číslem 24.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Veselý,* stud. VII. tř. real. v Pardubicích.)

Budiž

$$s = n(n-1);$$

potom jest

$$\frac{n(n-1)}{2},\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{6},\quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

počet amb, teren a kvateren z n prvků (bez opakování). Součet těchto výrazů jest

$$S = \frac{n(n-1)}{24}[12 + 4n - 8 + n^2 - 5n + 6]$$
$$= \frac{n(n-1)}{24}[n^2 - n + 10]$$

čili

$$S = \frac{1}{24}(s^2 + 10s);$$

pročež jest $s^2 + 10s$ dělitelno 24ti.

Úloha 27.

Kolika jest zapotřebí prvků, aby počet amb s trojnásobným počtem teren a s dvojnásobným počtem kvateren (bez opakování prvků) činil dohromady 1210?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Červený,* stud. VIII. tř. gymn. v Králové Dvoře.)

Je-li n počet prvků, jest

$$\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4}$$
$$= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$$
$$= \frac{n(n-1)}{12}[6 + 6n - 12 + n^2 - 5n + 6] = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Dle úlohy jest

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} = 1210$$

čili

$$n^4 - n^2 - 14520 = 0.$$

Odtud vypočítáme

$$n^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{58081}) = \frac{1}{2}(1 \pm 241),$$

z čehož pro hledaný počet prvků plyne

$$n = 11.$$

Úloha 28.

Dány jsou první tři členy určité řady

$$a_1 = 1,\ a_2 = 15,\ a_3 = 65;$$

člen obecný jest tvaru

$$a_n = (2n - 1)(An^2 + Bn + C).$$

Vypočítejte hodnoty součinitelů A, B, C a ustanovte součet prvních n členů této řady.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Viktor Tereba,* stud. VI. tř. gymn. ve Val. Meziříčí.)

Z výrazu pro obecný člen obdržíme při $n = 1, 2, 3$ rovnice

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ 4A + 2B + C &= 5 \\ 9A + 3B + C &= 13, \end{aligned}$$

z nichž vypočítáme

$$A = 2, \quad B = -2, \quad C = 1.$$

Jest tedy

$$a_n = (2n - 1)(2n^2 - 2n + 1) = 4n^3 - 6n^2 - 1,$$

pročež řada jest arithmetickou řadou stupně třetího. Řada tato jest

$$1, \quad 15, \quad 65, \quad 175, \quad 369, \ldots$$

a její řady rozdílové

$$\begin{array}{c} 14, \quad 50, \quad 110, \quad 194, \ldots \\ 36, \quad 60, \quad 84, \ldots \\ 24, \quad 24, \ldots . \end{array}$$

Tudíž jest*)

*) Viz: Hoza, Algebra pro vyšší realky, str. 234.

$$S_n = \binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4}$$

$$= n + 7n(n-1) + 6n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)$$

čili

$$S_n = n^4.$$

Úloha 29.

Jak veliký jest součet n členů řady

$$1.2 - 2.3 + 3.4 - 4.5 + 5.6 - 6.7 + \ldots ?$$

Prof. *Adolf Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Ladislav Pachl,* stud. VIII. tř. g. na Smíchově.)

Daná řada jest

$$S = 1.2 - 2.3 + 3.4 - 4.5 - 5.6 + 6.7 - \ldots$$

Vytkneme-li z každých dvou po sobě jdoucích členů společného činitele, nabývá řada tvaru

$$S = 2(1-3) + 4(3-5) + 6(5-7) + \ldots$$
$$= -2(2+4+6+\ldots).$$

Dle známého vzorce pro součet arithmetické posloupnosti ustanovíme

$$S = -\frac{n}{2}(n+2).$$

Úloha 30.

Stanoviti jest součet n členů řady

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \ldots.$$

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Šťáva,* stud. VIII. tř. gymn. v Třebíči.)

Danou řadu lze předpokládati v podobě

$$S=\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+\frac{4-3}{3.4}+\dots$$

čili

$$S=\left(\frac{2}{1.2}+\frac{3}{2.3}+\frac{4}{3.4}+\dots\right)$$

$$-\left(\frac{1}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{3}{3.4}+\dots\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n+1}\right),$$

jest tedy

$$S=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Albini Fedor, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. 6., 11. až 15., 19. až 22., 23., 24., 26., 28.

Bačina Jàn, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 5., 8., 9., 12., 14., 15., 16., 19. až 22., 24. až 30.

Bartoň Václav, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 5., 8., 12., 19. až 22., 24.

Beláček Frant., stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 2., 4., 5., 6., 8., 11., 14., 15., 17., 19. až 24., 26. až 29.

Berounský Jan, stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 2., 5.

Bicek Karel, stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 2. až 5., 19., 20., 22., 24.

Božek Karel, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 2. až 9., 11., 13., 14., 15., 17. až 22., 24., 25., 27., 28., 29.

Brablec Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1 až 30.

Brix Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 30.

Brunclík Frant., stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 2., 5., 6., 7., 19., 20., 21.

Brzobohatý Břetislav, stud. V. tř. r. v Lipníku, úl. 2., 5. až 8., 11., 14., 15., 16, 18. až 26.

Bystřický František, stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 2. až 6., 8., 9., 11., 12., 14. až 17., 19., 20., 21., 23., 24., 27. až 30.

Čanský Václav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 2. až 24., 26. až 30.

Červený F., stud. VIII. tř. g. ve Dvoře Králové, úl. 2., 5., 11., 12., 15., 19. až 22., 24., 27.

Čupr Karel, stud. IV. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1. až 15., 19. až 30.

Dědouch Lud., stud. VII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 5., 6., 9., 14., 20., 21., 26.

Dolák Alois, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 2., 10., 15., 20., 21., 29.

Doležil Edmund, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 2. až 9., 11., 12., 14., 15., 19. až 24., 28., 29.

Drastich Frant., stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 5., 8., 11., 12., 14., 15., 19. až 24., 26., 28., 29., 30.

Drbal Karel, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 30.

Dundr Josef, stud. VII. tř. r. v Rakovníce, úl. 2., 3., 5., 6., 11., 12., 14., 15., 16., 19., 20., 21., 22., 27.

Durda Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 2., 4., 5., 8., 11., 12., 14. až 17., 19. až 22., 24., 27., 28.

Dvořák Bohumil, stud. VI. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 2., 5., 6., 8., 9., 11., 12., 14., 15., 19. až 24., 26., 29., 30.

Fischer Vladislav, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 2., 5., 8., 11., 12., 14., 15., 19., 20., 21., 22., 29.

Fojtl Arnošt, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 2., 5., 12., 15., 19., 20., 21., 27.

Franěk Frant., stud. V. tř. r. v Pardubicích, úl. 5., 24., 25.

Frischmann Rudolf, stud. VII. tř. g. v Benešově, úl. 2., 5., 8., 15., 19. až 22., 24., 29.

Graf Gustav, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 6., 8., 9., 11., 12., 14., 15., 16., 18. až 21., 24., 27., 28., 29.

Granát Frant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 3., 4., 5., 8., 11., 12., 14., 15., 16. až 22., 24., 26. až 30.

Grössl Václav, stud. V. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 2., 5., 8., 12., 14., 15., 19. až 22., 24.

Habrich Josef, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 2. až 9., 11. až 22., 24., 25., 27. až 30.

Hájek Emanuel, stud. VIII. tř. g. v Čes. Budějovicích, úl. 2. až 8., 10. až 24., 26. až 30.

Hanus Rudolf, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 15., 19. až 24., 26., 28., 29., 30.

Hanuš Josef, stud. VII. tř. g. v Litomyšli, úl. 2., 5., 11., 19., 20., 21., 24.

Hanzlík Inocenc, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli, úl. 1. až 30.

Havelka Jiří, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 2., 5., 8., 11., 14., 15., 19., 20., 21., 24.

Hodan Bohumír, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 2. až 13., 15. až 21., 24., 26. až 29.

Honzák Josef, stud. V. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 1. až 30.

Hovorka Stanislav, stud. V. tř. r. v Praze-II, úl. 5., 8., 21., 22.

Hrubý T., soukromník v Jindř. Hradci, úl. 2., 20., 21., 24.

Hulla Karel, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 30.

Chadim Josef, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 2., 4., 5., 8., 11., 12., 14., 15., 16., 19. až 22., 24., 26. až 29.

Ježek Josef, stud. VIII. tř. g. ve Dvoře Králové n. L., úl. 19. až 22., 24., 26., 27.

Jirout Josef, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, ul. 5., 11., 19., 20., 21., 24.

Kálal Josef, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 2. až 5., 7., 8., 11. až 15., 19. až 24., 26. až 29.

Keclík Tom., stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 2., 3., 5., 7., 8., 9., 11., 12., 13., 15., 19. až 22., 24.

Kleveta Frant., stud. VI. tř. g. v Brně, úloha 5., 12., 15., 24.

Kolář Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 2., 5., 8., 11., 15., 16., 19. až 22., 24., 27.

Kopecký Jindř., stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 2. až 5., 8., 12., 14., 15., 16., 19., 20., 22., 24., 27., 29.

Kopeček Ondřej, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 6., 8., 11., 12., 14., 15., 19. až 23., 26., 29.

Körner Ignác, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 5., 15., 17., 20., 24.

Kosek Karel, stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 2., 5., 12., 14., 15., 17., 19., 20., 24., 27.

Košťál Oldřich, stud. VI. tř. r. v Praze, Ječná ul., úl. 2. až 26., 29., 30.

Králík Kliment, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 2., 5., 11., 12., 14., 15.

Kraus Jos. Václav, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 5., 12., 15.

Kretší Jindř., stud. VII. tř. r. v Praze, Ječná ul., úl. 15., 19., 20., 21., 24.

Kříček Anton., stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 2., 5., 6., 10., 11., 12., 14., 15., 19. až 24., 29., 30.

Kulhánek Sylvestr, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 2., 5. až 12., 14., 15., 19. až 22., 24., 29., 30.

Laštovka Zdeněk, stud. VI. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 2., 5., 9., 11., 12., 14., 15., 19. až 22., 24., 26.

Lebeda Karel, učitel v Heřmani, úl. 2., 3., 5. až 24., 26. až 30.

Liška František, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 9., 11. až 22., 24., 25., 27. až 30.

Liška Matěj, stud. VIII. tř. g. v Plzni, úl. 2., 5., 7., 8., 14., 15., 19., 20., 24.

Lochmann Ant., stud. VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, úl. 2., 8., 9., 12., 14., 19., 20., 21., 24., 29.

Matas Bohumil, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 2., 5. až 30.

Matoušek Maxmilián, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 2., 5. až 9., 11., 20., 21., 24.

Mikyna Josef, stud. VI. tř. g. ve Dvoře Králové, úl. 2., 5. až 8., 12., 15., 21. až 24., 26., 29., 30.

Mráz Josef, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 1., 2., 5., 7., 8., 9., 11., 12., 14., 15., 16., 19. až 22., 24., 25., 27., 28., 29.

Navrátil Ant., stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 6., 11., 12., 14., 15., 19. až 24.

Navrátil Frant., stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 15., 16., 20., 29.

Nejdl Karel, stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 5., 6., 11., 13. až 17., 19., 20., 21., 24., 27., 29.

Noha Josef, stud. V. tř. r. v Hradci Králové, úl. 2., 3., 5., 11., 15., 19., 20., 24.

Nováček Frant., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 12., 14. až 30.

Novák Josef, stud. V. tř. g. v Jičíně, úl. 5., 6., 14., 15., 24.

Ogoun Frant., stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 2., 5., 11., 14., 15., 17. až 22., 24., 27.

Pachl Ladislav, stud. VIII. tř. g. na Smíchově, úl. 1. až 23., 27. až 30.

Pauzar Filip, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 2., 5., 14., 15., 19., 20., 21., 24., 26.

Petráň Karel, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 5., 11., 12., 19., 20., 21.

Pilz Karel,. stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 2. až 5., 8., 12., 18. až 21.

Pokorný Ant., stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 2., 5., 6., 9., 11., 12., 15., 19.

Procházka Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 2. až 6., 11., 14., 15., 19., 20., 21., 24., 27., 29.

Prokeš Vojtěch, stud. VIII. tř. g. na Smíchově, úl. 1. až 30.

Půda Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 2., 3., 5., 7., 8., 9., 11., 12., 14. až 24., 26. až 30.

Ratkovský Augustin, stud. VIII. tř. g. ve Slaném, úl. 2. až 5., 7., 8., 9., 10., 11., 12., 14. až 22., 24., 26., 27., 28., 29.

Richter Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 2., 4., 5., 8., 11., 14., 15., 19. až 22., 24., 26.

Rudolecký Josef, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 2. až 9., 11., 12., 14., 15., 19. až 24., 27., 28., 29.

Rychlík Karel, stud. v Praze, úl. 2., 5., 8., 11., 12., 13., 15., 18. až 22., 27., 28., 29.

Ryšavý Josef, stud. VI. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 2., 5., 6., 8., 9., 11., 12., 14., 15., 19. až 24., 26., 28., 29., 30.

Seifert Ladislav, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 2. až 25., 27. až 30.

Setunský Karel, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 2., 11., 19.

Schoenbaum Emil, stud. VII. tř. g. v Benešově, úl. 1. až 30.

Schüller Jan, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 1. až 30.

Skřivánek Ladislav, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 2., 5., 11., 19. až 22., 24., 29.

Smrček Eugen, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 2. až 5., 7., 8., 9., 11. až 22., 24., 25., 27., 28., 29.

Steinbach Arnošt, stud. VI. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 5., 12., 19., 20., 21.

Studnička Josef, stud. VI. tř. r. v Rakovníce, úl. 2., 5., 6., 10., 11., 12., 14., 19. až 23., 29.

Sukdol Václav, stud. VII. tř. g. v Č. Budějovicích, úl. 2., 3., 4., 5., 11., 12., 14., 15., 16., 17., 19. až 24., 26., 27., 28., 29.

Svoboda Milán, stud. VII. tř. na Král. Vinohradech, úl. 2., 5., 11., 19. až 24., 29.

Šamánek Viktor, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 1. až 9., 11., 12., 14. až 22., 24., 27., 28.

Šilháček Karel, stud. VIII. tř. g. v Č. Budějovicích, úl. 1. až 21., 22. až 29., 30.

Šír Jiří, stud. VI. tř. r. v Novém Městě, úl. 2., 5. až 8., 12., 14., 15., 19., 20., 21., 24.

Šmok Mikuláš, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1. až 30.

Šťáva Frant., stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 2., 4., 5., 8., 11., 14. až 17., 19. až 22., 26., 30.

Štíbr Adolf, stud. VI. tř. r. v Rakovníce, úl. 2., 5., 19. až 23., 29.

Šubrt Adolf, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 30.

Táborský Frant., stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 2., 5., 11., 14., 15., 19., 20., 21.

Tereba Viktor, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 30.

Trčka Otakar, stud. VI. tř. g. v Třebíči, úl. 12., 14., 15., 24.

Trnka Rudolf, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 2., 5. až 8., 11., 12., 14., 15., 16., 19., 20., 21., 24., 27.

Turek Richard, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 2., 3., 5. až 8., 10. až 24., 26. až 30.

Turek Václav, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 2., 3., 5. až 8., 11. až 17., 19. až 29.

Vajgl Jan, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 9., 11. až 22., 24., 25., 27. až 30.

Valach Frant., stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 2. až 12., 14. až 30.

Valina Karel, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 2., 5., 6., 19., 20., 29., 30.

Váňa Robert, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 2., 5. až 9., 11., 12., 14., 15., 17., 18.

Velísek Ignát, bohoslovec v Olomouci, úl. 2. až 5., 11., 16. až 22., 24., 26., 27., 28.

Veselá Emilie, stud. g. na Král. Vinohradech, úl. 2., 6., 7., 9.

Veselý Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 30.

Vetter G., stud. VIII. tř. g. v Praze-III., úl. 1. až 15., 17., 19. až 30.

Vítěz Cyrill, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 2., 5., 6., 11., 15., 17., 19., 20., 21., 23., 24., 27., 28., 29.

Vlček Jaroslav, stud. VIII. tř. g. v Roudnici, úl. 2. až 6., 8., 11., 12., 14. až 24., 26. až 29.

Vlk Gustav, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 2., 4., 5., 6., 8. až 11., 15., 16., 19., 20., 21., 24., 29.

Vodička Karel, stud. VII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 2., 5., 6., 11., 19., 21.

Vomela Frant., stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 2., 5., 6., 10., 11., 12., 14., 15., 19., 20., 24., 29.

Voska Václav, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 5., 7., 8., 9., 11., 12., 14. až 30.

Vyskočil Pavel, stud. VIII. tř. g. na Kr. Vinohradech, úl. 2. až 5., 11., 12., 15., 19., 20., 21., 24., 27., 30.

Zafouk Bedřich, stud. VIII. tř. g. v Plzni, úl. 2., 5., 7., 8., 11., 12., 14., 15., 19., 20., 21., 24., 27.

Zahradníček Josef, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 2., 5., 6., 8. až 24., 26., 29.

Zavadil Stanislav, stud. V. tř. r. v Lipníku, úl. 2., 5., 15., 19., 20., 21.

Opravy.

Na str. 151. v úloze 36. místo $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta$ čti $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Na str. 152. v úloze 37. místo $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ čti $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} : \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$.