Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O původu a rozvoji nauky o determinantech. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 5, 193--199

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109405

O původu a rozvoji nauky o determinantech.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

(Pokračování.)

Ale nejenom ve Francii, nýbrž i v Němcích zanášeli se někteří mathematikové výrazy kombinačními, jež nyní slují determinanty, a to opět při řešení soustavy rovnic lineárních.

Mezi jinými vyniká tu *Rothe,* který zavedl též zvláštní spůsob označování pro permutace;*) užívalť čísel z řady přirozené vzatých dávaje jim co příponu o 1 zvětšené číslo značící počet následujících menších čísel nežli číslo toto, takže na př. v permutaci

$$6\quad 4\quad 1\quad 7\quad 2\quad 5\quad 3$$

vyskytnou se podlé toho přípony

$$6\quad 4\quad 1\quad 4\quad 1\quad 2\quad 1,$$

ana se pak vyjádří symbolem

$$6_6\quad 4_4\quad 1_1\quad 7_4\quad 2_1\quad 5_2\quad 3_1\,,$$

Pomocí tohoto spůsobu označování vyslovil pak snadno pravidlo znaménkové, že každá permutace prvků

$$1,\ 2,\ 3,\ldots;\ r$$

obdrží znamení $+$, obsahuje-li *sudý* počet sudých přípon, a znamení — v případě opačném, takže před permutaci prvků

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

dříve vytknutou nutno podlé tohoto pravidla položiti znamení $+$, jelikož se tu vyskytují *čtyry* sudé přípony a sice 6, 4, 4, 2, kdežto by se podlé Cramera napočítalo 12 inversí a tudíž teprv po delší cestě přišlo k stejnému výsledku.

*) *Rothe.* „Über Permutationen in Beziehung auf die Stellen der Elemente.“ Samml. comb. anal. Abh. 2. Th. Leipzig, 1800, pag. 263.

Jak patrno, ustanoví se tu označení složitých výrazů mnohem rychleji nežli spůsobem Cramerovým, jakmile jednou přípony jsou vytknuty. Ostatně sloužil tento spůsob ještě jiným účelům, zejmena zavedení pojmu *„příbuzných"* permutací, kdež patří prvku q přípona p, značí-li v druhé q příponu prvku p, takže příbuzné permutace nutně mají stejné označení.

Tento nový pojem slouží pak velmi dobře při řešení rovnic lineárních, jimž Rothe dává tvar

$$k_1 x^1 + k_2 x^2 + \ldots + k_r x^n = s^k$$

pro $\qquad k = 1, 2, 3, \ldots, r$;

neb pro sestavení jmenovatele společného, kterýž představuje determinant soustavy, má volnou ruku, zdali chce permutovati první neb druhé přípony.

Dále dokazuje Rothe rozličné poučky, které nyní pomocí subdeterminantů snadno kratčeji se vyjadřují, jako na př. že pro determinant

$$\varDelta = \Sigma \pm a_1 b_2 c_4 d_4$$

podlé našeho spůsobu označování platí

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a} = A_1 ,$$

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 = \varDelta ,$$

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 = 0 \quad \text{atd.},$$

načež snadno se vyjádří hodnota kterékoli neznámé ze soustavy dříve uvedené.

Zavede-li se totiž označení

$$\frac{d\varDelta}{d p_q} = \text{f} p_q ,$$

pak jest pro libovolné m hodnota

$$x^m = \frac{s^1 \text{f} 1_m + s^2 \text{f} 2_m + \ldots + s^r \text{f} r_m}{1_m \text{f} 1_m + 2_m \text{f} 2_m + \ldots + r_m \text{f} r_m} ,$$

z kteréhož výrazu vychází všeobecné pravidlo naše

$$k_m = s^k$$

$$x^m = \frac{/\varDelta}{\varDelta} .$$

Jak z tohoto stručného výkladu jde na jevo, šel Rothe cestou svou a nalezl opět některé poučky determinantní, pokud se jich užívá při řešení rovnic lineárních a při eliminaci. Avšak dále i on nepronikl, maje za ukončený již tento výkvět kombinatorické analytiky, jež tehdáž hlavně přičiněním *Hindenburga* velmi pilně v Německích se pěstovala. A i ostatní přívrženci této školy, jako zejména *Hauber*, kteří stejnými snahami byli vedeni, nedopracovali se dále.

Teprv slavný *Gauss*, kterýž byl s počátku též zaveden na tuto dráhu *Pfaffem* pěstovanou, dal těmto výzkumům nový směr a dodělal se nových výsledků, arci na poli zcela zvláštním, na poli číselné theorie. Jeho „Disquisitiones arithmeticae r. 1800 vydané, jimiž si rázem dobyl vynikajícího postavení mezi německými mathematiky a založil slávu nehynoucí, obsahují některé poučky, které v naucc o determinantech jsou velmi důležité, ba i pojmenování *„determinans“* od něho tu ponejprv užíváno; maje totiž pag. 122 na zřeteli kvadratický tvar

$$amm + 2b\,mn + cnn = M,$$

praví tu „Numerum $bb - ac$, a cujus indole proprietates formae (a, b, c) imprimis pendere in sequentibus docebimus, *determinantem* hujus formae vocabimus.“ Jeho determinant jest tedy patrně rozdílný od našeho shodujíc se jen s diskriminantem tvaru.

Gaussovi se též přičítá objevení pravidla pro násobení determinantů — *součin dvou determinantů jest opět determinantem* —; praví tu pag. 304. „Si forma ternaria f formam ternariam f' implicat atque haec formam f'', implicabit etiam f ipsam f''. Facillime enim perspicietur, si transeat

f in f' per substitutionem	f' in f'' per substitutionem
$\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma$	$\delta\,,\ \varepsilon\,,\ \zeta$
$\alpha',\ \beta',\ \gamma'$	$\delta',\ \varepsilon',\ \zeta'$
$\alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$	$\delta'',\ \varepsilon'',\ \zeta''$

f transmutatum iri per substitutionem

$$\begin{array}{lll} \alpha\delta + \beta\delta' + \gamma\delta'', & \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + \gamma\varepsilon'', & \alpha\zeta + \beta\zeta' + \gamma\zeta'' \\ \alpha'\delta + \beta'\delta' + \gamma'\delta'', & \alpha'\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \gamma'\varepsilon'', & \alpha'\zeta + \beta'\zeta' + \gamma'\zeta'' \\ \alpha''\delta + \beta''\delta' + \gamma''\delta'', & \alpha''\varepsilon + \beta''\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'', & \alpha''\zeta + \beta''\zeta' + \gamma''\zeta'' \end{array}$$

a dokládá pak, aby ukázal, že tento zjev není případem zvláštním „Ceterum sponte manifestum est, quomodo haec theoremata ad plures formas sint applicanda.“

Mimo to vyložil poučku o poměru mezi determinantem původním a přidruženým, jejž nazývá *forma adjuncta;* ukazujeť tu pag. 301., že přidružený determinant stupně třetího F rovná se „quadrato determinantis formae f, cui adjuncta est."

Jak patrno, neopouští poučky tyto obor, z něhož vyšly, a neměly by pro nauku o determinantech žádné důležitosti, kdyby nebyly později zvšeobecněny a převedeny na pole pravé, což provedli současně dva slavní mathematikové francouzští, *Binet* a *Cauchy*.

Binet *) se vrátil k pracím Vandermondovým a zavedl novou symboliku pro označování determinantů aneb, jak je zval, Laplace-ových *resultantů*, jíž dosud s prospěchem se užívá, kde dvojsmysl nemůže povstati; podlé něho jest totiž

$$(y' z'') = y' z'' - y'' z',$$
$$(x y' z'') = x y' z'' + x' y'' z + x'' y z' - z y' x'' - z' y'' x - z'' y x' \quad \text{atd.}$$

Rozklad determinantů v součty, součinů, jichž jednotliví činitelové jsou subdeterminanty, bylo pomocí této symboliky mnohem snadněji vyznačiti; jestiť tu na př.

$$(a_1 b_2 c_3 d_4) = a_1 (b_2 c_3 d_4) - a_2 (b_3 c_4 d_1) + a_3 (b_4 c_1 d_2) - a_4 (b_1 c_2 d_3),$$

kdež subdeterminanty jsou stupně prvního a třetího, neb

$$(a_1 b_2 c_3 d_4) = (a_1 b_2)(c_3 d_4) - (a_1 b_3)(c_2 d_4) + (a_1 b_4)(c_2 d_3) + (a_2 b_3)(c_1 d_4) - (a_2 b_4)(c_1 d_3) + (a_3 b_4)(c_1 d_2),$$

kdež subdeterminanty jsou stupně druhého.

Hlavní jeho zásluha, ač se dělí o ní s Cauchym, jest ta, že nalezl *všeobecné* pravidlo o násobení determinantů jakož i o poměru determinantu původního k přidruženému a zvšeobecnil tudíž Gaussovy obdobné poučky.

Ještě důležitější místo v nauce o determinantech zaujímá *Cauchy*, jeden z nejprvnějších mathematiků nejen století našeho, nýbrž věků všech, o němž směle můžeme tvrditi, že jest i s formálního stanoviska *zakladatelem* **) této „algebry v algebře", jak Sylvester nazývá nauku o determinantech.

---

*) Mém. sur un système de formules analytiques et leur application à des considerations géométriques. Journal de l'Ecole polyt. Cah. 16. pag. 280.

**) Srovnej „A. L. Cauchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie" von *F. J. Studnička*. Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften VI. Folge, 8. Band.

Východisko jeho vyšetřování r. 1812 uveřejněných jsou funkce souměrné vůbec a střídavé zvlášť,*) které se obdrží, sestaví-li se z n prvků rozdíly všech s jednotlivými předcházejícími. V druhé části svého obšírného pojednání, mající nápis „Des fonctions symétriques alternées désignées sous le nom de Determinans“ skládá totiž z prvků

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

součin rozdílů

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}),$$

čímž se obdrží výraz symbolem

$$S(\pm a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n)$$

označený, načež mocniny složiv dolů sestavuje nový výraz

$$S(\pm a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{nn}),$$

kdež znamení součtu S vztahuje se k prvním příponám jednotlivých prvků, a dokládá „Telle est la forme la plus générale des fonctions, que je désignerai dans la suite sous le nom de *determinans.*“

Pro $n = 2, 3, \ldots$ obdrží se tedy

$$S(\pm a_{11} a_{22}) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12},$$

$$S(\pm a_{11} a_{22} a_{33}) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}$$
$$- a_{11} a_{32} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

a t. d.

Zde tedy ponejprv se vyskytuje pojmenování determinant v běžném nyní toho slova smyslu, jakož i označování symbolické pomocí znamení součtového S; vedle toho sestavil tu též prvky v tvar čtvercový, takže

$$S(\pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A tu rozeznává, jakž i dosud se děje, *řádky* (suite horizontale) a *sloupce* (suite verticale), prvky dělí na *hlavní* (principaux), jež mají obě přípony stejné, jako na př. a_{pp}, a_{qq}, a

*) Mém. sur les Fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. Journ. de l'Ecole polyt. cah. 17. pag. 51.

sdružené (conjugués), při nichž jsou přípony sice stejné, ale opačně řaděné, jako na př. a_{pq}, a_{qp}.

Dále rozvedl determinant na součet součinů, při čemž nazývá *hlavním součinem* (produit principal) složený z prvků hlavních, tedy

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \ldots\ a_{nn},$$

při čemž zvláštního pravidla užívá, aby ustanovil označení jednotlivých těchto členů; v první části svého pojednání vyložil totiž způsob, jakým se přípony rozkládají v cykly uzavřené a odůvodnil pak pravidlo znaménkové toto: *Jestli rozdíl r mezi číslem určujícím počet činitelů n a počtem cyklů c, tedy*

$$r = n - c$$

číslo sudé, klade se $+$, *v opačném pak případě* —, takže podlé toho na př. součin

$$a_{13}\ a_{36}\ a_{61}\ a_{45}\ a_{54}\ a_{22}\ a_{77}$$

poskytne schema příponné a cyklické

$$\begin{array}{ccc|cc|c|c} 1 & 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7, \end{array}$$

z něhož patrno, že tu se vyskytuje

$$n = 7,\quad c = 4,\quad r = 3$$

a tudíž nutno součinu dáti znamení —.

Řešení rovnic lineárních uvedeno tu na tvary dosud užívané; jest totiž pro soustavu rovnic

$$a_k\, x_1 + b_k\, x_2 + \ldots + f_k\, x_n = m_k,$$

pro $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$x_1 = \frac{S(\pm m_1\ b_2\ c_3\ \ldots f_n)}{S(\pm a_1\ b_2\ c_3\ \ldots f_n)}.$$

O násobení determinantů praví: Lorsqu'un système de quantités est déterminé symetriquement au moyen de deux autres systèmes, le determinant du système résultant est toujours égal au produit des déterminans des deux systèmes composans", což vyjadřuje symbolicky takto: Jestli všeobecně

$$m_{ij} = \alpha_{i1}\, a_{j1} + \alpha_{i2}\, a_{j2} + \ldots + \alpha_{in}\, a_{jn}$$

pro $\quad i, j = 1, 2, 3 \ldots, n$

a zavedeme-li zároveň označení

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_n,\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \delta_n,\quad \begin{vmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix} = M_n,$$

platí o těchto determinantech

$$M_n = D_n \delta_n,$$

což představuje tak zvanou poučku o násobení determinantů, již v jednoduchém případě znal již Gauss, jak bylo svrchu pověděno.

Poměr determinantu původního a přidruženého vyměřil slovy „le determinant du système adjoint est égal à la $(n-1)^{me}$ puissance du déterminant de ce dernier système" a praví o této poučce, že ji vynalezl v Cherbourgu, kdež meškal v letě roku 1812 jako ingenieur při vodních stavbách námořských, dokládaje při tom „M. Binet, dont je me félicité d'être l'ami, avait été conduit aux mêmes résultats par des recherches différentes. De retour à Paris, j'étais occupé de poursuivre mon travail, lorsque j'allai le voir. Il me montra son théorème qui était semblable au mien. Seulement il désignait sous le nom de *resultante* ce que j'avais appelé *determinant.*"

Kdybychom chtěli všechny poučky, které tu Cauchy sestavil, zejména co se tkne determinantů odvozených (dérivées), byť i jen krátce zde opakovati, přišli bychom příliš daleko za meze tomuto časopisu vytknuté, takže nezbývá nežli poukázati k originálu.

Jak z tohoto stručného vypsání jde na jevo, vyvinul Cauchy na nové, velmi jednoduché cestě nejdůležitější poučky determinantní a zavedl zároveň tak vhodnou symboliku, že podnes se jí s prospěchem užívá; zaroveň tu lze poznati, že považoval determinanty za samostatné výrazy a upotřebení jich při řešení rovnic lineárních jen co vítaný předmět, aby se prospěšnost jich osvědčila. Nauka o determinantech stala se tu i formálně samostatnou, takže vším právem možná nazvati tohoto výtečníka mathematického *tvůrcem* nauky o determinantech, klade-li se patřičná váha na tyto všechny okolnosti.

(Dokončení.)