Bohumil Bydžovský
Příklad jednodvojznačné příbuznosti dvou rovinných polí

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 47 (1918), No. 4-5, 247--262

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109400

ducha; všechno, co uveřejnil, vyznamenává se logicky přesnou a krásnou formou, která, jak se mi zdá, svědčí o zvláštním ohledu spisovatelově ke čtenáři. Veliký vliv, který měl na své žáky všech stáří a všech národností, nezakládal se nikdy na snížení vědecké úrovně. Často se zabýval těžkými úlohami a tu nebylo snadno jej sledovati. Dovedl však vyhledati jednoduchost i tam, kde jí jiní nehledali; mathematická přesnost a jasnost byla jeho přirozeností. Jeho díla mají trvalou cenu zejména jakožto bezpečné východisko při studiu rozmanitých problémů, ku kterým jsou vedeni mathematikové pokrokem vyšší geometrie. Takto se Darboux již mnohokrát osvědčil ať již šlo o úlohy elementární nebo nejtěžší, a jest jisto, že dlouho budou působiti hloubka a přesná methodičnost jeho myšlení, vybraný vkus a jasné nazírání na vědecké otázky, vlastnosti to, pro které patří Darboux k nejlepším učitelům mathematiky.

---

# Příklad jednodvojznačné příbuznosti dvou rovinných polí.

B. Bydžovský.

Zvláštní případy Cremonových transformací, t. j. jednojednoznačných příbuzností dvou rovinných polí, byly a jsou v literatuře hojně projednávány. Vzpomínám na př. transformace kvadratické, transformace 5-ho st., jež se vyskytuje při řešení Chaslesova problému projektivnosti, t. zv. Geiserovy transformace 8-ho st., t. zv. transformací Jonquières-ových atd. Naproti tomu málo pozornosti je věnováno zvláštním případům rovinných příbuzností víceznačných, jichž obecná theorie také už je částečně provedena.[1]) Tento článek má za účel upozorniti na zajímavý příklad takové transformace, a to příbuznosti jednodvojznačné, k níž se dospívá z theorie rovinné křivky 6-ho st. s osmi dvojnásobnými body (jež je hyperelliptická), a jež má důležitost právě pro tuto křivku. Na této zvláštní transformaci vysvitnou také některé charakteristické vlastnosti obecné racionální transformace.

---

[1]) V. Pascal, »Repertorium d. höh. Math.« II. 1. str. 366.

Vlastnímu výkladu této jednodvojznačné transformace je třeba předeslati stručné studium zvláštní transformace Cremonovy.

I.

1. Zvolme v rovině $\xi$ osm bodů $A_1, \ldots, A_8$ v obecné poloze; budiž $A_9$ devátý bod base svazku kubických křivek $\Sigma$, určeného zvolenými osmi body. Libovolným bodem roviny $X_1$ prochází — pokud je to bod rozdílný od bodů $A_i$ — jediná křivka $k_3$ tohoto svazku; sestrojme její tečnu v bodě $A_9$ a budiž $T$ další průsečík této tečny s křivkou. Spojnice $TX_1$ protne křivku ještě v jednom bodě $X_2$. Oba body $X_1$, $X_2$ jsou sdruženy Cremonovou transformací, jež je involutorní, ježto táž konstrukce vede od bodu $X_2$ k bodu $X_1$. Tuto transformaci [2]) budeme v dalším označovati $J$.

K jejímu studiu je třeba znáti geometrické místo bodu $T$.[3]) Svazek křivek $\Sigma$ je, jak známo, projektivní se svazkem tečen v libovolném společném bodu, tedy také v bodu $A_9$. Oba svazky vytvoří průsečíky sdružených elementů křivku čtvrtého stupně, kterou budeme značiti $k_4$. Tato křivka obsahuje body $A_1, \ldots, A_8$ jednoduše; bod $A_9$ je pak trojnásobný. Neboť ve svazku existují tři křivky, pro něž bod $A_9$ je inflexní; pro ty splyne bod $T$ s bodem $A_9$, což se tedy stane třikráte. Řada bodů $T$ na křivce $k_4$ je projektivní se svazkem tečen v bodě $A_9$; je tedy svazek $\Sigma$ projektivně přiřazen řadě bodů $T$ na křivce $k_4$.

2. Pokud bod $X_1$ nesplyne s některým bodem $A_i$, odpovídá mu, jak jsme shledali, jediný bod $X_2$. Hlavní body transformace $J$ lze tedy hledati jen mezi body $A_i$.

Je-li $X_1 \equiv A_9$, je $k_3$ kterákoliv křivka svazku $\Sigma$; spojnice $TX_1$ splyne s $TA_9$ a bod $X_2 \equiv A_9 \equiv X_1$; je tedy $A_9$ samodružný, nikoliv hlavní bod transformace $J$.

Naproti tomu je každý bod $A_i$ pro $i = 1, \ldots, 8$ hlavní. Neboť je-li $X_1 \equiv A_i$, je $k_3$ kterákoliv křivka svazku $\Sigma$

[2]) Je známa. V. Bertini, „Annali di matematica“ (2) 8 str. 273.

[3]) Toto geom. místo je vůbec důležitě pro studium křivky 6-ho st. v. K. Rohn „Die Maximalzahl etc.“ Math. Ann. roč. 1913. a také mé pojednání: „Konstrukce rov. křivek 6. st. atd.“ Rozpr. Č. Akad. roč. XXII. (1913) čís. 46.

a spojnice $TA_i$ protne ji po třetí mimo bod $A_i$, je-li $i = 1, \ldots, 8$. Tento třetí průsečík $X_2$ je pro každou $k_3$ jiný a vyplní celou hlavní křivku odpovídající bodu $A_i$. Tuto křivku vytvoří zřejmě svazek $\Sigma$ se svazkem paprsků $(A_i)$. Elementy těchto dvou svazků jsou si přidruženy tímto způsobem: na každé křivce svazku $\Sigma$ existuje jediný bod $T$ a této křivce odpovídá tedy jediný paprsek svazku $(A_i)$. Obráceně leží na určitém paprsku svazku $(A_i)$ tři body $T$, neboť geom. místo těchto bodů je křivka $k_4$, kterou paprsek vedený bodem $A_i$ protne ještě ve třech bodech. Určitému bodu $T$ přísluší pak jediná křivka svazku $\Sigma$, totiž křivka určená tečnou $A_9 T$ v bodě $A_9$. Každému paprsku svazku $(A_i)$ odpovídají tedy tři křivky svazku $\Sigma$, čili (rozpadající se) křivka stupně devátého, jež má trojnásobné body $A_1, \ldots, A_9$. Dle známých pravidel vytvoří tyto útvary průsečíky elementů sobě odpovídajících křivku stupně desátého, jež má bod $A_i$ za čtyrnásobný, ostatní body $A_k$ za trojnásobné. Avšak křivka $k_4$ tvoří součást této křivky stupně desátého; zbývá tedy jako hlavní křivka odpovídající bodu $A_i$ křivka šestého stupně $k_6^{(i)}$, jež má trojnásobný bod $A_i$, ostatní body $A_k$ za dvojnásobné mimo $A_9$, jehož křivka neobsahuje.

Dospěli jsme výsledku: *Cremonova involuce $J$ má osm hlavních bodů $A_1, \ldots, A_8$ šestého stupně; hlavní křivky jsou racionální křivky šestého stupně, mající příslušný hlavní bod za trojnásobný, ostatních sedm za dvojnásobné.* Tyto křivky označíme $k_6^{(1)}, \ldots, k_6^{(8)}$.

Z této věty plyne stupeň transformace $J$. Pro Cremonovu transformaci stupně $n$-ho, jež má $\alpha_i$ bodů $i$-násobných, platí, jak známo z theorie těchto transformací, vztah

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + \ldots + i^2\alpha_i + \ldots = n^2 - 1.$$

V našem případě existuje $\alpha_6 = 8$ bodů hlavních šestého stupně i platí

$$6^2 . 8 = n^2 - 1$$

a odtud

$$n = 17.$$

*Involuce $J$ je stupně 17-ho.*

3. Význam této involuce pro theorii křivek 6. st. s osmi dvojnásobnými body je vyjádřen větou:

*Každá křivka šestého stupně mající dvojnásobné body* $A_1, \ldots, A_8$ *převádí se touto involucí sama v sebe.*

Budiž $k_6$ libovolná taková křivka. Libovolná křivka $k_3$ svazku $\Sigma$ protne ji mimo body $A_1, \ldots, A_8$, jež platí za šestnáct průsečíků, ještě ve dvou bodech $X_1$, $X_2$. Spojnice $\overline{X_1 X_2}$ protne $k_3$ v bodě $T$. Každá křivka šestého stupně, jež má dvojnásobné body $A_1, \ldots, A_8$, protne $k_3$ ještě ve dvojici bodů, jichž spojnice — dle známé věty o korresiduálních skupinách — protíná $k_3$ v témže bodě $T$. Vezměme v úvahu specielně takovou křivku rozpadající se ve dvě křivky třetího stupně. Avšak ty protnou $k_3$ — mimo body $A_1, \ldots, A_8$ — ještě dvakráte v bodě $A_9$, takže spojnice dalších dvou průsečíků přejde v tomto případě v tečnu ke $k_3$ v bodě $A_9$. Je tedy $T$ tečnový bod bodu $A_9$ na $k_3$; ježto tedy spojnice $\overline{X_1 X_2}$ prochází bodem $T$, jsou body $X_1$, $X_2$ sdruženy v involuci $J$. Ježto bod $X_1$ lze voliti libovolně na $k_6$, plyne odtud, že bod sdružený involucí $J$ s libovolným bodem této křivky leží opět na této křivce; tím je hořejší věta dokázána.

## II.

4. Budiž dána druhá rovina $\xi'$. Sestrojíme vztah mezi rovinami $\xi$ a $\xi'$, v němž by bodům roviny $\xi'$ odpovídaly dvojice involuce $J$ roviny $\xi$, a obráceně, tímto způsobem: zvolme v rovině $\xi'$ dva body $S'$, $D'$, v rovině $\xi$ paprsek $d$ neobsahující žádný bod $A_i$. Přiřaďme svazek paprsků $(S')$ projektivně svazku kubických křivek $\Sigma$; svazek paprsků $(D')$ řadě bodové na $d$. Bodu $X'$ roviny $\xi'$ přiřadíme pak dvojici involuce $J$ v rovině $\xi$, kterou obdržíme touto konstrukcí: promítneme bod $X'$ z bodů $S'$, $D'$. Paprsku $\overline{S'X'}$ odpovídá křivka $k_3$ svazku $\Sigma$, paprsku $\overline{D'X'}$ bod $Y$ na $d$. Na $k_3$ sestrojíme známý bod $T$, v němž tečna v bodu $A_9$ vedená podruhé protne křivku, a spojíme jej s $Y$; spojnice $\overline{TY}$ protne $k_3$ ještě ve dvou bodech $X_1$, $X_2$, jež tvoří, dle výkladu odst. 1., dvojici involuce $J$; to je dvojice odpovídající bodu $X$. Z toho ihned plyne, jak obráceně k danému bodu $X_1$ roviny $\xi$ sestrojíme bod $X'$, jenž mu odpovídá v rovině $\xi'$: sestrojíme bod $X_2$, tvořící s bodem $X_1$ dvojici involuce $J$. Spojnice $\overline{X_1 X_2}$ protne přímku $d$ v bodě $Y$. Ve svazku

$(D')$ sestrojíme paprsek odpovídající bodu $Y$, ve svazku $(S')$ paprsek odpovídající křivce $k_3$ svazku $\Sigma$ určené bodem $X_1$. Oba paprsky takto sestrojené protnou se v hledaném bodu $X'$, jenž odpovídá bodu $X_1$ a ovšem také bodu $X_2$.

Tím je sestrojena jednodvojznačná příbuznost, jejímuž studiu je věnován tento článek; označím ji stručně $T[1, 2]$. V ní každému bodu roviny $\xi'$ odpovídají dva body roviny $\xi$, každému bodu roviny $\xi$ jediný bod roviny $\xi'$. Když bod $X'$ proběhne celou rovinu $\xi'$, dvojice jemu odpovídající pokryjí rovinu $\xi$ právě jednou; když však bod $X$ proběhne rovinu $\xi$, bod jemu odpovídající pokryje rovinu $\xi'$ dvakráte, ježto týž bod $X'$ odpovídá dvěma polohám bodu $X$. Z toho důvodu nazývá se rovina $\xi'$ dvojnásobnou rovinou příbuznosti $T[1, 2]$, kdežto rovina $\xi$ je jednoduchá.

5. Podrobnější studium této transformace vede — dle analogie Cremonových transformací — ke zkoumání těch bodů obou rovin, pro něž přestává platiti všeobecný zákon transformační, totiž jednodvojznačnost, a jež — dle téže analogie — se nazývají hlavními.

Počněme rovinou $\xi'$; hledejme v ní body, jimž odpovídá nekonečně mnoho bodů roviny $\xi$. Bod $S'$ promítá se určitým paprskem svazku $(D')$, tomu odpovídá určitý bod $S$ na $d$. Libovolnému paprsku svazku $(S')$ odpovídá určitá křivka $k_3$ svazku $\Sigma$, na níž obdržíme užitím bodu $S$ — dle základní konstrukce předchozího odstavce — dvojici bodů odpovídající bodu $S'$ na této křivce. Ježto každý paprsek svazku $(S')$ promítá bod $S'$, odpovídá tomuto bodu nekonečně mnoho takových dvojic. Každá tato dvojice leží na jedné křivce svazku $\Sigma$ a na jednom paprsku svazku $(S)$. Tak tedy geometrické místo dvojic, odpovídajících bodu $S'$, jest křivka, jež vznikne průsečíky křivek svazku $\Sigma$ s příslušnými paprsky svazku $(S)$. Elementy těchto dvou svazků pak si odpovídají takto: křivce svazku $\Sigma$ odpovídá jediný paprsek svazku $(S)$, totiž spojnice bodu $S$ s bodem $T$ (v. odst. 1.) na této křivce; obráceně paprsku svazku $(S)$ odpovídají čtyři křivky svazku $\Sigma$. Neboť tento paprsek protne křivku $k_4$, geometrické místo bodu $T$ (v. odst. 1.), ve čtyrech bodech; každým z nich je určena jedna křivka svazku $\Sigma$ odpovídající zvolenému paprsku. Oba svazky takto sdružené vytvoří křivku stupně třináctého ($4 \times 3 + 1 = 13$), jež má devět čtyrnásobných bodů $A_i$ ($i = 1, \ldots, 9$); ježto křivka $k_4$ tvoří zřejmě součást této křivky, zbývá jako hlavní křivka odpovídající bodu $S'$ křivka stupně devátého $s_9$, mající osm trojnásobných bodů $A_1, \ldots, A_8$ a obsahující jednoduše body $A_9, S$.

Přistupme k bodu $D'$: paprsku $S'D'$ počítanému do svazku $(S')$ odpovídá určitá křivka $d_3$ svazku $\Sigma$; sestrojme na ní známý bod $T$, v němž křivku protne tečna vedená v bodě $A_9$. Ježto bod $D'$ je promítán všemi paprsky svazku $(D')$ a těmto paprskům odpovídají všechny body přímky $d$, je zřejmo, že bodu $D'$ odpovídají všechny dvojice involuce $J$ ležící na $d_3$. Odpovídá tedy hlavnímu bodu $D'$ hlavní křivka $d_3$.

6. Jestliže rovina $\xi'$ obsahuje další body hlavní, nemohou míti svůj původ ani v neurčitostí křivky svazku $\Sigma$, ani v neurčitosti bodu řady $d$, jež by stanovily polohu příslušné dvojice bodové v rovině $\xi$; může však ještě vzniknouti neurčitost ve spojnici bodu na $d$ s bodem $T$, na kteréžto spojnici (v. odst. 4.) leží příslušná dvojice. Tato neurčitost však se skutečně vyskytne: přímka $d$ protne křivku $k_4$, geometrické místo bodu $T$, ve čtyřech bodech: $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$. Křivka svazku $\Sigma$ určená na př. bodem $T_1$ — nazveme ji $t_1$ — je protata tečnou položenou v bodě $A_9$ právě v bodu $T_1$. Sestrojme paprsek svazku $(S')$ odpovídající křivce $t$ a paprsek svazku $(D')$ odpovídající bodu $T_1$ na $d$; oba paprsky protnou se v bodě $T'_1$. Jestliže hledáme dvojici odpovídající v rovině $\xi$ bodu $T'_1$, shledáme ihned, že je jich nekonečně mnoho, ježto spojnice $\overline{TY}$, o niž se, dle odst. 4., opírá konstrukce dvojic roviny $\xi$, stává se neurčitou, neboť $Y \equiv T \equiv T_1$. Všechny tyto dvojice pak vyplňují křivku $t_1$, jež tedy, jako hlavní, odpovídá hlavnímu bodu $T'_1$. Právě tak se naleznou další hlavní body $T'_2$, $T'_3$, $T'_4$, jimž odpovídají hlavní křivky $t_2$, $t_3$, $t_4$, náležející do svazku $\Sigma$ a určené resp. body $T_2$, $T_3$, $T_4$.

Jiných hlavních bodů mimo šest nalezených není.

7. Body $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ tvoří na $d$ určitý dvojpoměr $\lambda$. Tento dvojpoměr tvoří — dle konce odst. 1. — také křivky $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$. Z toho plyne, že paprsky $\overline{D'T'_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) a rovněž paprsku $\overline{S'T'_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) tvoří týž dvojpoměr $\lambda$;

to však znamená, že body $T'_i$ leží s body $S'$, $D'$ na kuželosečce.

Odtud věta:

*Všech šest hlavních bodů roviny $\xi'$ v transformaci $T[1, 2]$ leží na kuželosečce $k'_2$.*

8. Určíme podobně hlavní body roviny $\xi$.

Především jsou hlavními body $A_1, \ldots, A_8$; neboť ty jsou hlavní v involuci $J$ (v. odst. 2.) a každý z nich tvoří součást nekonečně mnoha dvojic involuce $J$, jimž odpovídá nekonečně mnoho bodů roviny $\xi'$. Uvažujme podrobně o jednom z nich, na př. $A_1$. Tento bod — jakožto bod $X_1$ — je určen kteroukoliv křivkou $k_3$ svazku $\Sigma$ a tím bodem řady na $d$, v němž je tento paprsek protat spojnicí $\overline{A_1 T}$, kde $T$ probíhá známou křivku $k_4$. Tímto způsobem jsou křivky svazku $\Sigma$ uvedeny ve vztah s body řady na $d$, a to tak, že každé křivce odpovídá — dle konstrukce právě udané — jediný bod řady na $d$; obráceně bodu této řady odpovídají tři křivky svazku $\Sigma$, ježto spojnice tohoto bodu s bodem $A_1$ protne křivku $k_4$ mimo $A_1$ ještě ve třech bodech; každým z nich je určena jedna křivka svazku $\Sigma$. V rovině $\xi'$ obdržíme tedy útvar odpovídající bodu $A_1$, když sdružíme oba svazky $(S')$, $(D')$ tak, že paprsku svazku $(S')$ odpovídá jediný paprsek svazku $(D')$, paprsku svazku $(D')$ tři paprsky svazku $(S')$. Svazky tak sdružené vytvoří křivku st. čtvrtého mající trojnásobný bod $S'$, jednoduchý bod $D'$. Tato křivka obsahuje jednoduše všechny další hlavní body $T'_1$, $T'_2$, $T'_3$, $T'_4$. Neboť křivky $t_1, \ldots, t_4$, těmto bodům odpovídající, náležejí do svazku $\Sigma$, jehož každá křivka určuje bod $A_1$. Ježto stejná úvaha platí pro body $A_2, \ldots, A_8$, nabyli jsme výsledku:

*Body $A_1, \ldots, A_8$ jsou hlavní body čtvrtého stupně v rovině $\xi$*; jim odpovídají v rovině $\xi'$ křivky stupně čtvrtého, jež označíme $k'^{(i)}_4$. Tyto křivky mají společný bod trojnásobný $S'$ a jednoduché $D'$, $T'_1$, $T'_2$, $T'_3$, $T'_4$. Bodům každé této křivky odpovídají v rovině $\xi$ dvojice, z nichž každá obsahuje bod $A_i$ a vedle toho ovšem jeden bod křivky $k^{(i)}_6$ (v. odst. 2.).

9. Křivky $k'^{(i)}_4$ mají zajímavou vzájemnou polohu. Každé dvě křivky $k'^{(i)}_4$, $k'^{(h)}_4$ protnou se mimo bod $S'$ (jenž platí za devět průsečíků) a body $D'$, $T'_1, \ldots, T'_4$ (pět průsečíků) ještě ve dvou bodech, jež nazveme $M'_{hi}$, $N'_{hi}$. Každému z nich odpo-

vídá zřejmě oba body $A_h$, $A_i$; že tyto dva body tvoří dvojici involuce $J$, plyne z toho, že bod $A_i$ leží na hlavní křivce odpovídající v této involuci bodu $A_h$. Spojnice $\overline{A_h A_i}$ protne přímku $d$ v bodu, jemuž odpovídá určitý jediný paprsek svazku $(D')$; křivku $k_4$ ještě ve dvou bodech; křivkám svazku $\Sigma$ jimi určeným odpovídají dva paprsky bodem $S'$. Z toho však plyne, že body $M'_{hi}$, $N'_{hi}$ leží na dvou různých paprscích svazku $(S')$, avšak na jediném paprsku svazku $(D')$.

Můžeme tedy vysloviti výsledek: *Každé dvě hlavní křivky čtvrtého stupně*[4]) *roviny $\xi'$ protnou se mimo hlavní body této roviny ještě ve dvou bodech, jichž spojnice procházejí týmž společným jednoduchým bodem všech těchto hlavních křivek* (bodem $D'$).

10. Bod $A_9$ je rovněž hlavní, což je způsobeno tím, že je určen — pokládáme-li jej za bod $X_1$ — kteroukoli křivkou svazku $\Sigma$. Některý bod jemu odpovídající obdržíme, když zvolíme libovolnou křivku svazku, sestrojíme k ní tečnu v bodě $A_9$, jež protne $d$ v bodě $Y$; sestrojíme pak paprsky svazků $(S')$, $(D')$ těmto útvarům odpovídající. Když křivka proběhne svazek $\Sigma$, bod $Y$ proběhne řadu na $d$ s ním projektivní; body odpovídající bodu $A_9$ vyplňují tedy útvar vytvořený projektivními svazky $(S')$, $(D')$, t. j. kuželosečku obsahující body $S'$, $D'$. Tato kuželosečka obsahuje mimo to také body $T'_i$, neboť křivky třetího stupně odpovídající těmto bodům náležejí ovšem do svazku. Je to tedy známá již kuželosečka $k'_2$; ta odpovídá hlavnímu bodu $A_9$.

11. Body $A_i$ jsou hlavní, poněvadž při konstrukci udané v odst. 4. nastává pro ně neurčitost ve volbě křivky svazku $\Sigma$. Další hlavní body roviny $\xi$ obdržíme, když přihlédneme k možnosti, že nastane neurčitost ve volbě bodu na $d$. Tato neurčitost skutečně nastane pro bod, který leží na $d$ a pro který příslušný bod $T$ leží také na $d$. Takových bodů je osm, lépe řečeno, čtyři dvojice: ty, ve kterých přímka $d$ je protata křivkami $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ určenými body $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$, v nichž přímka $d$ je protata křivkou $k_4$, geometrickým místem bodu $T$ (v. odst. 6.). Uvažujme na př. křivku $t_1$. Ona protne $d$ mimo $T_1$ ještě ve dvou

[4]) Jiných hlavních křivek stupně čtvrtého v rovině $\xi'$ není, jak z dalšího výsledku je zjevno.

bodech $T_{11}$, $T_{12}$. Tyto dva body tvoří dvojici involuce $J$, ježto jejich spojnice prochází bodem $T'_1$. Tuto dvojici lze však sestrojiti na křivce $t_1$ užitím kteréhokoliv bodu řady na $d$. To znamená — vzpomeneme-li, že křivce $t_1$ odpovídá paprsek $\overline{S'T'_1}$, — že dvojici $T_{11}$, $T_{12}$ odpovídají všechny body paprsku $\overline{S'T'_1}$. Tato dvojice dává tedy dva hlavní body stupně prvního. Právě tak jsou hlavní body další průsečíky $d$ s křivkami $t_2$, $t_3$, $t_4$, jež označíme $T_{21}$, $T_{22}$; $T_{31}$, $T_{32}$; $T_{41}$, $T_{42}$.

Konečně nutno přihlédnouti k tomu, že také v rovině $\xi'$ může nastati neurčitost při základní konstrukci. Ta nastane jen tehdy, když oba sdružené paprsky svazků $(S')$, $(D')$ splynou. Paprsku $\overline{S'D'}$ počítanému do prvého svazku odpovídá křivka $d_3$ svazku $\Sigma$, počítanému do druhého bod $S$ na $d$ (v. odst. 5.). Dvojici $D_1$, $D_2$ involuce $J$, sestrojené na křivce $d_3$ užitím bodu $S$ dle odst. 4., odpovídá tedy kterýkoliv bod spojnice $\overline{S'D'}$; jsou tedy $D_1$, $D_2$ další dva hlavní body stupně prvého.

Je zřejmo, že tím jsou vyčerpány hlavní body roviny $\xi$.

12. Uvedu nyní v přehledu *hlavní body* a *hlavní křivky* obou rovnic:

I. Rovina $\xi$. *a*) Hlavní body: 1. Pět dvojic bodů stupně prvého: $D_1$, $D_2$; $T_{11}$, $T_{12}$; $T_{21}$, $T_{22}$; $T_{31}$, $T_{32}$; $T_{41}$, $T_{42}$.

2. Jeden bod $A_9$ stupně druhého.

3. Osm bodů $A_1, \dots, A_8$ stupně čtvrtého.

*b*) Hlavní křivky:

1. Pět křivek stupně třetího $d_3$, $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$.

2. Jedna křivka stupně devátého $s_9$.

II. Rovina $\xi'$. *a*) Hlavní body: 1. Pět bodů stupně třetího $D'$, $T'_1$, $T'_2$, $T'_3$, $T'_4$.

2. Jeden bod stupně devátého $S'$.

*b*) Hlavní křivky: 1. Pět přímek $\overline{S'D'}$, $\overline{S'T'_1}$, $\overline{S'T'_2}$, $\overline{S'T'_3}$, $\overline{S'T'_4}$.

2. Jedna kuželosečka $k'_2$.

3. Osm křivek stupně čtvrtého $k'^{(1)}_4, \dots, k'^{(8)}_4$.

13. Dalšímu studiu transformace $T[1, 2]$ je třeba předeslati dvě pomocné věty, jež jsou jen zvláštní případy známých vět obecných.

*a) Je dána řada na přímce d a řada s ní projektivní na racionální křivce $k_4$. Spojnice sdružených bodů obalují křivku páté třídy mající čtyrnásobnou tečnu d.*

Promítneme-li totiž z libovolného bodu $P$ obě projektivní řady, obdržíme ve svazku $(P)$ vztah mezi paprsky jednočtyrznačný. Neboť řadu $d$ protne paprsek tohoto svazku v jediném bodu, jemuž odpovídá na $k_4$ jediný bod, jenž je promítnut z $P$ jediným paprskem. Křivku $k_4$ však protne paprsek ve čtyrech bodech, těm odpovídající čtyři body na $d$ jsou promítány čtyřmi paprsky z $P$. Takový vztah má, jak známo, pět samodružných elementů; samodružný element je pak spojnice dvou bodů sobě odpovídajících. Libovolným bodem prochází tedy pět paprsků, jež spojují dvojice bodů sobě odpovídajících, t. j. křivka obalená těmito spojnicemi je páté třídy. Stane pak se čtyřikráte, že tato spojnice splyne s přímkou $d$. Neboť ta protne $k_4$ ve čtyřech bodech; spojnice těchto bodů, počítaných ke $k_4$, s body, jež jim odpovídají na $d$, splynou právě s $d$.

Tím je věta dokázána. Plyne odtud, že *vzniklá křivka je racionální; její tečny tvoří svazek projektivní s řadou na d.*

*b) Je dán svazek $\Sigma$ kubických křivek a racionální křivka $k_V$ páté třídy, jejíž tečny tvoří křivou řadu projektivní se svazkem $\Sigma$. Tyto dva útvary vytvoří průsečíky sdružených elementů křivku stupně šestnáctého, pro kterou body base svazku $\Sigma$ jsou pětinásobné.*

Určíme totiž, kolik bodů tohoto geometrického místa leží na libovolné přímce $p$. Křivá řada tečen i svazek křivek vytínají na ní dvě soustavy bodů, jež jsou v příbuznosti jednopatnáctiznačné. Neboť pokládáme-li libovolný bod přímky za průsečík s křivkou svazku, je tímto bodem určena jediná křivka svazku, které odpovídá jediná tečna křivky, jež protne $p$ v jediném bodu, jenž odpovídá danému. Jestliže obráceně bod daný na $p$ pokládáme za průsečík s tečnou křivky, prochází jím pět tečen této křivky páté třídy, každé odpovídá jedna křivka svazku jež protne $p$ ve třech bodech; dostáváme tedy patnáct bodů, jež odpovídají danému. V tomto vztahu je šestnáct bodů samodružných; v těch se protínají tečny křivky páté třídy s křivkami svazku, jež jim odpovídají. Takových bodů je tedy na přímce šestnáct; tím je určen stupeň vytvořené křivky. Tato křivka projde bodem base svazku $\Sigma$ pokaždé, když jím projde jedna tečna křivky páté třídy; ale to se stane pětkráte, ježto bodem prochází pět tečen této křivky. Jsou tedy body base skutečně pětinásobné.

14. Opírajíce se o předchozí výsledky, učiníme další krok ve studiu transformace $T[1, 2]$, jenž záleží v tom, že **určíme křivku, která odpovídá přímce v jedné z obou sdružených rovin.**

Budiž dána nejprve přímka $p'$ v rovině $\xi'$. Její body jsou promítány z bodů $S'$, $D'$ dvěma projektivními svazky paprsků. V rovině $\xi$ obdržíme tedy projektivní přiřazení křivek svazku $\Sigma$ a řady bodové na $d$. Ježto svazek $\Sigma$ je projektivně přiřazen řadě bodové na křivce $k_4$ (v. odst. 1.), obdržíme projektivní přiřazení této řady bodové s řadou na $d$. Spojnice bodů sobě odpovídajících v obou řadách vytvoří dle věty $a$) racionální křivku páté třídy mající $d$ za tečnu čtyrnásobnou. Z konstrukce odst. 4. plyne, že dvojice roviny $\xi$, odpovídající bodům přímky $p'$, leží na zmíněných spojnicích, a to tam, kde každá tato spojnice protne příslušnou křivku svazku $\Sigma$ mimo bod $T$. Běží tedy o křivku, kterou vytvoří svazek křivek $\Sigma$ s projektivním svazkem racionální křivky páté třídy. Ale to je — dle věty $b$) — křivka stupně 16-ho, jež má pětinásobné body $A_i (i = 1, \ldots, 9)$. Avšak křivka $k_4$ tvoří zřejmě součást této křivky; i zbývá křivka $k_{12}$ stupně dvanáctého jako útvar roviny $\xi$ odpovídající přímce $p'$ v rovině $\xi'$. Tato křivka má čtyrnásobné body $A_1, \ldots, A_8$ a dvojnásobný bod $A_9$. To plyne také z toho, že přímka $p'$ protne hlavní křivky $k'^{(i)}_4 (i = 1, \ldots, 8)$ vždy ve čtyřech bodech, hlavní křivku $k'_2$ ve dvou bodech. Touž úvahou seznáváme, že tato křivka $k_{12}$ obsahuje jednoduše body $D_1$, $D_2$; $T_{11}$, $T_{12}$; $T_{21}$, $T_{22}$; $T_{31}$, $T_{32}$; $T_{41}$, $T_{42}$.

*Je tedy tranformace $T[1, 2]$ při přechodu od roviny $\xi'$ k rovině $\xi$ stupně dvanáctého.*

Je-li obráceně v rovině $\xi$ dána přímka $p$, budiž $k'_n$ křivka stupně $n$-ho, jež jí odpovídá v rovině $\xi'$. Přímka $p'$ této roviny protne křivku $k'_n$ v $n$ bodech; křivku $k_{12}$ odpovídající přímce $p'$ v rovině $\xi$ protne $p$ ve dvanácti bodech. Z toho plyne $n = 12$, ježto každému průsečíku $p$ a $k_{12}$ odpovídá jediný průsečík čar $k'_n$ a $p'$, a obráceně.

*Je tedy transformace $T[1, 2]$ také při přechodu od $\xi$ ke $\xi'$ stupně dvanáctého.*

15. Prochází-li přímka $p'$ hlavními body, snižuje se stupeň křivky jí odpovídající dle téhož jednoduchého pravidla, jaké platí pro transformace Cremonovy. Obsahuje-li $p'$ jeden bod $D'$ nebo $T'_i$, křivka jí odpovídající je stupně devátého, doplňujíc se hlavní křivkou $d_3$ nebo $t_i$ na křivku st. dvanáctého; má trojnásobné body $A_1, \ldots, A_8$, jednoduchý $A_9$. Obsahuje-li $p'$ dva ze zmíněných bodů, odpovídá jí křivka stupně šestého mající osm dvojnásobných bodů $A_1, \ldots, A_8$. Jestliže přímka $p'$ obsahuje bod $S'$, odpovídá jí kubická křivka svazku $\Sigma$. Jestliže konečně přímka spojuje bod $S'$ s jedním z ostatních pěti hlavních bodů, sníží se stupeň křivky korrespondující o dvanáct, t. j. na nulu; křivka přejde ve dvojici hlavních bodů.

*Křivce stupně n-ho v jedné rovině odpovídá v rovině druhé křivka stupně obecně 12n-ho. Jestliže prvá křivka prochází m-kráte hlavním bodem stupně h-ho, snižuje se stupeň křivky jí odpovídající o mh.* Tyto věty jsou odůvodněny stejně jako v nauce o transformacích Cremonových.

16. Jest třeba ještě upozorniti na dvě důležité okolnosti, kterými se transformace $T[1, 2]$ liší od Cremonových.

Všimněme si totiž křivky $k'_{12}$, jež odpovídá přímce $p$ roviny $\xi$. Ona prochází všemi hlavními body roviny $\xi'$ a to tolikráte, kolik udává stupeň příslušného hlavního bodu. Obráceně musí křivce $k'_{12}$ odpovídati v rovině $\xi$ přímka $p$. Této křivce odpovídá ovšem křivka stupně $12 \times 12 = 144$. Avšak ježto $k'_{12}$ prochází třikráte každým bodem $D'$, $T'_i$, sníží se stupeň o $5 \times \times 3 \times 3 = 45$; ježto mimo to prochází devětkráte bodem $S'$, sníží se stupeň ještě o $9 \times 9 = 81$, celkem o $45 \times 81 = 126$, takže zbývá křivka stupně 18-ho, tedy nikoli jen prvního. To však je zcela pochopitelno. Každému bodu přímky $p$ odpovídá jediný bod křivky $k'_{12}$; obráceně však bodu této křivky odpovídají dva body roviny $\xi$, z nichž jeden leží na přímce $p$, druhý na křivce, která této přímce odpovídá v involuci $J$. Odpovídá tedy křivce $k'_{12}$ v rovině $\xi$ nejen přímka $p$, nýbrž také ještě křivka, jež je s $p$ sdružena involucí $J$. Avšak ta je — dle odst. 2. — stupně sedmnáctého; i s přímkou tvoří skutečně křivku stupně osmnáctého.

Jsou tedy možné případy, kdy jedné křivce roviny $\xi'$ odpovídají dvě křivky roviny $\xi$, a to takové, jež jsou sdruženy involucí $J$.

17. Všimněme si za druhé křivky $k_{12}$, jež odpovídá přímce $p'$ roviny $\xi'$. Křivce $k_{12}$ odpovídá v rovině $\xi'$ křivka stupně 144; tento stupeň se opět sníží a to: ježto křivka $k_{12}$ prochází čtyřikráte každým z osmi bodů čtvrtého stupně $A_i$, o $8 \times 4 \times \times 4 = 128$; ježto prochází dvakráte bodem druhého stupně $A_9$, o $2 \times 2 = 4$; ježto konečně prochází všemi deseti body stupně prvého jednoduše, o dalších deset jednotek. Dostáváme tedy stupeň $144 - 128 - 4 - 10 = 2$. Při tom však je zřejmo, že křivce $k_{12}$ může odpovídati jen přímka; tomu tak je skutečně a výsledek právě obdržený se vysvětluje tím, že tato přímka odpovídá křivce $k_{12}$ dvakráte. To pak je snadno pochopitelno z toho, že rovina $\xi'$ je dvojnásobná (v. odst. 4.); když bod proběhne křivku $k_{12}$, bod jemu odpovídající proběhne přímku $p$ dvakráte.

Je ostatně zřejmo, že tento výsledek je jen zvláštní případ obecné věty, jež zní takto:

*Křivce roviny $\xi$, jež je samodružna v involuci $J$, odpovídá v rovině $\xi'$ křivka dvojnásob počítaná.*

## III.

18. **Užijeme předchozích výkladů na případ křivky šestého stupně $k_6$ v rovině $\xi$ s osmi dvojnásobnými body $A_1, \ldots, A_8$.** Jí odpovídá v rovině $\xi'$ křivka stupně

$$6 \times 12 - 8 \times 8 = 8\text{-ho},$$

ježto křivka $k_6$ prochází osmi hlavními body čtvrtého stupně, každým dvakráte. Avšak křivka $k_6$ je samodružna v involuci $J$ (v. odst. 3.), odpovídá jí tudíž v rovině $\xi'$ křivka dvojnásobná, ovšem stupně čtvrtého, $k'_4$. Křivka $k_6$ protne hlavní křivku $s_9$ celkem v 54 bodech. Z těch padne do každého z bodů $A_1, \ldots, A_8$ šest (tyto body jsou trojnásobné pro $s_9$, v. odst. 5.), úhrnem 48; mimo hlavní body protnou se tedy obě křivky v šesti bodech. I je bod $S'$ šestinásobný pro křivku odpovídající křivce $k_6$; křivka $k'_4$ má tedy $S'$ za bod trojnásobný. Hlavní křivky stupně třetího, totiž $d_3$, $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$, protne $k_6$ mimo body $A_1, \ldots, A_8$, jež platí za šestnáct průsečíků, ještě ve dvou bodech; $k'_4$ prochází tedy každým z bodů $D'$, $T'_1$, $T'_2$, $T'_3$, $T'_4$ jednoduše. Body $S'$, $D'$, $T'_i$ platí pro určení křivky $k'_4$ za jedenáct podmínek; je tedy tato křivka určena dalšími třemi body, což souhlasí s tím, že také křivka $k_6$ s danými osmi body dvojnásobnými je určena dalšími třemi body.

*Transformace $T[1, 2]$ převádí tedy křivku šestého stupně s osmi body dvojnásobnými na racionální křivku stupně čtvrtého s trojnásobným bodem*; i lze z theorie této jednodušší křivky činiti závěry na theorii oné křivky šestého stupně, což v dalším budiž ukázáno.

19. Přímka vedená bodem $D'$ protne $k'_4$ ještě ve třech bodech, ty se promítají z bodu $S'$ třemi paprsky. Těmto třem bodům odpovídají na $k_6$ tři dvojice involuce $J$, jež jsou na křivce vyťaty třemi různými křivkami svazku $\Sigma$, jichž spojnice však — v důsledku základní konstrukce z odst 4. — procházejí všechny týmž bodem přímky $d$, bodem, jenž odpovídá zvolenému paprsku bodem $D'$. Tím je dokázáno, že každým bodem přímky $d$ procházejí tři spojnice dvojic involuce $J$, jež leží na křivce $k_6$. Uvážíme-li však, že přímka $d$ je obecná přímka roviny $\xi$, seznáme, že vyslovená věta platí pro kterýkoliv bod roviny. Tím je dokázáno:

*Spojnice dvojic bodových na křivce šestého stupně s osmi dvojnásobnými body*, (sdružených v involuci $J$ čili) *vyťatých na křivce kubickými křivkami svazku, jehož base je určena těmito osmi body, obalují křivku třídy třetí $k_{III}$.*

Stupeň této křivky určíme, když určíme počet průsečíků přímky $d$ — stále pamatujíce, že je to přímka v obecné poloze — s křivkou $k_{III}$. Z takového průsečíku lze ke křivce vésti jen dvě tečny, z nichž jednu třeba počítati dvakráte. Snadno nahlédneme, že těmto průsečíkům odpovídají ve vztahu $(D')$ paprsky, jež protnou křivku $k'_4$ (mimo $D'$), ještě ve dvou bodech, z nichž jeden třeba počítati dvakráte. Ale to jsou zřejmě tečné vedené z bodu $D'$ ke křivce. Ježto $k'_4$ je křivka třídy šesté, lze z $D'$ vésti (mimo tečnu v tomto bodě) ještě čtyři tečny ke křivce. Protne tedy $d$ křivku $k_{III}$ ve čtyřech bodech. *Tato křivka je* *tedy stupně čtvrtého*; *z toho plyne, že má dvojnásobnou tečnu a je tedy racionální.* Tím se doplňuje předcházející věta.[5])

20. V rovině $\xi$ buďtež dány tři body $X_1$, $Y_1$, $Z_1$; jimi a dvojnásobnými body $A_1, \dots, A_8$ je určena křivka šestého stupně $k_6$, jak už bylo připomenuto. Úlohu, sestrojiti tuto křivku, rozřešíme rovněž snadno užitím výsledku odst. 18. Sestrojíme v rovině $\xi'$ body $X'$, $Y'$, $Z'$ odpovídající bodům $X_1$, $Y_1$, $Z_1$; trojnásobným bodem $S'$ a jednoduchými $D'$, $T'_1$, $T'_2$, $T'_3$, $T'_4$, $X'$, $Y'$, $Z'$ je právě určena křivka $k'_4$ odpovídající hledané křivce $k_6$. Křivku $k'_4$ určenou, jak právě bylo řečeno, dovedeme sestrojiti, na př. tím, že ji převedeme dvěma kvadratickými transformacemi na kuželosečku. Další body této křivky se pak sestrojují lineárně. Tyto body se pak transformací $T[1, 2]$ převádějí ve dvojice křivky $k_6$, čímž je její konstrukce provedena.

Lze pak od této nepřímé konstrukce dojíti ke konstrukci přímé. Neboť když už je určeno předchozím způsobem devět dvojic bodových, je určeno také devět tečen křivky $k_{III}$, čímž je tato křivka dostatečně určena; dovedeme pak lineárně sestrojiti její dvojnásobnou tečnu.[6]) Jakmile je tato přímka nalezena, dovedeme nejen sestrojiti křivku $k_{III}$, nýbrž také uvésti svazek jejích tečen v projektivní vztah se svazkem křivek $\Sigma$; pak se další konstrukce děje tak, že k libovolné křivce svazku $\Sigma$ sestrojíme dle této projektivnosti příslušnou tečnu křivky $k_{III}$, jež ji protne mimo bod $T$, známý už předem lineárně, ještě v hledané dvojici. Ta se ovšem sestrojí kvadraticky.

21. Stupeň křivky $k'_4$ se snižuje vhodnou volbou přímky $d$. Vezmeme-li za $d$ jednu tečnu křivky $k_{III}$, protne $k_6$ tuto přímku v jedné ze čtyř dvojic, které jsme nazvali (v. odst. 11.) $T_{i_1}$, $T_{i_2}$. Ale to jsou body hlavní prvního stupně; tím se tedy stupeň křivky odpovídající křivce $k_6$ snižuje o dva, tedy stupeň křivky $k'_4$ o jednu; křivce $k_6$ odpovídá pak racionální křivka stupně třetího, mající dvojnásobný bod $S'$, jednoduchý $D'$; z bodů $T'_i$ jeden — jak se snadno shledá — na této křivce neleží.

---

[5]) Je to zvláštní případ věty obecně platné o křivkách hyperelliptických. V. Bertini, „La geometria delle serie etc.“ Ann. di mat. (2), 22.

[6]) V. mou práci »O zvláštním druhu konstrukcí« ve Věstníku král. čes. spol. nauk 1914.

Vezmeme-li konečně za $d$ dvojnásobnou tečnu křivky $k_{III}$, protne $k_6$ tuto přímku ve dvou ze zmíněných čtyř dvojic, jak netřeba již podrobně vykládati. Tím se stupeň křivky odpovídající křivce $k_6$ sníží ještě o jednu jednotku; je to pak kuželosečka vedená body $S'$, $D'$ a dvěma z bodů $T_i$. [7])

# Některé příklady praktického užití nomografie.

(Ing. **Frant. Císař.**)

Dána-li rovnice tvaru:

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0,$$

kde $f_1$ značí funkci proměnné $x_1$, $f_2$ funkci $x_2$, a $f_3$, $g_3$ a $h_3$ funkce prom. $x_3$ a $x_4$, lze vyšetřiti rovnice soustav křivek (čar) $x_3$ a $x_4$, jichž průsečíky sdruženy jsou s body rovnoběžných stupnic $x_1$ a $x_2$ nomografické soustavy, ze vzorců: *)

$$\xi = \frac{h_3 - g_3}{h_3 + g_3}, \qquad \eta = \frac{-f_3}{h_3 + g_3}$$

kde $\xi$ a $\eta$ jsou souřadnice bodů vzhledem k osám: $X$, která spojuje počátky stupnic $x_1$, $x_2$ a $Y$, jdoucí uprostřed mezi přímkami $x_1$ a $x_2$ vzdálených od sebe o délku $= 2$.

Vzorců těchto možno s výhodou použíti v mnohých případech praktických k výpočtu a konstrukci příslušných nomogramů; ukázkou buďtež následující příklady.

1. *Nomogramm ku konstrukci perspektivních průmětů bodů útvaru daného půdorysem a nárysem.* (Obr. 1.)

Ve vzorci

$$x = \frac{bd}{a + d}$$

[7]) Ve svém pojednání zmíněném v pozn. 3. provedl jsem přímou konstrukci křivky šestého stupně s osmi dvojnásobnými body, jsou-li dány tři její body jednoduché. Tato přímá konstrukce záleží v nalezení dvojnásobné tečny křivky $k_{III}$. Uvážíme-li bedlivě, jakým požadavkem je tato tečna určena (str. 12., odst. 20. mého pojednání), shledáme, že tato přímá konstrukce v podstatě znamená, že se má určiti přímka $d$ tak, aby křivce $k_6$ odpovídala kuželosečka.

*) Viz: Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I. vol. 4 fasc. 3. Str. 384.