Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Císař

Některé příklady praktického užití nomografie

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 4-5, 262--268

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109396`

Vezmeme-li konečně za d dvojnásobnou tečnu křivky k_{III}, protne k_6 tuto přímku ve dvou ze zmíněných čtyř dvojic, jak netřeba již podrobně vykládati. Tím se stupeň křivky odpovídající křivce k_6 sníží ještě o jednu jednotku; je to pak kuželosečka vedená body S', D' a dvěma z bodů T_i.[7])

Některé příklady praktického užití nomografie.

(Ing. **Frant. Císař.**)

Dána-li rovnice tvaru:

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0,$$

kde f_1 značí funkci proměnné x_1, f_2 funkci x_2, a f_3, g_3 a h_3 funkce prom. x_3 a x_4, lze vyšetřiti rovnice soustav křivek (čar) x_3 a x_4, jichž průsečíky sdruženy jsou s body rovnoběžných stupnic x_1 a x_2 nomografické soustavy, ze vzorců:*)

$$\xi = \frac{h_3 - g_3}{h_3 + g_3}, \qquad \eta = \frac{-f_3}{h_3 + g_3}$$

kde ξ a η jsou souřadnice bodů vzhledem k osám: X, která spojuje počátky stupnic x_1, x_2 a Y, jdoucí uprostřed mezi přímkami x_1 a x_2 vzdálených od sebe o délku $= 2$.

Vzorců těchto možno s výhodou použíti v mnohých případech praktických k výpočtu a konstrukci příslušných nomogramů; ukázkou buďtež následující příklady.

1. Nomogramm ku konstrukci perspektivních průmětů bodů útvaru daného půdorysem a nárysem. (Obr. 1.)

Ve vzorci

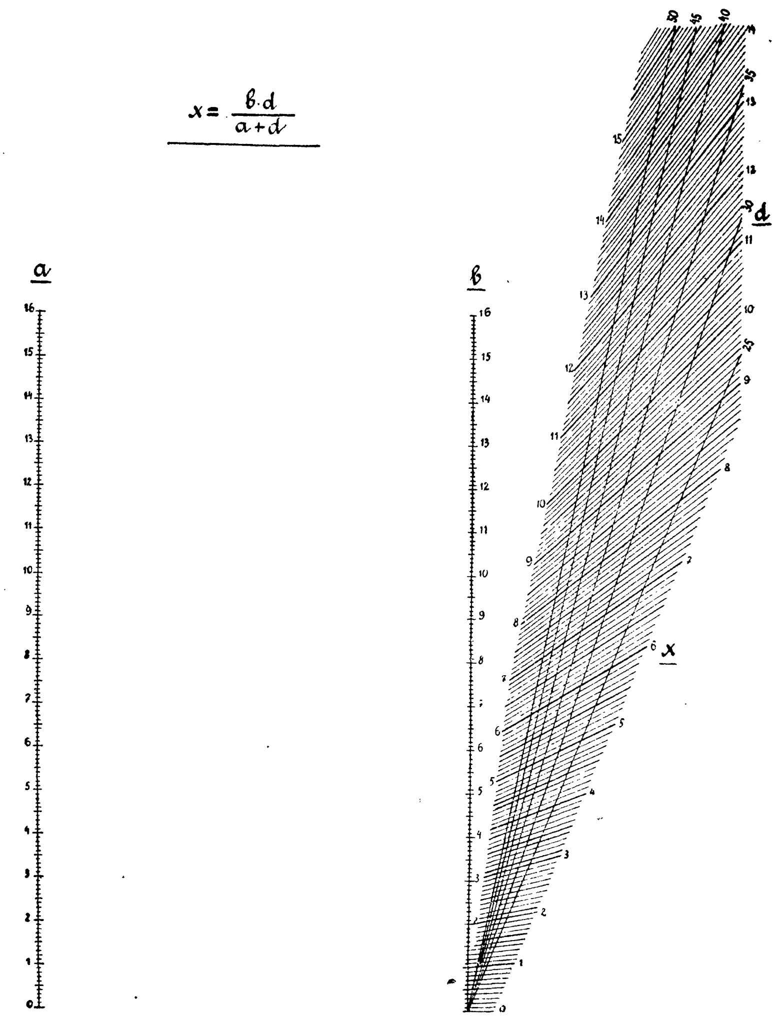
$$x = \frac{bd}{a + d}$$

---

[7]) Ve svém pojednání zmíněném v pozn. 3. provedl jsem přímou konstrukci křivky šestého stupně s osmi dvojnásobnými body, jsou-li dány tři její body jednoduché. Tato přímá konstrukce záleží v nalezení dvojnásobné tečny křivky k_{III}. Uvážíme-li bedlivě, jakým požadavkem je tato tečna určena (str. 12., odst. 20. mého pojednání), shledáme, že tato přímá konstrukce v podstatě znamená, že se má určiti přímka d tak, aby křivce k_6 odpovídala kuželosečka.

*) Viz: Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I. vol. 4 fasc. 3. Str. 384.

značí a hloubku bodu, b vzdálenost orthog. průmětu jeho od bodu hlavního, d distanci a x vzdálenost průmětu perspekt. od bodu hlavního.



Obr. 1.

V příslušné rovnici:

$$ax + dx - bd = 0$$

položeno:

$$\begin{aligned} f_1 &= a & g_3 &= x \\ f_2 &= b & h_3 &= -d \\ f_3 &= dx \end{aligned}$$

kde $f_1 = a$. $f_2 = b$ skýtají shodné stupnice metrické.

Pro soustavu ostatní platí potom vzorce

$$\xi = \frac{-(d+x)}{x-d}, \qquad \eta = \frac{-dx}{x-d}.$$

Vyloučením x obdržíme rovnici:

$$\eta = d\frac{\xi - 1}{2}$$

jakožto rovnici svazku přímek d, mající střed v bodě o souřadnicích $\xi = 1$, $\eta = 0$.

Vyloućením d plyne rovnice:

$$\eta = \frac{\xi + 1}{2} x$$

patřící svazku přímek x o středu v bodě $\xi = -1$, $\eta = 0$. Tím odůvodněna jest též snadná konstrukce tabulky, při které pro d zvolena minimální hodnota 25 *cm*, jakožto normální zraková vzdálenost.

2. *Nomogramm řešení trojúhelníků kosoúhlých a pravoúhlých.* (Obr. 2.)

Za základ zvolena tu rovnice:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega,$$

kde $\omega = 2R - \gamma$.

Rovnice ta z praktických ohledů převedena na:

$$4\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2 - b^2 - 2ab \cos \omega = 0$$

a položeno:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2, & g_3 &= 4 \\ f_2 &= \cos \omega & h_3 &= -2ab \\ f_3 &= -a^2 - b^2, \end{aligned}$$

načež jest:

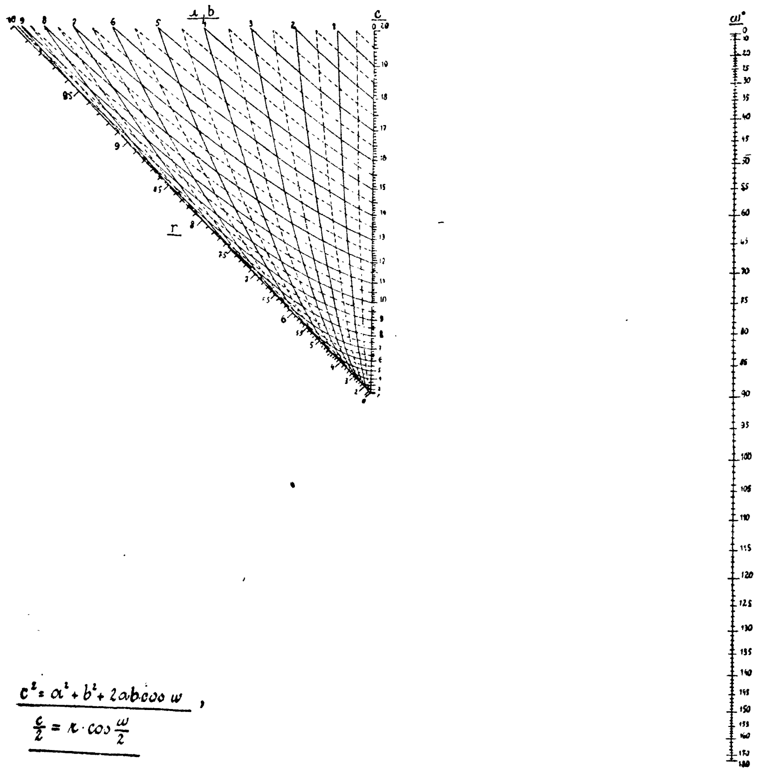
$$\xi = \frac{-(2+ab)}{2-ab}, \qquad \eta = \frac{a^2+b^2}{4-2ab}.$$

V případě tomto se obě soustavy křivek ztotožňují a rovnici příslušného systému obdržíme na př. vyloučením b; tím nabudeme po náležité úpravě, rovnici:

I. $a^4 (\xi - 1)^2 + 8a^2\eta (\xi - 1) + 4 (\xi + 1)^2 = 0$

aneb

II. $\xi^2 (a^4 + 4) + 8a^2\xi \eta - 2\xi (a^4 - 4) - 8a^2\eta + a^4 + 4 = 0.$



Obr. 2.

Příslušné hyperboly mají středy na přímce $\xi = 1$; ku konstrukci jich bodů užito stupnice c a počátečného a koncového bodu stupnice ω ($\omega = o$, $\omega = 180$), neboť v případě prvém platí $c = a + b$ a v druhém: $c = a - b$.

Pro $a = b = r$ plyne vztah:

$$\frac{c}{2} = r \cos \frac{\omega}{2}.$$

Stupnice r jest na přímce jdoucí bodem $\xi = -1$, $\eta = 0$ a bodem $\xi = 1$, $\eta = -1$ ($\omega = 180^0$); příslušné dělení obdržíme projekcí příslušných bodů stupnice c z bodu $\xi = 1$, $\eta = 1$ ($\omega = 0$, $c = 2r$).

Analyticky možno vyšetřiti rovnici uvedené přímky jakožto rovnici obalové čáry hyperbol.

Z rovnice II. plyne vyšetřením funkce odvozené vzhledem ku neodvisle proměnné a, rovnice:

$$\text{II}'. \qquad a^2(\xi - 1) + 4\eta = 0$$

a vyloučením a z obou rovnic vznikne po úpravě:

$$(2\eta + \xi + 1)(2\eta - \xi - 1) = 0$$

rovnice 2. přímek, z nichž na tabulce pouze prvá přichází k platnosti.

Nomogrammu uvedeného možno s výhodou užíti ku řešení různých úloh o trojúhelníku jak kosoúhlém, tak pravoúhlém, jak též z příslušných vzorců jest patrno.

3. Nomogramm vzpěrné pevnosti dřevěných trámů průřezu čtvercového. (Obr. 3.)

Průřez trámu a^2 lze vypočísti dle praktické formule z Rankinovy odvozené:

$$a^2 = \frac{1}{120} P\left(1 + \sqrt{1 + 1{\cdot}08 \frac{l^2}{P}}\right)$$

(oba konce trámu držány v původní ose klouby, a i l v cm, P v kg).

Ze vzorce odvozena napřed rovnice:

$$2P(120a^2 + 0{\cdot}54\,l^2) - 14400\,a^4 = 0$$

čili:

$$2P(12a^2 + 0{\cdot}054\,l^2) - 1440\,a^4 = 0$$

a tu zvoleno jest:

$$f_1 = 2P \qquad g_3 = 12\,a^2 + 0{\cdot}054\,l^2$$
$$f_2 = 0 \qquad h_2 = -0{\cdot}054\,l^2$$
$$f_3 = -1440\,a^4.$$

Potom totiž jest:

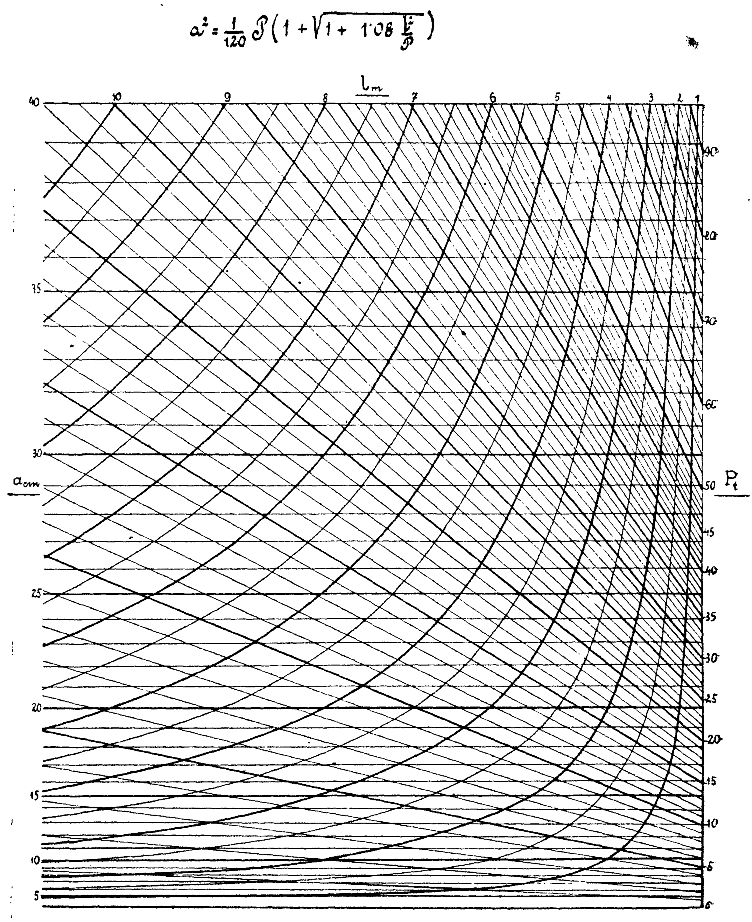
$$\xi = \frac{-12a^2 - 0{\cdot}108\,l^2}{12a^2} = -\left(1 + 0{\cdot}009\,\frac{l^2}{a^2}\right),$$

$$\eta = \frac{1440\,a^4}{12a^2} = 120\,a^2.$$

Jak patrno, odpovídá tu proměnné a soustava rovnoběžných přímek.

Rovnice křivek pro l plyne vyloučením a:

$$\xi\eta + \eta + 1{\cdot}08\, l^2 = 0$$



Obr. 3.

opět rovnice hyperbol, avšak o společném středu ($\xi = -1$, $\eta = 0$) a rovnoosých. (Asymptoty: $\eta = 0$, $\xi = -1$.)

Při konstrukci tabulky zvoleny pro souřadnice jednotky: pro ξ délka 2·5 *cm*, pro η 1 *cm*; pro P zvolena za jednotku síla 10.000 $kg = 10\ t$ a pro a i l délka 1 *m*.

Vzhledem k okolnosti, že příslušné přímky spojující body stupnice P s bodem $\xi = 1$, $\eta = 0$ ($f_2 = 0$) tvoří tu svazek paprskový, který mohl býti předem narýsován, odpadá tu, při pracování s tabulkou, užívání pomocné přímky, a příslušné veličiny se určují jako na nomogrammu obyčejném, Cartesiovém.

Dvě poznámky ku specielnímu případu problému tří těles.

I.

Od **K. Petra.**

Specielním případem problému tří těles, o nějž jde, zabýval se *V. V. Heinrich* ve článku „Příspěvek k theorii Darwinových oscillujících satellitů", Časopis pro pěstování mathem. a fysiky, 42, 1913, str. 175. a násl. Tu se pokusil rozšířiti některé známé již výsledky platné za předpokladu $e = 0$ (e jest excentrita elliptických drah prvých dvou základních těles) i pro případ $e > 0$. Pisateli těchto řádků zaslány resp. vysloveny byly z různých stran námitky proti výkladům a postupu V. V. Heinricha v cit. pojednání, jakož i v jeho pojednání v poslední době vydaném a téže věci se týkajícím. O námitkách těchto bude — jak doufám — pojednáno v příštím ročníku Časopisu. Zabývaje se však tímto předmětem, dospěl jsem ku přesvědčení, že rovnice, na kterých V. V. Heinrich vyšetřování svá založil, jsou málo vhodné k vytčenému účelu, a snažil jsem se odvoditi jiné východisko, které by dovolovalo pohodlněji a přehledněji řešiti zmíněný problém. Pan *V. Nechvíle,* kterému jsem rovnice příslušné ústně vyložil, zavedením nové neodvisle proměnné (místo času) přivedl je na tvar zvláště jednoduchý, který může býti velmi užitečný; bez potíží lze z nich činiti zejména důsledky pro pohyb třetího tělesa v okolí libračního centra. Důsledky ty jsou v různých směrech zajímavé, výklad jich bude podán při zevrubném rozboru rovnic Nechvílových.

Buďtež dány tři tělesa 1, 2, 3; prvé dvě o hmotách m_1, m_2; za hmotu třetího dosaďme do rovnic pro problém tří těles $m_3 = 0$. Počátek souřadnic položíme do těžiště systému (t. j.