

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Závíška

Elektromagnetické vlny na dielektrickém drátu. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 229--240

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109370>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1924

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

nečna ať již jen potenciálního či aktuálního. Tato myšlenka jest vlastně jen obměnou problému Descartesova. Jak je to možno, že člověk, ačkoli je ve všem omezen a za celou dobu svého života zažije jen konečný počet od sebe rozeznatelných vněmů, přece dospívá ku pojmu nekonečna?

Kdyby opravdu podkladem pro transientní platnost matematických teorií mohla být pouze smyslová zkušenost, pak by ovšem na př. z celé infinitesimální analýzy zůstala transientní platnost jen aproximativním vztahům vyjádřeným nerovnostmi a byla by zcela vyloučena možnost, že by spojité funkce bez derivací mohly učiniti službu theoretické fyzice.

Jakmile však od pouhého popisu smyslových jevů přecházíme k jejich výkladu pomocí hypotetických realit skrytých za jevy, nemůžeme nikdy předem říci, že se nám nejlépe neosvědčí ta či ona matematická teorie, pro niž jsme dosud žádnou reálnou interpretaci neměli. To nás sice ještě neopravňuje k tomu, abychom Cantorovi nebo Perrinovi dali zcela za pravdu, ale s druhé strany nám nedovoluje prohlašovati předem o matematických teoriích, že nikdy nenajdou aplikace ve světě vnějším.

*

A propos de la signification réelle des mathématiques.

(Extrait de l'article précédent.)

Résumé: La question, si chaque théorie mathématique, même la plus abstraite, peut trouver son interprétation dans le monde des réalités physiques, est irrésoluble.

Elektromagnetické vlny na dielektrickém drátu.

Napsal *Frant. Závíška*.

Ukázal jsem,¹⁾ že úloha stanovití vlnovou délku elektromagnetických vln dané periody τ , postupujících po kruhovém válci dielektrickém poloměru a , který je obklopen jiným dielektrikem uzavřeným v sousedém válci kruhovém poloměru b , z látky nekonečně dobře vodivé, vede k rovnicím

$$\frac{1}{x} \frac{J'(x)}{J(x)} = \frac{1}{n^2 y} \frac{J'(y) N(\vartheta y) - N'(y) J(\vartheta y)}{J(y) N(\vartheta y) - N(y) J(\vartheta y)} \quad (1)$$

$$a \quad y^2 - x^2 = a^2 \alpha^2 (1 - n^2), \quad (1')$$

¹⁾ Časopis 52, 186. 1922.

kdež J a N jsou Besselovy funkce nultého řádu, n je index lomu vnitřního dielektrika vzhledem k vnějšímu, $\vartheta = b/a$ je poměr poloměrů obou válců; je patrně $\vartheta > 1$, konečně α_2 je 2π -násobná převratná hodnota volné vlnové délky příslušící kmitům periody τ v dielektriku vnějším (druhém), t. j. vlny, jež v něm vznikne, prostírá-li se dielektrikum do nekonečna.²⁾ Hledaná vlnová délka λ souvisí s kořeny x a y rovnic (1) a (1') vztahy

$$x = q_1 a = a \sqrt{\alpha_1^2 - \beta^2} \quad y = q_2 a = a \sqrt{\alpha_2^2 - \beta^2}, \quad (2)$$

kdež $\beta = 2\pi/\lambda$ a α_1 má též význam pro vnitřní dielektrikum jako α_2 pro dielektrikum vnější. Je $\alpha_1 = n\alpha_2$. Fyzikální význam mají jen reálné, nebo ryze imaginární hodnoty x a y . Ze základních vlastností Besselových funkcí plyne mimo to, že obě strany rovnice (1) jsou sudé funkce proměnných x a y ; poněvadž totéž platí i o rovnici (1'), stačí, zůstaneme-li jen při kladných hodnotách x a y , nulu v to čítajíc.

1. Předpokládejme nejdříve, že y je ryze imaginární. Položíme $y = i\eta$, kdež η je reálné; dále, aby se diskuse zjednodušila, zavedeme místo Besselovy funkce N první funkci Hankelovu H , která souvisí s funkcemi J a N vztahem

$$H(x) = J(x) + iN(x).$$

Dostaneme tak místo rovnic (1) a (1')

$$\frac{1}{x} \frac{J'(x)}{J(x)} = \frac{1}{n^2 i \eta} \frac{J'(i\eta) H(i\vartheta \eta) - H'(i\eta) J(i\vartheta \eta)}{J(i\eta) H(i\vartheta \eta) - H(i\eta) J(i\vartheta \eta)} \quad (3)$$

$$a \quad \eta^2 + x^2 = a^2 \alpha_2^2 (n^2 - 1). \quad (3')$$

Pro ryze imaginární argumenty je funkce J reálná, funkce H ryze imaginární, J' je také ryze imaginární, kdežto H' je reálné. Je tedy pravá strana rovnice (3) reálná. Pro dosti malé hodnoty η je přibližně

$$J(i\eta) = 1 \quad H(i\eta) = -\frac{2i}{\pi} \log \operatorname{nat} \frac{2}{\gamma \eta}$$

$$J'(i\eta) = -\frac{i\eta}{2} \quad H'(i\eta) = \frac{2}{\pi \eta}$$

kdež γ je převratná hodnota Eulerovy konstanty; rovná se 1,7811. Když to dosadíme do pravé strany rovnice (3), nalezneme snadno,

²⁾ Na str. 190 l. c. místo $\alpha_2 = n\alpha_1$ má být $\alpha_1 = n\alpha_2$; rovnice (7') str. 191 přejde pak v rovnici (1') uvedenou svrchu.

že, konverguje-li η od kladných hodnot k nule, stává se pravá strana kladně nekonečně velkou řádu $1/\eta^2$. Pro veliké hodnoty η lze psáti

$$\begin{aligned} J(i\eta) &= \frac{e^{\eta}}{\sqrt{2\pi\eta}} & H(i\eta) &= -i \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{2\pi\eta}} \\ J'(i\eta) &= -i \frac{e^{\eta}}{\sqrt{2\pi\eta}} & H'(i\eta) &= \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{2\pi\eta}}, \end{aligned} \quad (3)$$

poněvadž pak je $\vartheta > 1$, redukuje se pravá strana rovnice (3) pro dosti veliká η na $1/n^2 \eta$, konverguje tedy k nule, když η roste do nekonečna.

Celkem lze říci, že pro všechny reálné hodnoty η pravá strana rovnice (3) je reálná a kladná; roste-li η od nuly do nekonečna, klesá pravá strana od hodnot nekonečně velkých k nule.

Aby tedy rovnice (3) byla splněna pro reálné hodnoty η , musí i levá strana její býti reálná a kladná. První podmínce bude vyhověno, ať je x reálné nebo ryze imaginární, podmínce druhé však jen tehdy, je-li x reálné, neboť pro ryze imaginární hodnoty x je levá strana rovnice (3) vždy záporná. Reálným hodnotám η (ryze imaginárním hodnotám y) mohou tedy odpovídati jen reálné hodnoty x . Z rovnice (3') viděti dále, že musí býti $n > 1$.

Roste-li x od nuly do nekonečna, mění levá strana rovnice (3) neustále své znamení. Zhruba probíhají její hodnoty takto. Pro $x=0$ rovná se $-\frac{1}{2}$. S rostoucím x klesá a pro $x=2.40\dots$, což je nejmenší kladný kořen rovnice $J(x)=0$, stává se záporně nekonečnou. Hned na to přejde k hodnotám kladně nekonečným, s rostoucím x zase klesá a zůstává kladnou až do $x=3.83\dots$, což je nejmenší kladný kořen rovnice $J'(x)=0$. Pak je záporná, klesá dále a, když x dosáhne druhého kladného kořene rovnice $J(x)=0$ ($x=5.52\dots$), stává se zase záporně nekonečnou. Přechází ihned k hodnotám kladným a je kladná až do $x=7.02\dots$, což je druhý kladný kořen rovnice $J'(x)=0$. Tak se to neustále opakuje. Pro veliké hodnoty x je přibližně

$$J(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad J'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad (4)$$

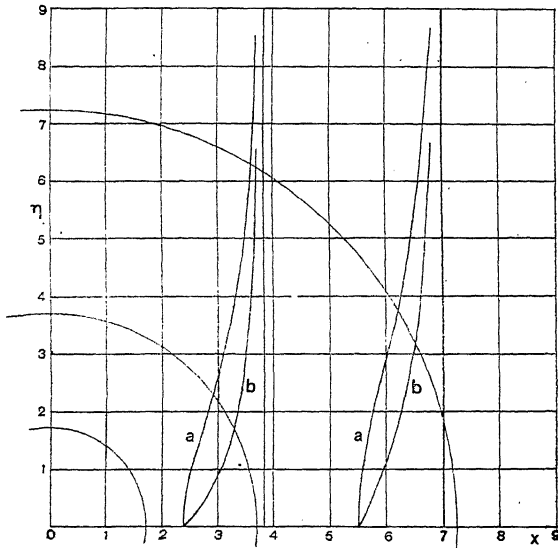
tedy

$$\frac{J'(x)}{x J(x)} = -\frac{1}{x} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

a křivka udávající závislost výrazu na levé straně rovnice (3) připomíná křivku funkce

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Je tedy levá strana rovnice (3) kladná v intervalech, jejichž meze jsou dány libovolným kořenem rovnice $f(x) = 0$ a nejbližší vyšším kořenem rovnice $f'(x) = 0$. Kořeny první rovnice jsou postupně 2·40..., 5·52..., 8·65... a blíží se asymptoticky ke $(k - \frac{1}{4})\pi$, kdež k je číslo celé, kořeny rovnice druhé jsou 3·83..., 7·02..., 10·2... a konvergují k hodnotě $(k + \frac{1}{4})\pi$. V každém z těchto intervalů nabývá levá strana rovnice (3) všech kladných hodnot. Každému reálnému a kladnému η odpovídá tedy v rovnici (3) ne-



Obr. 1.

konečně mnoho reálných a kladných hodnot x ; uvnitř každého z uvedených intervalů leží jedna z nich.

V obr. 1. je znázorněna souvislost mezi hodnotami x a η , jak je dána rovnicí (3), a to pro $n=2$ a $\vartheta=1.1$ (křivky *a*) a pro $n=2$ a $\vartheta=3$ (křivky *b*). Nezávisle na ϑ i na n začíná každý svazek křivek u $x=2.40...$, $5.52...$ atd., přímky $x=3.83...$, $7.02...$ atd. jsou asymptotami. Křivky stoupají spočátku tím pomaleji, čím větší je ϑ (i n , jež, jak řečeno, musí být větší než 1).

Rovnice (3') je rovnice kruhu o poloměru $a\alpha_2/\sqrt{n^2-1}$; jeho průseky s předešlými křivkami určují patrně kořeny rovnic (3) a (3'), z nichž pak možno vypočítati hledanou délku vlnovou λ . Poloměr kruhu je přímo úměrný poloměru a dielektrického drátu, dále je přímo úměrný α_2 , čili nepřímou úměrný délce vlné vlny příslušící

kmitům dané periody τ v druhém dielektriku. Postupujeme-li od velmi dlouhých period τ (stavů quasistatických) k periodám kratším a kratším, klesá tato délka, která je τ přímo úměrná, a α_2 i poloměr kruhu daného rovnici (3') roste od nuly do nekonečna. Spočátku tedy, pokud jde o kmity period dosti dlouhých, jsou poloměry kruhů tak malé, že žádný z nich neprotíná křivky znázorňující rovnici (3); postupné vlny nevznikají, pokud ovšem hledíme zatím jen k těm řešením rovnic (1) a (1'), jež dávají reálné hodnoty x a ryze imaginární hodnoty y . Teprve když perioda τ klesne a tím α_2 vzroste tak, že je

$$a \alpha_2 \sqrt{n^2 - 1} = 2.40,$$

vznikne první postupná vlna. Pro ni je η i y rovno nule, podle druhé rovnice (2) je tedy $\beta = \alpha_2$, t. j. vzniklá postupná vlna má touž délku jako volná vlna v dielektriku vnějším a ovšem i touž rychlost. Je to docela stejné jako u vln, jež se šíří po vodivém drátu, i jejich délka se rovná délce volné vlny ve vnějším dielektriku. S klesající periodou roste poloměr kruhu dále; η nabývá reálných hodnot kladných, y hodnot kladně imaginárních, čím dále tím větších. Z druhé rovnice (2) plyne $\beta > \alpha_2$; délka vlny postupující po drátu je menší než délka vlny volné, také její rychlost klesá. Je-li

$$a \alpha_2 \sqrt{n^2 - 1} = 5.52,$$

vznikne nová vlna, jež se zase šíří po drátu rychlostí volných vln ve vnějším dielektriku, s klesající periodou klesá i rychlost této vlny, pak zase vystoupí nová vlna atd. To je tedy totéž, co našli *Hondros* a *Debye* pro vlny postupující po jediném dielektrickém drátu; ti ovšem předpokládali, že vnějším dielektrikem je vakuum.

Pole vyšetříme jen ve vnějším dielektriku a to jednak pro velmi malé hodnoty η , čili pro vlny, jež postupují po dielektrickém drátu rychlostí skoro takovou, jako kdyby to byl drát vodivý, jednak pro veliké hodnoty η , čili pro velmi malá τ . Pro složky elektrické a magnetické síly ve vnějším dielektriku byly nalezeny výrazy³⁾

$$E_{2z} = [A_2 J(q_2 r) + B_2 N(q_2 r)] e^{i(\omega t - \beta z)},$$

$$E_{2r} = \frac{i\beta}{q_2} [A_2 J'(q_2 r) + B_2 N'(q_2 r)] e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$$H_{2\varphi} = -\frac{i\omega\epsilon_2}{c q_2} [A_2 J'(q_2 r) + B_2 N'(q_2 r)] e^{i(\omega t - \beta z)}.$$

Při tom je

$$A_2 J(q_2 b) + B_2 N(q_2 b) = 0,$$

³⁾ I. cit. pag. 189.

aneb podle označení, jehož užíváme,

$$A_2 J(i \vartheta \eta) + B_2 N(i \vartheta \eta) = 0.$$

Vypočteme odtud B_2 , dosadíme do výrazů pro složky elektrické a magnetické síly, položíme $q_2 r = q_2 a \cdot r/a = i \eta r/a$ a označíme periodický člen spojený s konstantním faktorem, který se vyskytuje ve všech třech výrazech, P . Dostaneme tak, zavedeme-li zase Hankelovu funkci H místo N ,

$$E_{2z} = [J(i \eta \frac{r}{a}) H(i \vartheta \eta) - H(i \eta \frac{r}{a}) J(i \vartheta \eta)] P$$

$$E_{2r} = \frac{\beta a}{\eta} [J(i \eta \frac{r}{a}) H(i \vartheta \eta) - H(i \eta \frac{r}{a}) J(i \vartheta \eta)] P$$

$$H_{2\varphi} = -\frac{\omega \epsilon_2 a}{c \eta} [J(i \eta \frac{r}{a}) H(i \vartheta \eta) - H(i \eta \frac{r}{a}) J(i \vartheta \eta)] P.$$

Je-li η velmi malé, možno do posledních výrazů dosaditi za J přímo 1, členy s J' možno vynechati. Dále je

$$H(i \vartheta \eta) = -\frac{2i}{\pi} \log \operatorname{nat} \frac{2}{\gamma \vartheta \eta} \quad H(i \eta \frac{r}{a}) = -\frac{2i}{\pi} \log \operatorname{nat} \frac{2a}{\gamma r \eta}$$

$$H'(i \eta \frac{r}{a}) = \frac{2a}{\pi r \eta};$$

když to dosadíme do výrazu pro složky elektrické síly, vidíme ihned, že je E_{2z} velmi malé proti E_{2r} . Elektrické silokřivky stojí téměř kolmo na vnitřním válci, zase právě tak, jako kdyby byl vodivý. Pro veliká η je naopak E_{2z} veliké proti E_{2r} ; elektrická síla je skoro rovnoběžná s osou válců a závislost její na vzdálenosti r od osy válců je dána výrazem

$$\frac{1}{r} \left[e^{\eta \left(\vartheta - \frac{r}{a} \right)} - e^{-\eta \left(\vartheta - \frac{r}{a} \right)} \right];$$

pole klesá s rostoucím r mnohem pomaleji než v případě, který vyšetřovali *Hondros* a *Debye*.

2. Budiž nyní y reálné; pravou stranu rovnice (1) ponecháme v původním tvaru. x nechť je ryze imaginární; položíme $x = i\xi$, kdež ξ je reálné. Rovnice (1) a (1') přejdou tím v

$$\frac{1}{i\xi} \frac{J(i\xi)}{J(i\xi)} = \frac{1}{n^2 y} \frac{J(y) N(\vartheta y) - N'(y) J(\vartheta y)}{J(y) N(\vartheta y) - N(y) J(\vartheta y)} \quad (5)$$

$$a \quad y^2 + \xi^2 = a^2 \alpha^2 (1 - n^2). \quad (5)$$

Toto řešení je patrně možné jen tehdy, je-li $n < 1$, čili když dielektrická konstanta prostředí vnějšího je větší než prostředí vnitřního. To by bylo splněno, kdyby šlo na př. o skleněnou trubici vně polepenou staniolem.

Pro velmi malé hodnoty y je přibližně

$$J(y) = 1 \quad N(y) = -\frac{2}{\pi} \log \operatorname{nat} \frac{2}{y}$$

$$J'(y) = -\frac{y}{2} \quad N'(y) = \frac{2}{\pi y};$$

když to dosadíme do výrazu na pravé straně rovnice (5), nalezneme snadno, že se s y klesajícím k nule stává tento výraz záporně nekonečně velkým. Pro veliké hodnoty y je

$$N(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \quad N'(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right);$$

limitní hodnoty $J(y)$ a $J'(y)$ plynou z rovnic (4). Pravá strana rovnice (5) přejde po dosažení v

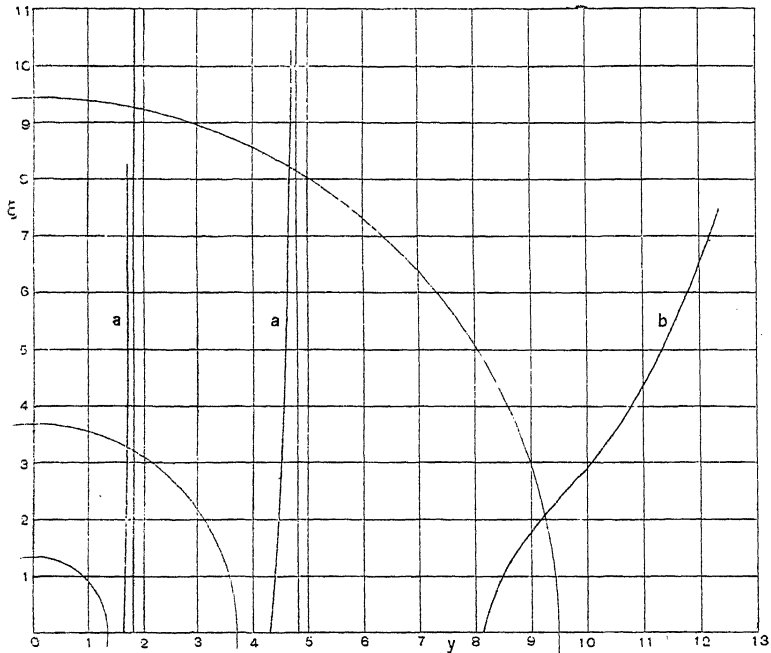
$$-\frac{1}{n^2 y} \cot(\vartheta - 1)y.$$

Průběh závislosti výrazu na pravé straně rovnice (5) na y připomíná tedy křivku $-\cot(\vartheta - 1)y$. S rostoucím y onen výraz neustále stoupá a v bodech, jejichž souřadnice y se asymptoticky blíží k hodnotě dané rovnicí $(\vartheta - 1)y = k\pi$, přechází od hodnot kladně nekonečných k hodnotám záporně nekonečným. V každém intervalu omezeném dvěma takovými body nabývá pravá strana rovnice (5) všech reálných hodnot.

Levá strana rovnice (5) je pro všechna reálná ξ také reálná, dále je záporná. Pro $\xi=0$ rovná se $-\frac{1}{2}$; s rostoucím ξ stoupá a konverguje k nule, když ξ dosahuje hodnot nekonečně velikých. Rovnici (5) vyhovíme tedy reálnými ξ a y jen tehdy, volíme-li y tak, aby levá strana její měla hodnoty mezi $-\frac{1}{2}$ a 0. Každému ξ odpovídá pak nekonečně mnoho hodnot y . Na obr. 2. jsou nakresleny křivky rovnice (5); počet byl proveden pro $n = \frac{1}{2}$ a pro $\vartheta = 2$ (křivky a), pak pro $n = \frac{1}{3}$ a $\vartheta = 1.1$ (křivka b). Křivky $\vartheta = 2$ jsou velmi strmé; u první z nich je $\xi=0$ pro $y=1.62$, ale již pro y málo menší než 1.8 je ξ nekonečně veliké. U druhé je $\xi=0$ pro $y=4.3$ a pro $y=4.8$ je již nekonečně veliké. Další křivky následují ve vzdálenostech rovných asi π ; na obrazci měly by býti ještě

dvě. Křivka $\vartheta = 1.1$ začíná u $y = 8.1$, stoupá mnohem volněji, asymptota její je blízko $y = 16$.

Křivka (5') je kruh poloměru $a \alpha_2 \sqrt{1-n^2}$. Vidíme, že zase jako v předešlém případě pro velmi malá α_2 , čili pro velké periody τ , kruh neprotíná žádné křivky rovnice (5); postupné vlny jsou nemožné. Roste-li α_2 , nastane první průsek na ose y , čili pro $\xi = 0$; pak je i $x = 0$ a podle první rovnice (2) je $\beta = \alpha_1$. Délka λ postupně



Obr. 2.

vlny rovná se zase délce volné vlny příslušné dané periodě kmitové τ , ale nyní ve *vnitřním* dielektriku; šíří se také touž rychlostí. S rostoucím α_2 , čili s klesající periodou τ roste i ξ , β , které je nyní dáno rovnicí

$$\beta^2 = \alpha_1^2 + \frac{\xi^2}{a^2},$$

roste také, vlnová délka λ klesá. Současně však vznikají postupně nové a nové vlny, jejichž délky jsou zase spočátku rovny délkám volných vln ve vnitřním dielektriku, pak klesají. Výsledek je tedy stejný jako v předešlém případě; rozdíl je v tom, že nyní závisí kmitová perioda, při níž vznikne nová vlna, na ϑ i na n . Necht

jde na př. o skleněnou trubici, jejíž vnější stěna je vodivá. Vnitřní poloměr a budiž 1 cm, tloušťka stěny 1 mm, tedy $\vartheta=1\cdot1$. Za dielektrickou konstantu skla položíme 4, takže $n=\frac{1}{2}$; máme tedy případ znázorněný křivkou b v obr. 2. První vlna vznikne pro $y=8\cdot1$; podle druhé rovnice (2) je tedy

$$\alpha^2 - \beta^2 = 8\cdot1^2.$$

Dále je $\beta=\alpha_1$ a $\alpha_2=2\alpha_1$; toho vypočteme $\beta=2\cdot94$ a vlnová délka $\lambda=2\pi/\beta=2\cdot14$ cm. To je tedy nejdelší možná vlna postupná, ovšem zase, pokud hledíme jen k těm vlnám, jež odpovídají ryze imaginárním x a reálným y .

Složky elektrické a magnetické síly ve vnitřním dielektriku jsou⁵⁾

$$E_{1z}=[J(y)N(\vartheta y)-N(y)J(\vartheta y)]J\left(i\xi\frac{r}{a}\right)P$$

$$E_{1r}=\frac{\beta a}{\xi}[J(y)N(\vartheta y)-N(y)J(\vartheta y)]J\left(i\xi\frac{r}{a}\right)P$$

$$H_{1\varphi}=-\frac{\omega \varepsilon_1 a}{c \xi}[J(y)N(\vartheta y)-N(y)J(\vartheta y)]J\left(i\xi\frac{r}{a}\right)P;$$

v dielektriku vnějším je

$$E_{2z}=J(i\xi)\left[N(\vartheta y)J\left(y\frac{r}{a}\right)-J(\vartheta y)N\left(y\frac{r}{a}\right)\right]P$$

$$E_{2r}=\frac{i\beta a}{y}J(i\xi)\left[N(\vartheta y)J\left(y\frac{r}{a}\right)-J(\vartheta y)N\left(y\frac{r}{a}\right)\right]P$$

$$H_{2\varphi}=-\frac{i\omega \varepsilon_2 a}{c y}J(i\xi)\left[N(\vartheta y)J\left(y\frac{r}{a}\right)-J(\vartheta y)N\left(y\frac{r}{a}\right)\right]P,$$

kdež P je zase periodický člen se stálým faktorem. Pro $\xi=0$, čili pro vlnu, jejíž délka se rovná délce volné vlny ve vnitřním dielektriku, jsou složky E_{1z} , E_{2r} , $H_{1\varphi}$ na r nezávislé; pole ve vnitřním dielektriku se ve směru radiálním nemění. Dále je

$$J\left(i\xi\frac{r}{a}\right)=1, \quad J'\left(i\xi\frac{r}{a}\right)/\xi=-ir/2a,$$

složky E_{1z} a E_{1r} jsou tedy stejného řádu. To platí i o složkách E_{2z} a E_{2r} . Pro veliká ξ je poměr $J(i\xi)/J(i\xi)$ v limitě roven $-i$

⁵⁾ viz rovnice I. c. pag. 189.

a poměr E_{1r}/E_{1z} konverguje k $1/\xi$; elektrická síla ve vnitřním dielektriku má směr osy válce.

3. Rovnicím (1) a (1') možno vyhověti i *reálnými* x a y . Dosa-díme-li do rovnice (1) za y jakékoli číslo reálné, vyhovíme jí nekonečně mnoho reálnými hodnotami x , stejně každému reálnému x odpovídá nekonečně mnoho reálných y . Křivky znázorňující vztah mezi x a y daný touto rovnicí protínají osu x -ovou v bodech, jejichž souřadnice splňují rovnici $J(x)=0$; souřadnice průsečíků s osou y -ovou jsou dány podmínkou, že levá strana rovnice (1) se rovná $-\frac{1}{2}$. První průsečíky jsou tedy $x=2.40\dots, 5.52\dots$ a konvergují ke $(k-\frac{1}{2})\pi$; poloha druhých průsečíků závisí na ϑ i na n , pro dosti velká y dala by se vypočísti z rovnice

$$\frac{1}{n^2 y} \cot(\vartheta-1)y = \frac{1}{2}.$$

Je jich také nekonečně mnoho. Křivky rovnice (1) probíhají pak tak, že první z nich spojuje první průsečík na ose x -ové s prvním průsečíkem na ose y -ové, druhá spojuje druhé dva průsečíky atd. Celkem mají tvar dosti složitý.

Rovnicí (1') je dána rovnoramenná hyperbola, jejíž reálnou osou je osa x -ová, je-li $n > 1$ a osa y -ová, je-li $n < 1$. Jde tu ovšem jen o tu větev, která leží v prvním kvadrantu, poněvadž hledíme jen ke kladným x a y , a při tom ještě jen o její část. Z rovnice (2), v nichž α_1, α_2 a β jsou veličiny reálné, je totiž viděti, že, jsou-li x a y také reálné, musí býti $x \leq a \alpha_1, y \leq a \alpha_2$. Bod o souřadnicích $x_0 = a \alpha_1 = n a \alpha_2, y_0 = a \alpha_2$ leží na hyperbole (1'); význam pro naše úvahy má tedy jen ta část hyperbolické větve, která je omezena na jedné straně osou, na druhé straně bodem x_0, y_0 .

Z toho plyne zase, že pro velmi malé hodnoty α_2 rovnice (1) a (1') nemají reálných řešení odpovídajících postupným, netlumeným vlnám; tyto vlny nevznikají. První taková vlna je možná teprve tehdy, když se stoupajícím α_2 hodnoty x_0 a y_0 vzrostou tak, že bod (x_0, y_0) leží na té křivce rovnice (1), která je počátku souřadnic nejbliže. Poněvadž $x_0 = n y_0$, jde o nejmenší kladný kořen rovnice

$$\frac{J'(n y_0)}{J(n y_0)} = \frac{1}{n} \frac{J'(y_0) N(\vartheta y_0) - N'(y_0) J(\vartheta y_0)}{J(y_0) N(\vartheta y_0) - N(y_0) J(\vartheta y_0)}. \quad (6)$$

Pro $\vartheta=1.1$ a $n=2$ je tento kořen asi 1.09, pro $\vartheta=1.1$ a $n=\frac{1}{2}$ asi 4.36. Dosa-díme-li do rovnic (2) $x=a \alpha_1, y=a \alpha_2$, dostaneme $\beta=0$; vlnová délka λ je tedy nekonečně veliká; jde tu o vlastní kmity systému složeného z obou válců. Délka volné vlny odpovídající těmto kmitům je pro první případ ($\vartheta=1.1$ a $n=2$) v druhém dielektriku, jehož konstanta je menší, asi 5.7 cm, v druhém případě ($\vartheta=1.1$ a $n=\frac{1}{2}$) je délka volné vlny v prvním dielektriku asi 2.9 cm.

Stoupá-li α_2 dále, roste i β a λ klesá. Vrchol hyperboly se vzdaluje od počátku souřadnic, až pro určité α_2 přijde do průsečíku první křivky dané rovnicí (1). Je-li $n > 1$, postupuje vrchol po ose x -ové; souřadnice jeho je $a \alpha_2 \sqrt{n^2 - 1}$, takže vrchol dospěje do průsečíku oné křivky s osou x -ovou, je-li

$$a \alpha_2 \sqrt{n^2 - 1} = 2 \cdot 40.$$

Pak je $y = 0$ a tato vlna je identická s první vlnou nalezenou v odstavci 1, v níž přechází, když α_2 roste dále, neboť pak se x stává imaginárním, kdežto y zůstává reálné. Současně rostou souřadnice x_0 a y_0 koncového bodu hyperbolické větve, až se dostanou na druhou křivku danou rovnicí (1); příslušná hodnota y_0 je dána druhým kladným kořenem rovnice (6). Vznikne nová vlna, jež s rostoucím α_2 přejde v druhou vlnu nalezenou v odst. 1. atd. Je-li $n < 1$, postupuje vrchol hyperboly po ose y -ové a vlny postupně vznikající přecházejí ve vlny nalezené v odst. 2.

Celkem tedy vznikají postupné vlny teprve, když kmitová perioda τ klesne pod určitou mez. To je totéž, co našli *Hondras* a *Debye* pro vlny na jediném dielektrickém válci; rozdíl je však v tom, že tato mez je nyní vyšší.

*

Les ondes électromagnétiques sur un fil diélectrique.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur a montré ailleurs¹⁾ que la longueur de l'onde des vibrations qui se propagent le long d'un cylindre de révolution diélectrique au rayon a , entouré par un autre diélectrique contenu dans un cylindre coaxial au rayon b et absolument conducteur, est donnée par les équations (1) (1'), où I et N sont des fonctions de Bessel de l'ordre zéro, $\mathcal{D} = a/b$, puis

$$x = a \sqrt{\alpha_1^2 - \beta^2}, \quad y = a \sqrt{\alpha_2^2 - \beta^2}, \quad \alpha_1 = \frac{2\pi}{c\tau} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{c\tau} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2};$$

τ est la période de la vibration, ε_1 et μ_1 sont la constante diélectrique et la perméabilité du diélectrique intérieur, ε_2 et μ_2 les mêmes constantes pour le diélectrique extérieur, $n^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2$, β est la valeur réciproque de la longueur d'onde cherchée multipliée par 2π . Ce ne sont que les racines réelles ou purement imaginaires des équations (1) et (1') qui ont un sens au point de vue physique. La discussion de ces équations donne les résultats suivants:

¹⁾ Časopis LII., str. 186 (1922).

1. Si y est purement imaginaire ($= i\eta$), il faut que x soit réel et $n > 1$. Les racines des équations (1), (1') sont fournies par les intersections des courbes a ou b de la fig. 1. avec un cercle de rayon $a\alpha_2\sqrt{n^2 - 1}$. Les courbes a se rapportent au cas de $n = 2$, $\vartheta = 1.1$, les courbes b au cas de $n = 2$, $\vartheta = 3$. Si τ est grand (α_2 petit), le rayon du cercle est si petit qu'il ne coupe aucune des courbes; les ondes ne sont pas possibles. C'est seulement lorsque τ a baissé audessous d'une certaine limite que se produisent des ondes sur ondes, la vitesse desquelles est, au commencement, la même que celle de l'onde libre dans le diélectrique extérieur, mais qui tend ensuite vers zéro.

2. Si y est réel et x purement imaginaire, il faut que $n < 1$. Les racines des équations (1) et (1') sont fournies, maintenant, par les intersections des courbes de la fig. 2. (les courbes a se rapportent au cas de $n = \frac{1}{2}$ et $\vartheta = 2$, les courbes b au cas de $n = \frac{1}{2}$ et $\vartheta = 1.1$) avec un cercle de rayon $a\alpha_2\sqrt{1 - n^2}$. Les ondes se produisent seulement, lorsque τ a baissé audessous d'une certaine limite; leur vitesse est d'abord égale à la vitesse d'une onde libre dans le diélectrique intérieur, mais tend ensuite vers zéro.

3. Si x et y sont réels, les racines des équations (1), (1') sont fournies par les intersections des courbes représentant l'équation (1) avec l'hyperbole dont (2) est l'équation. Mais il faut qu'il soit $x \leq a\alpha_1$, $y \leq a\alpha_2$. Les ondes se produisent seulement, lorsque la période τ es audessous d'une certaine limite, qui est, cependant, supérieure à celles des deux premiers cas; si τ continue à décroître, ces ondes se changent en celles du cas 1) ou 2).