Eduard Čech

Nová metoda projektivní geometrie zborcených ploch

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 31--37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109365

Remarque sur les quartiques planes spéciales.

(Extrait de l'article précédent.)

On obtient des quartiques spéciales en demandant que le nombre des transformations quadratiques reproduisant la quartique elliptique plane diffère du nombre (de neuf) qui se présente dans le cas général. Puisqu'on peut — comme l'auteur a montré ailleurs — obtenir ces transformations par projection des homographies d'une quartique gauche, on peut s'attendre à ce qu'il sera aisé d'obtenir des courbes spécialisées comme il vient d'etre mentionné, en choisissant le centre de projection dans des positions spéciales par rapport aux figures qui sont importantes pour les homographies citées ci-dessus. L'auteur fait une étude sommaire de ces cas en choisissant comme centre de projection *a)* un point du cône quadratique contenant la quartique gauche, *b)* un point d'une face du tétraèdre polaire commun à toutes les quadriques contenant la quartique, *c)* un point d'une arête de ce tétraèdre, *d)* un point d'une surface de Voss de la quartique gauche respéctive (on nomme ainsi les six quadriques qui se reproduisent par seize homographies du groupe reproduisant la quartique). Dans ce dernier cas la courbe spéciale plane se reproduit par un groupe de seize transformations quadratiques; elle est caractérisée par cette propriété géométrique simple qu'elle est engendrée par deux involutions projectives de droites.

Nová metoda projektivní geometrie zborcených ploch.

Napsal *Eduard Čech.*

1. V následujícím hodlám stručně vyložiti novou metodu pro diferenciální studium zborcených ploch v obyčejném prostoru vzhledem ku projektivním transformacím. Doufám, že čtenář shledá, že tato metoda je mnohem jasnější a jednodušší než metoda Wilczynského. Označuji jediným písmenem, jako x, y, z $(\xi, \eta, \zeta \ldots)$ čtyři homogenní souřadnice bodu (roviny), $(x\,y\,z\,t)$ značí determinant z homogeních souřadnic čtyř bodů, $S\,x\,\xi$ znamená čtyřčlenný součet $x^1\,\xi^1 + x^2\,\xi^2 + x^3\,\xi^3 + x^4\,\xi^4$, $(x\,y\,z)$ značí čtyři souřadnice rovinové ξ tak, že jest identicky v t $(x\,y\,z\,t) = S\,\xi\,t$; duálně pro $(\xi\,\eta\,\zeta\,\tau)$, $(\xi\,\eta\,\zeta)$. Konečně značím $(x\,y)$ Plücherovy souřadnice přímkové $x^1\,y^2 - x^2\,y^1$, $x^2\,y^3 - x^3\,y^2 \ldots$; podobně $(\xi\,\eta)$.

2. Plocha přímková Π je určena, jsou-li dány dva proměnné body, jichž souřadnice y, z*) jsou funkcemi téhož parametru, a jest vytvořena přímkou o souřadnicích $(y\,z)$. Výrazy, které jsou určeny

*) Pro krátkost mluvím o bodech y, z a podobně.

plochou Π a nemění se projektivními transformacemi, jsou funkcemi y a z a jejích derivací a splňují tyto čtyři nutné a postačující podmínky:

A. Nemění se zavedením nového parametru.

B. Nemění se lineární homogení substitucí bodových souřadnic o numerických koeficientech a determinantu 1.

C. Nemění se, když místo y a z zavedeme resp.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \alpha y + \beta z, \\ \bar{z} &= \gamma y + \delta z, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou funkcemi parametru podrobenými jediné podmínce

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{1^a}$$

D. Nemění se, násobíme-li y a z současně týmž faktorem ϱ, který jest libovolnou funkcí parametru.

Přesněji řečeno, jak zde nehodlám blíže dokládati, tyto výrazy jsou určeny plochou Π jen tehdy, když zvolíme positivní smysl na tvořících přímkách, a nemění se projektivními transformacemi o positivním determinantu.

Vyjděme nejprve od určitého analytického vyjádření a zaveďme novou neodvisle proměnnou v kladouce

$$(yz\,dy\,dz) = \omega\, dv^2, \quad \omega = \pm 1. \tag{2}$$

Diferenciál dv je tím úplně určen, zvolíme-li positivní smysl na Π jako místu přímek. Derivace dle v značím čárkami. Způsob, jak jsme určili dv, je zřejmě invariantní vzhledem k operacím A, B, C, ne však vzhledem k operaci D. Tečná rovina plochy Π v bodě $\lambda y + \mu z$ jest $\lambda\eta + \mu\zeta$, kde

$$\eta = (yzy'), \quad \zeta = (yzz'). \tag{3}$$

Jest $Sy\eta = Sz\eta = Sy\zeta = Sz\zeta = Sy'\eta = Sy\eta' = Sz\zeta' = Sz'\zeta = 0$,

$$Sy\zeta' = Sz'\eta = -Sy'\zeta = -Sz\eta' = \omega.$$

Výrazy

$$\left.\begin{aligned} & a = -\frac{\omega}{2} Sy'\eta', \; b = -\frac{\omega}{2} Sy'\zeta' = -\frac{\omega}{2} Sz'\eta', \; c = -\frac{\omega}{2} Sz'\zeta', \\ & A = \frac{\omega}{2} S(y'\eta'' - y''\eta'), \; B = \frac{\omega}{4} S(y'\zeta'' - y''\zeta' + z'\eta'' - z''\eta'), \\ & \qquad C = \frac{\omega}{2} S(z'\zeta'' - z''\zeta') \\ & j = \frac{\omega}{4} S(y'\zeta'' - y''\zeta' - z'\eta'' + z''\eta') - 3(ac - b^2) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

i jejich derivace dle v jsou zřejmě invariantní při operacích A a Bí Nad to každý výraz invariantní při operacích A a B jest funkc. výrazů (4) a jejich derivací dle v. Lze totiž snadno dokázati, že platí diferenciální rovnice

$$
\begin{aligned}
y' &= -by + az + \dot{y}, & \dot{y}' &= -b\dot{y} + a\dot{z} - (B+j)\,y + Az,\\
z' &= -cy + bz + \dot{z}, & \dot{z}' &= -c\dot{y} + b\dot{z} - Cy + (B-j)\,z,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta' &= -b\eta + a\zeta + \dot{\eta}, & \dot{\eta}' &= -b\dot{\eta} + a\dot{\zeta} + (B-j)\,\eta + A\zeta,\\
\zeta' &= -c\eta + b\zeta + \dot{\zeta}, & \dot{\zeta}' &= -c\dot{\eta} + b\dot{\zeta} - C\eta - (B+j)\,\zeta.
\end{aligned}
\tag{5^a}
$$

Označme $$x = t_1 y + t_2 z, \quad \xi = t_1 \eta + t_2 \zeta \tag{6}$$
obecný bod plochy Π a tečnou rovinu v něm, při čemž operace C užíváme tak, aby x a ξ se neměnily, t. j. připojíme k (1) rovnice

$$t_1 = \alpha \bar{t}_1 + \gamma \bar{t}_2, \quad t_2 = \beta \bar{t}_1 + \delta \bar{t}_2. \tag{6^a}$$

Bod x opisuje asymptotickou čáru na Π, když

$$t'_1 = b\,t_1 + c\,t_2, \quad t'_2 = -a\,t_1 - b\,t_2. \tag{7}$$

3. Základní teorém mojí teorie ploch zborcených jest, že bilineární forma

$$f\begin{pmatrix} t_1; & \tau_1 \\ t_2 & \tau_2 \end{pmatrix} = A\,t_1 \tau_1 + B\,(t_1 \tau_2 + t_2 \tau_1) + C\,t_2\,\tau_2 + j\,(t_1 \tau_2 - t_2 \tau_1), \tag{8}$$

v níž τ_1, τ_2 jsou kogredientní s t_1, t_2, tedy $\tau_1 y + \tau_2 z$ je druhý bod přímky $(y\,z)$, jest invariantní při operacích A, B, C. Totéž tedy platí o výrazu j a o kvadratické formě

$$f\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = A t_1^2 + 2 B t_1\,t_2 + C t_2^2. \tag{8^a}$$

Bod x je fleknodální, když $f\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = 0$. Také rovnice $f\begin{pmatrix} t_1; & \tau_1 \\ t_2 & \tau_2 \end{pmatrix} = 0$

má jasný geometrický význam. Přímka $(\dot{y}\,\dot{z})$ je s přímkou $(y\,z)$ invariantně spojena vzhledem k operacím A, B, C. Náleží ostatně oskulačnímu hyperboloidu; obecněji, polární rovina bodu

$$\lambda_1 y + \lambda_2 z + \mu_1 \dot{y} + \mu_2 \dot{z}$$

vzhledem k oskulačnímu hyperboloidu jest

$$\lambda_1 \eta + \lambda_2 \zeta + \mu_1 \dot{\eta} + \mu_2 \dot{\zeta}.$$

Význam projektivity $f\begin{pmatrix} t_1; & \tau_1 \\ t_2 & \tau_2 \end{pmatrix} = 0$ na tvořící přímce $(y\,z)$ jest tento: Tečnou rovinu plochy Π v bodě $t_1\,y + t_2\,z$ protněme přímkou $(\dot{y}\,\dot{z})$ a v průsečíku sestrojme tečnou rovinu ku ploše vytvořené přímkou $(\dot{y}\,\dot{z})$; její průsečík s $(y\,z)$ je právě bod $\tau_1\,y + \tau_2\,z$.

4. Abych aspoň na příkladě objasnil, jak postupuji při této metodě v řešení geometrických otázek, hledejme oskulační lineární komplex Ω plochy Π a ptejme se pak, kdy je Ω pevný. Položíme-li $p = (y\,z)$, jsou přímky náležející Ω lineární kombinace

$$p,\ p',\ p'',\ p''',\ p''''.$$

Předpokládejme nejprve, že y a z byly tak voleny, že x opisuje asymptotickou čáru, kdykoli t_1 a t_2 jsou konstanty; což krátce vyjadřuji tím, že pravím, že Π je vztažena na asymptotické čáry. Dle (7) bude $a = b = c = 0$, a (5) znějí jednoduše

$$y'' = -(B+j)\,y + Az, \quad z'' = -Cy + (B-j)\,z. \tag{9}$$

Kladu-li $q = (\dot{y}\,\dot{z}) = (y'\,z')$, je tedy

$$p'' = 2\,(q - jp).$$

Přímky náležející Ω jsou tedy lineární kombinace p, p', q, q', q''. Jest dle (9)

$$\begin{aligned} p &= (yz), \quad p' = (yz') - (zy') \\ q' &= C\,(yy') - (B-j)\,(zy) - (B+j)\,(yz') + A\,(zz') \\ q'' &= r + 2\,(AC - B^2 + j^2)\,p - 2jq, \end{aligned}$$

kde jsem položil

$$r = C'\,(yy') - (B'-j')\,(zy') - (B'+j')\,(yz') + A'\,(zz').$$

Přímky komplexu Ω jsou tedy lineární kombinace p, p', q, q', r. Komplexu Ω náležejí především tvořící přímky hyperboloidu, oskulujícího Π podél p, té soustavy, jíž náleží p; tyto jsou ovšem lineární kombinace pouhých p, p', q. Tudíž náležejí Ω dvě přímky druhé soustavy na oskulačním hyperboloidu, t. j. asymptotické tečny ve dvou bodech na p. Ω bude nejjednodušeji určen, známe-li tyto dva body. Buď $t_1 y + t_2 z$ jeden z nich. Asymptotická tečna v něm jest

$$(t_1 y + t_2 z, t_1 y' + t_2 z') = t_1^2\,(yy') + t_1 t_2\,[(yz') + (zy')] + t_2^2\,(zz').$$

Toto může býti zřejmě jen tehdy lineární kombinací p, p', q, q', r, je-li tu lineární kombinace pouhých p', q', r, t. j. když

$$\begin{vmatrix} t_1^2, & 0, & C & C' \\ t_1 t_2, & 1, & B-j & B-j' \\ t_1 t_2, & -1, & B+j & B'+j' \\ t_2^2, & 0, & A & A' \end{vmatrix} = 0,$$

čili když

$$\begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ A't_1 + B't_2, & B't_1 + C't_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Komplex Ω je pevný, když existuje lineární homogení relace mezi p a prvými pěti derivacemi, čili když r' je lineární kombinací p, p', q, q', r. Avšak

$$r' = s + (AC - B^2 + j^2)'\,p - 2j'q,$$

kde

$$s = C''(yy') - (B'' - j'')\,(zy') - (B'' + j'')\,(yz') + A''\,(zz').$$

Jako výše vidíme, že s musí býti lineární kombinací $p', q'\ r$, což dává podmínku

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Že levé strany rovnic (10) a (11) jsou simultaní invarianty forem

$$f\binom{t_1}{t_2},\ f'\binom{t_1}{t_2},\ f''\binom{t_1}{t_2},$$

je ostatně a priori jasno, až na to, že se v nich nevyskytuje j. Poznamenávám letmo, že j se nevyskytuje tehdy a jen tehdy, běží-li o útvar invariantní nejen při kolineacích, nýbrž při projektivních deformacích.

Předpoklad, že Π je vztažena na asymptotické čáry, nevadí, abychom výsledek beze všeho mohli upraviti tak, aby byl platný kdykoli. Stačí zřejmě formy f', f'' nahraditi formami $\dot{f}$, $\ddot{f}$, jež vzniknou z f tak, že derivujeme netoliko koeficienty, nýbrž i t_1, t_2, a to dle rovnic (7). Jinak řečeno, stačí $A', \ldots C''$ ve výsledku nahraditi výrazy $\dot{A}, \ldots \ddot{C}$, kde

$$\dot{A} = A' + 2\,(Ab - Ba), \text{ atd.} \tag{12}$$

5. Abychom dospěli k výrazům invariantním také při operaci D, užijme této operace nejprve na kvadratickou formu $f\binom{t_1}{t_2}$. Uvážíme-li, že při tom jest nám dle (2) změniti také neodvisle proměnnou, dospějeme ihned k výsledku, že forma $f\binom{t_1}{t_2}$ se prostě násobí ϱ^{-4}. Nyní stačí formu $f\binom{t_1}{t_2}$ normalisovati, aby výrazy dříve definované, staly se invariantními i při operaci D. Předpokládáme-li nejprve, že fleknodální čáry plochy Π jsou různé (reální či imaginární), docílíme žádané normalisace požadavkem

$$B^2 - AC = \varepsilon,\ \ \varepsilon = \pm 1. \tag{13}$$

Příslušnou hodnotu v nazývám projektivním obloukem, příslušná přímka q opisuje Wilczynskim zavedenou hlavní plochu fleknodální kongruence. Různé geometrické definice q podal jsem přede dvěma lety. Za předpokladu (13) jsou výrazy

$$h = \dot{A}\dot{C} - \dot{B}^2,$$

$$k = \begin{vmatrix} A & \dot{A} & \ddot{A} \\ B & \dot{B} & \ddot{B} \\ C & \dot{C} & \ddot{C} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

a j projektivní invarianty Π, z nichž h a k jsou invarianty též při projektivních deformacích. Plocha Π je určena až na kolineace, známe-li znamení ε a h, k, j jako funkce projektivního oblouku, a je-li $h \gtrless 0$. Je-li však $\varepsilon = -1$, je nutně $h > 0$. Korelace mění pouze znamení k. Je-li $h = 0$, má Π přímku řídící. Pro stručnost vypustím, jak lze v tomto případě Π invariantně určiti.

6. Je-li $B^2 - AC = 0$, t. j. splynou-li obě fleknodální čáry, je nutno normalisaci prováděti jinak. V tomto případě lze položiti

$$f\binom{t_1}{t_2} = \eta\,(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)^2,\ \ \eta^2 = 1. \tag{15}$$

Je-li $\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1' \not\gtrless 0$, stačí, abychom normalisaci provedli, předpokládati

$$\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1' = \varepsilon\eta, \ \varepsilon^2 = 1. \tag{16}$$

Příslušnou hodnotu v nazývám projektivní pseudooblouk plochy Π. Příslušnou polohu přímky q lze takto geometricky charakterisovati: Zvolíme-li tvořící přímku p, leží její póly vzhledem k tak zv. oskulačním kuželosečkám všech asymptotických křivek v jejich průsečících s p v pevné rovině (závislé na p) W_1. Průsečnice roviny W_1 s oskulační rovinou fleknodální čáry protne oskulační hyperboloid (ve fleknodálním bodě na p a podruhé) v bodě přímky q. Ze (16) plyne, že existuje l takové, že

$$\alpha_1'' = l\alpha_1, \ \alpha_2'' = l\alpha_2 \tag{17}$$

Π je určena až na kolineace, je-li dáno znamení ε a invarianty l a j jako funkce projektivního pseudoobloukи. Je-li $\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' = 0$, Π náleží speciální lineární kongruenci. Pominu, jak lze v tomto případě Π projektivně charakterisovati.

7. Metoda, kterou jsem v předchozích řádcích stručně vyložil, dá se rozmanitými způsoby zobecniti ve vyšších prostorech.*) V obyčejném prostoru lze zcela obdobným způsobem studovati kongruence W, jichž obě fokální plochy jsou zborcené.

*

Une méthode nouvelle dans la géométrie projective de surfaces réglées.

(Extrait de l'article précédent.)

Soit S une variété à $n+1$ dimensions, lieu d'espaces linéaires à n dimensions, et immergée dans un espace linéaire à $2n+1$ dimensions. Supposons, ce qui est le cas général, que deux E_n générateurs infiniment voisins de S soient sans point commun; alors, par chaque point de S, il passe une courbe asymptotique de S dont le plan osculateur (à deux dimensions) en chaque point est situé dans l'espace tangent de S.

On peut déterminer S en donnant $n+1$ points variables, linéairement indépendants, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, fonctions d'un même paramètre v, de manière que 1) pour chaque valeur du paramètre v, l'E_n générateur soit déterminé par les positions correspondantes des points $x_0, x_1, \ldots, x_n$; 2) $c_0, c_1, \ldots, c_n$ étant des constantes arbitraires, la courbe engendrée par le point

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

*) O jednom zobecnění zmiňuji se ve francouzském výtahu.

soit une courbe asymptotique de S, et 3) que l'on ait

$$(x_0\, x_1 \ldots x_n\, dx_0\, dx_1 \ldots d\, x_n) = dv^n,$$

le premier membre étant le déterminant des coordonnées des points en parenthèses.

On voit tout de suite que les points $x_0, x_1 \ldots, x_n$ satisfont aux équations différentielles suivantes

$$\frac{d^2 x_i}{dv^2} = \sum_{j=o}^{n} a_{ij}\, x_j + b x_i$$

les a_{ij} vérifiant l'équation

$$a_{00} + a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0.$$

Soit $$S^n + h_2\, S^{n-2} + \cdots + h_{n-1}\, S + h_n = |a_{ij} + S \varepsilon_{ij}|, \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{ii} = 1,\ \varepsilon_{ij} = 0 \text{ si } i \gtrless j$$

le déterminant caractéristique de la matrice (a_{ij}).

Les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas déterminés parfaitement par la variété. En effet, on peut les remplacer 1) par

$$\Sigma\, c_{0i}\, x_i,\ \Sigma\, c_{1i}\, x_i, \ldots, \Sigma\, c_{ni}\, x_i$$

la matrice (c_{ij}) ayant des coefficients numériques et un déterminant égal à l'unité; 2) par $\varrho x_0, \varrho x_1, \ldots, \varrho x_n$, ϱ étant une fonction de v, pourvu que l'on remplace, en même temps, v par

$$v' = \int \varrho^2\, dv.$$

En supposant que le déterminant caractéristique (1) ne se réduise pas à S, on peut supposer, par exemple, $h_r = 1$, h_r étant le premier coefficient de (1) divers de zéro.[1] *Les autres coefficients de (1), ainsi que b, sont alors des invariants projectifs de la variété S. De plus, tous les invariants projectifs de S, à l'exception de b, sont des invariants de la matrice (a_{ij}) par rapport à l'opération $\overset{-1}{N}(a_{ij})\, N$, N étant une matrice à coefficients numériques et dont le déterminant est égal à l'unité.*

Dans l'espace ordinaire, le problème analytique ainsi posé peut être résolu complèment sans difficulté. On arrive ainsi à une théorie projective des surfaces réglées qui me paraît préférable à celle de M. Wilczynski. La note qui précède en résume les résultats; bien entendu, le cas exceptionel où $h_2 = 0$ n'est point exclu.

La méthode précédente peut être beaucoup généralisée.

---

[1]) Ceci introduit une racine $4r$-ième.