

Václav A. Hruška

Kritické poznámky o grafickém integrování

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 88--98

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109364>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1924

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

longueurs sont encore des logarithmes et 3^o une table graphique *C* au transparent, dont les longueurs sont les quantités *w*.

On cherche, par exemple $\log 36684 (= 36000 + 864)$. Le nombre 36 a 2 chiffres; donc on pose la table *C* sur la table *B* de manière que le point 2 corresponde au point „684“ de la tab. *B*, et que le droites des tables *B* et *C* coïncident. On trouve alors dans *C* sur le point „36“ de la tab. *B* le point „ $w = 817$ “; dans la tab. *A* on trouve $\log 36$ et on a:

$$\log 36684 = 4,55630 + 0,00817 = 4,56447.$$

Le procédé inverse est tout analogue.

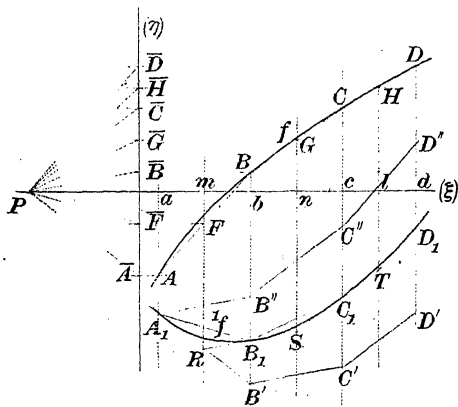
Kritické poznámky o grafickém integrování. (Remarques critiques sur l'intégration graphique.)

Napsal Dr. V. Hruška.

1. Buď dán graf *f* funkce $y = f(x)$ při mod. α, β^1) a graf $\int f$ funkce

$$\int y = \int_a^x f(x) dx + C; \quad (1)$$

když moduly jejich souřadnic jsou α a β (obr. 1.). Dovedeme nakreslit tečnu křivky $\int f$ v kterémkoliv bodě, na př. B_1 . Vedme tímto



Obr. 1.

bodem rovnoběžku s osou (η) až protne křivku *f* v bodě *B* o souřadnicích $\xi = \alpha x$, $\eta = \beta y$. Souřadnice bodu B_1 pak jsou $\int \xi = \alpha x$,

¹⁾ Srovnej můj článek v LII. roč. tohoto časopisu (str. 46): Poznámky o grafickém počtu.

$${}^1\eta = \gamma \cdot {}^1y = \gamma \cdot \int_a^x f(x) dx + \gamma C$$

a tedy směrnice tečny křivky 1f v 1B jest

$$\frac{d {}^1\eta}{d {}^1\xi} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{d {}^1y}{dx} = \frac{\gamma}{\alpha} f(x) = \frac{\gamma}{\beta\alpha} \cdot \eta.$$

Nakreslíme-li tedy na záporné části osy (ξ) pól P ve vzdálenosti $\overline{OP} = \delta = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$, bude ona směrnice rovna $\frac{\eta}{\delta}$. Promítneme-li tedy bod B na osu (η) do \overline{B} , bude ona tečna křivky 1f v B_1 rovnoběžna se spojnicí \overline{PB} . Patrně jsme mohli také voliti libovolně P a tím distancí δ a určití pak mod. γ rovnici

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{\delta}. \quad (2)$$

Učiníme-li v (1) $x = 0$, bude ${}^1y = C =$ libovolné stálé. Z toho usuzujeme, že pořadnici jednoho bodu integrální křivky 1f můžeme libovolně zvoliti. Tento bod budeme označovati písmenou A_1 a nazveme jej počátečním bodem integrální křivky.

Ostatní body integrální křivky 1f ovšem přesně nakresliti nedovedeme, vyjma v několika speciálních případech. Můžeme však její body sestrojiti dosti přibližně grafickým vyjádřením některých vhodných způsobů numerických kvadratur. Obvyčejně se užívá k tomu metody lichoběžníkové (trapezové) nebo Simpsonova pravidla.²⁾

2. Lichoběžníková metoda. Na integrované funkci f zvolme řadu bodů A, B, C, D, \dots o úsečkách $\xi = a, b, c, d, \dots$ (mod. α) a pořadnicích $\eta = y_A, y_B, y_C, y_D, \dots$ (mod. β) a označme a, b, c, d, \dots paty pořadnic těchto bodů na ose (ξ) (obr. 1.). Bod D_1 integrální křivky má pořadnici

$$\eta = C + \int_a^d f(x) dx \quad (\text{mod. } \gamma). \quad (3)$$

Dle lichoběžníkového pravidla klademe pravou stranu výrazu (3) rovnu

$$C + (b-a) \frac{y_A + y_B}{2} + (c-b) \frac{y_B + y_C}{2} + (d-c) \frac{y_C + y_D}{2}. \quad (4)$$

Výraz tento lze sestrojiti různým způsobem.

a) Výraz (4) jest hodnotou lineární funkce

$$C + (b-a) z_1 + (c-b) z_2 + (d-c) z_3 \quad (5)$$

²⁾ Další způsob viz *d'Ocagne, Calcul graphique et nomographie.*

pro hodnoty proměnných

$$z_1 = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_2 = \frac{y_B + y_C}{2}, \quad z_3 = \frac{y_C + y_D}{2} \quad (6)$$

a můžeme ho tedy známým způsobem sestrojiti.³⁾ Hodnoty (6) jsou při *mod.* β pořadnicemi bodů F, G, H půlčích tetivy $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$. Tyto hodnoty přeneseme na osu (η) prostým promítnutím bodů F, G, H do bodů $\overline{F}, \overline{G}, \overline{H}$. Koefficienty funkce (5) již máme při *mod.* α vyneseny na ose (ξ), neboť jest

$$b - a = \overline{ab}, \quad c - b = \overline{bc}, \quad d - c = \overline{cd}.$$

Bod A_1 o pořadnici \overline{C} (*mod.* γ) zvolíme libovolně a bod D_1 tedy sestrojíme tak, že položíme polygon $A_1 B_1 C_1 D_1$, jehož jednotlivé strany jsou rovnoběžné resp. se spojnicemi $\overline{PF}, \overline{PG}, \overline{PH}$.

Kdybychom konstrukci opakovali s body B a C seznáme, že také vrcholy B_1 a C_1 polygonu budou body integrální křivky, takže $A_1 B_1 C_1 D_1$ jest polygon této křivce vepsaný. Tečny integrální křivky v těchto bodech pak sestrojíme dle odst. 1.

b) Výraz (4) můžeme také psáti ve tvaru $\frac{1}{2}(S' + S'')$, kde

$$\begin{aligned} S' &= C + (b - a) y_A + (c - b) y_B + (d - c) y_C \\ S'' &= C + (b - a) y_B + (c - b) y_C + (d - c) y_D. \end{aligned} \quad (7)$$

S' však jest hodnota funkce (5) pro argumenty

$$z_1 = y_A, \quad z_2 = y_B, \quad z_3 = y_C \quad (8')$$

a S'' hodnota téže funkce pro argumenty

$$z_1 = y_B, \quad z_2 = y_C, \quad z_3 = y_D. \quad (8'')$$

Promítneme-li tedy body A, B, C, D na osu (η) do bodů $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ a sestrojíme-li polygony $A_1 B' C' D'$ a $A_1 B'' C'' D''$ funkce (5), jichž strany jsou resp. rovnoběžny se spojnicemi: $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ a $\overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$, budou pořadnice bodů D' a D'' znázorňovati při *mod.* $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\delta}$ veličiny S' a S'' a tedy bod D_1 integrální křivky bude uprostřed úsečky $D' a D''$. Podobně seznáme, že další body integrální křivky B_1 a C_1 leží resp. uprostřed úseček $\overline{B' B''}$ a $\overline{C' C''}$. Tečny v A_1, B_1, C_1, D_1 ustanovíme opět dle odst. 1.

c) Jelikož B_1 púlí úsečku $\overline{B' B''}$, leží průsečík R tečen integrální křivky v A_1 a B_1 právě uprostřed mezi pořadnicemi bodů A a B . Podobně průsečík S tečen křivky $1f$ v B_1 a C_1 leží uprostřed proužku tvořeného pořadnicemi bodů B a C a průsečík T

³⁾ *Runge*, Graphische Methoden str. 17.

tečen v C_1 a D_1 leží uprostřed proužku tvořeného pořadnicemi bodů C a D . Můžeme tedy body B_1, C_1, D_1 sestrojiti též tak, že bodem A_1 vedeme rovnoběžku s \overline{PA} až k bodu R ležícímu uprostřed mezi pořadnicemi bodů A a B . Bodem R pak vedeme RB_1S rovnoběžně s \overline{PB} až k bodu S uprostřed mezi pořadnicemi bodů B a C . Stejně SC_1T vedeme rovnoběžně s \overline{PC} a TD_1 rovnoběžně s \overline{PD} . Tím dostaneme nejen body A_1, B_1, C_1, D_1 , nýbrž hned i tečny integrální křivky v nich.

Kritika těchto konstrukcí. Lichoběžníková metoda je tím přesnější, čím jsou dílky $b-a, c-b, d-c, \dots$ menší. Při grafickém vyjádření této metody se však nedoporučuje voliti dílky příliš malé, aby zase nenarostla chyba vzniklá vedením přímek a určováním jich průsečíků, která závisí na počtu přímek a tedy se zvětšuje se zmenšováním dílků. Obyčejně volíme dílky tak malé, aby tetivy $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ se tak právě trochu lišily od oblouků křivky. Kdybychom měli přesně najíti půlicí body F, G, H v konstrukci a), bylo by to dosti pracné. Spokojujeme se tudíž rozpúlením tetiv $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ zkusmo. Tyto tetivy však bývají dosti dlouhé a proto toto půlení ne příliš přesné. Jakýmsi usnadněním pro to může býti, že bod F leží uprostřed proužku tvořeného pořadnicemi bodů A a B . Usnadnění toto je ovšem málo významné, jelikož při poněkud strmé poloze tetivy \overline{AB} může i malé uchýlení od prostředka proužku míti za následek dosti značnou chybu v pořadnici bodu \overline{F} a tedy v určení bodů B_1 a následujících bodů C_1 a D_1 . Kromě určení bodů A_1, B_1, C_1, D_1 musíme při použití metody a) určití ještě tečny integrální křivky v těchto bodech, abychom mohli křivku přesně nakresliti.

Metoda c) má s methodou a) to společné, že musíme určití body R, S, T ležící uprostřed proužků tvořených pořadnicemi bodů A, B, C, D . Ovšem nesprávnost v určení kteréhokoliv z těchto půlicích bodů má za následek rovněž nesprávné určení všech následujících bodů integrální křivky jako u metody a). Jenže tato nesprávnost nebývá tak velká jako u metody a), jelikož při dosti velké distanci δ vypadnou tečny integrální křivky v A_1, B_1, C_1, D_1 poměrně málo strmé. Za to má tento způsob výhodu, že současně s určením bodů A_1, B_1, C_1, D_1 máme v nich hned určeny tečny integrální křivky. Způsob c) jest tedy daleko výhodnější než způsob a) a hodí se hlavně pro rychlou práci, při níž neklademe tak velikou váhu na přesnost.

Oba způsoby a) i c) možno učiniti přesnější tím, že body $A, B, C, D \dots$ na integrované křivce zvolíme tímto způsobem: Na osu (ξ) nanese od a dva stejné dílky $\overline{am} = \overline{mb}$. Od b nanese rovněž dva stejné dílky $\overline{bn} = \overline{nc}$; dílky tyto mohou býti od $\overline{am} = \overline{mb}$ různé. Od c nanese $\overline{cl} = \overline{ld}$ atd. V bodech $a, m, b,$

n, c, l, d, \dots vztyčíme pořadnice. Body R, F jsou pak s m na téže pořadnici, stejně S, G s n a T, H s l . Podotýkám však, že máme-li takto rozdělený integrační obor, jest nejuvhodnější užití ke grafické integraci přesnějšího Simpsonova pravidla, vyloženého v odst. 3.

Oba způsoby $a)$ i $c)$ mají však společnou nevýhodu, že chybné určení bodu R nebo F má za následek chybu v sestrojení všech následujících bodů B_1, C_1, D_1, \dots . Jelikož chyby v určení bodů integrální křivky vzniklé chybným určením bodů R, S, T, \dots nebo F, G, H, \dots se mohou sčítati, může průběh konce integrální křivky býti dosti nejistý.

Této vady je prosta konstrukce $b)$. Chybné rozpůlení úsečky $\overline{B'B''}$ má vliv pouze na určení bodu B_1 , nikoliv však též na body C_1, D_1, \dots . Z tohoto důvodu možno považovati konstrukci $b)$ za nejpřesnější grafické vyjádření lichoběžníkového pravidla. Další výhodou této konstrukce jest, že nám podává hranici odchylky přibližné integrální křivky γf od přesné integrální křivky. Víme totiž, je-li funkce $f(x)$ v oboru integračním monotonní (v obr. 1. jest stále rostoucí), že přesná hodnota

$$C + \int_a^d f(x) dx$$

se nachází mezi S' a S'' , takže průsečík přesné integrální křivky s pořadnicí bodu D se nalézá někde mezi body D' a D'' . Totéž platí i o průsečících této křivky s pořadnicemi ostatních bodů A, B, C , takže vidíme, že přesná integrální křivka v tomto případě nevystoupí z pásu sevřeného polygonu $A_1 B' C' D' \dots$ a $A_1 B'' C'' D'' \dots$, které takto udávají hranici úchyly přesné integrální křivky od nakreslené přibližné γf . Je-li tento pás příliš široký (jak je tomu v obr. 1.) a tedy hranice možné úchyly příliš rozsáhlé, můžeme je zúžití zmenšením dílků $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \dots$

3. Simpsonovo pravidlo vyžaduje vytknutí takových bodů $A, M, B, N, C, L, D, \dots$ na křivce f , aby dva a dva po sobě jdoucí dílky tvořené pořadnicemi těchto bodů byly vždy stejně dlouhé. Docílíme to nejlépe tím, že na ose (ξ) (obr. 2.) vytkneme body $a, m, b, n, c, l, d, \dots$ tak, aby $\overline{am} = \overline{mb}, \overline{bn} = \overline{nc}, \overline{cl} = \overline{ld}, \dots$ a těmito body vedeme pořadnice až protnou f v bodech resp. $A, M, B, N, C, L, D, \dots$. Označíme-li pořadnice těchto bodů $y_A, y_M, y_B, y_N, y_C, y_L, y_D, \dots$ (*mod.* β), klademe dle Simpsonova pravidla

$$C + \int_a^d f(x) dx = C + \frac{b-a}{6} (y_A + 4y_M + y_B) + \quad (9)$$

$$+ \frac{c-b}{6} (y_B + 4y_N + y_C) + \frac{d-c}{6} (y_C + 4y_L + y_D).$$

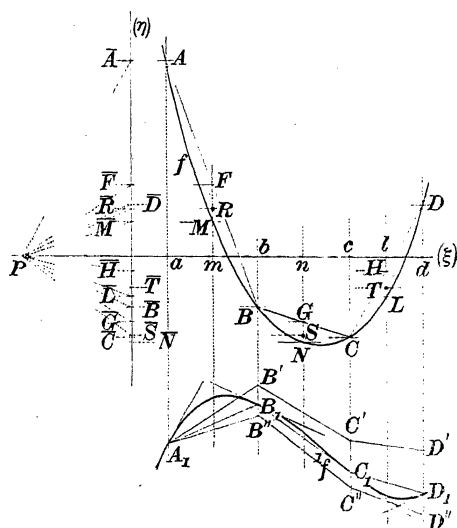
Výraz tento můžeme graficky najít dvojím způsobem:

a) Jako hodnotu lineární funkce (5) pro hodnoty argumentů

$$z_1 = \frac{1}{6} (y_A + 4y_M + y_B) = \frac{y_A + y_B}{2} + \frac{2}{3} \left(y_M - \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$z_2 = \frac{1}{6} (y_B + 4y_N + y_C) = \frac{y_B + y_C}{2} + \frac{2}{3} \left(y_N - \frac{y_B + y_C}{2} \right) \quad (10)$$

$$z_3 = \frac{1}{6} (y_C + 4y_L + y_D) = \frac{y_C + y_D}{2} + \frac{2}{3} \left(y_L - \frac{y_C + y_D}{2} \right).$$



Obr. 2.

Jelikož při *mod. β* jest $\frac{y_A + y_B}{2}$ pořadnicí bodu *F*, který leží uprostřed tetivy \overline{AB} , značí $z_1 = y_F + \frac{2}{3} \overline{FM}$ (*mod. β*) pořadnicí bodu *R*, ležícího ve dvou třetinách úsečky \overline{FM} . Podobně z_2 a z_3 jsou při *mod. β* pořadnice bodů *S*, *T* ležících ve dvou třetinách \overline{GN} , resp. \overline{HL} . Přeneseme-li tyto hodnoty na osu (η) promítnutím bodů *R*, *S*, *T* do bodů \overline{R} , \overline{S} , \overline{T} , můžeme sestrojiti hodnotu (9) a tedy také bod D_1 polygonem $A_1 B_1 C_1 D_1$, jehož strany jsou postupně rovnoběžny s \overline{PR} , \overline{PS} , \overline{PT} . Body B_1 , C_1 budou rovněž na integrální křivce a tečny v nich sestrojíme dle odst. 1. Modul pořadnic integrální křivky jest opět $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\delta}$.

b) Výraz (9) také můžeme upravit na tvar

$$S' + \frac{2}{3} (S'' - S') \quad (11)$$

kde S' je hodnota funkce (5) pro argumenty

$$z_1 = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_2 = \frac{y_B + y_C}{2}, \quad z_3 = \frac{y_C + y_D}{2}, \quad (12)$$

což jsou při *mod.* β pořadnice bodů F, G, H a kde S'' značí hodnotu funkce (5) pro argumenty

$$z_1 = y_M, \quad z_2 = y_N, \quad z_3 = y_L. \quad (12'')$$

což jsou při *mod.* β pořadnice bodů M, N, L . Promítneme-li tedy body F, G, H na (η) do $\overline{F}, \overline{G}, \overline{H}$ a sestrojíme polygon $A_1 B' C' D'$, jehož strany jsou resp. rovnoběžny s $P\overline{F}, P\overline{G}, P\overline{H}$, udává pořadnice bodu D' při *mod.* $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\delta}$ hodnotu S' . Podobně promítnutím bodů M, N, L na (η) do $\overline{M}, \overline{N}, \overline{L}$ a sestrojením polygonu $A_1 B'' C'' D''$ o stranách rovnoběžných resp. s $P\overline{M}, P\overline{N}, P\overline{L}$ dostaneme v pořadnici bodu D'' hodnotu S'' při *mod.* γ . Pořadnice bodu D_1 integrální křivky jest dána dle Simpsonova pravidla vzorcem (11), takže bod D_1 leží ve dvou třetinách úsečky $\overline{D'D''}$. Podobně seznáme, že další body B_1 a C_1 integrální křivky leží resp. ve dvou třetinách úseček $\overline{B'B''}$ a $\overline{C'C''}$. Tečny integrální křivky v A_1, B_1, C_1, D_1 sestrojíme opět obvyklým způsobem.

Kritika těchto konstrukcí: Simpsonovo pravidlo jest opět tím přesnější, čím menší jsou dílky. O příliš malých dílcích však platí, co bylo již napsáno o lichoběžníkové metodě. Voliváme tedy dílky tak malé, aby body F, M a podobně G, N a H, L byly sice navzájem různé, ale aby jejich vzdálenost nepřestoupila asi tak 1^{mm} až 2^{mm} .

Metoda a) jest velmi rychlá, avšak rozdělení tak malých dílků $\overline{FM}, \overline{GN}, \overline{HL}$ na tři díly jest dosti nepřesné. Mimo to, tato nepřesnost se může při sestrovování bodů $A_1, B_1, C_1, D_1 \dots$ sečítati, neboť k sestrojení na př. bodu D_1 potřebují rozdělit na tři díly úsečku \overline{HL} a znáti body B_1, C_1 , k jichž určení jsem dělil na tři díly úsečky \overline{FM} a \overline{GN} .

Konstrukce b) je této vady prosta, chybné rozdělení na tři díly na př. úsečky $\overline{B'B''}$ má vliv pouze na určení bodu B_1 , nikoliv však též na určení bodů C_1 a D_1 . Kromě toho konstrukce b) nám poskytuje přímo hranici úchylky přibližné integrální křivky y od

křivky přesné v případě, že v oboru integračním má $f''(x)$ stále totéž znamení. Víme pak totiž, že přesná hodnota

$$C + \int_a^d f(x) dx$$

zůstává mezi S' a S'' a sice, že je bližší S'' . Tudíž průsečík přesné integrální křivky s pořadnicí bodu D jest vždy mezi D' a D'' a sice blíže bodu D'' než bodu D' . Z toho usuzujeme, že hranice úchyly přibližné integrální křivky $\mathcal{I}f$ od přesné jest $\frac{1}{3} D'D''$. Podobná úvaha platí pak pro body B' B'' a C' C'' . Opět vhodným zmenšením dílků můžeme zmenšiti hranici úchyly na vhodnou velikost.

Jelikož body A_1 , B' , C' D' jsou vlastně body přibližné integrální křivky sestrojené dle odst. 2a) vidíme, oč jest toto Simpsonovo pravidlo přesnější, než pravidlo lichoběžníkové.

Jest s podivem, že ačkoliv tyto věci jsou částečně dávno známé,⁴⁾ bývají ve většině učebnic úplně pominuty mlčením, ačkoliv pro přesnost výsledku jsou velice důležité.

4. Veškeré tyto konstrukce lze beze všeho rozšířiti na integrování funkcí daných v klinogonální soustavě souřadné, ba dokonce ani není nutno, aby soustava souřadná v níž kreslíme integrální křivku měla též úhel os jako soustava, v níž jest dána integrovaná funkce f .⁵⁾

Mějme na př. integrovanou funkci $f(x)$ dānu grafem f v soustavě souřadné (ξ, η) , při mod. α, β (obr. 3.) a integrální křivku $\mathcal{I}f$ vztahujeme k soustavě souřadné (ξ_1, η_1) , jejíž osa $(\eta_1) \equiv (\eta)$, kdežto osa (ξ_1) byla zvolena zcela libovolně. Použijeme-li k integrování na př. jednoduché metody dle odst. 3a), najdeme nejprve body A, B, C na integrované křivce f a dále body R, S ležící ve dvou třetinách mezi tetivou a křivkou na střední pořadnici dílků \overline{ab} , \overline{bc} . Rovnoběžkou s osou (ξ) přenesme pořadnice těchto bodů na osu (η) . Sestrojíme-li nyní s pólovou distancí $\overline{OP} = \delta$, $\overline{OP} // (\xi_1)$ polygon $A_1 B_1 C_1$, jehož strany jsou resp. rovnoběžny se spojnicemi \overline{PR} , \overline{PS} , bude pořadnice bodu C_1 značiti hodnotu

$$C + \int_a^c f(x) dx.$$

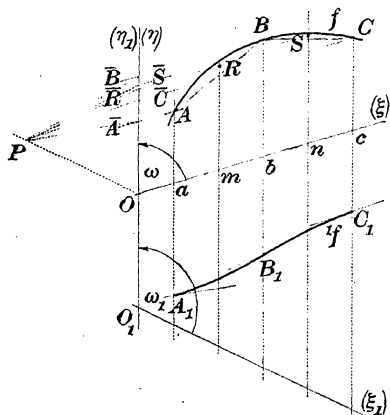
⁴⁾ Viz na př. *Massau*, Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications, str. 30—32, *Willers*, Graphische Integration (Sammlung Göschen No. 801), str. 22—28.

⁵⁾ Je s podivem, že učebnice užívají vesměs pravoúhlých soustav souřadných, ačkoliv lze tohoto rozšíření uvedených konstrukcí často s výhodou použiti (na př. ve stavebné mechanice).

Modul pořadnic při tom bude patrně

$$\gamma = \frac{\alpha_1 \beta}{\delta}$$

kde α_1 souvisí s α rovnicí $\alpha_1 = \alpha \frac{\sin \omega}{\sin \omega_1}$.



Obr. 3.

5. Podotýkám ještě, že přesnost výsledku se znamenitě zvýší, dáme-li pozor na to, že integrální křivka má extrémní hodnoty tam, kde integrovaná křivka protíná osu (ξ) a že inflexční body integrální křivky jsou tam, kde má integrovaná křivka extrémní hodnotu, t. j. tečnu $\parallel (\xi)$. Proto často volíváme na grafu f za některé z bodů A, B, C, \dots extrémní hodnoty a průsečíky křivky f s osou (ξ) .

*

Résumé de l'article précédent.

Dans les fig. 1. et 2. sont donnés quelques procédés de l'intégration graphique.

Dans la fig. 1. sont donnés les procédés de l'intégration graphique, fondés sur la règle de trapèze.

En se servant de cette règle, on peut construire les points de la courbe intégrale approchée y_f au moyen du calcul graphique des valeurs d'une fonction linéaire et entière. Par ex. le point D_1 peut être construit :

a) En calculant graphiquement au moyen du polygone $A_1 B_1 C_1 D_1$ la valeur de la fonction (5) pour les arguments (6). On projette les centres F, G, H des cordes $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ de la courbe intégrée

aux points \overline{F} , \overline{G} , \overline{H} de l'axe des (η) et construit le polygone $A_1 B_1 C_1 D_1$ dont les côtés sont resp. parallèles à \overline{PF} , \overline{PG} , \overline{PH} .

b) On peut aussi poser l'ordonnée du point D_1 égale à

$$\frac{1}{2} (S' + S'')$$

S' et S'' étant les quantités (7). Or, ce sont les valeurs de la fonction (5) pour les arguments resp. $(8')$ et $(8'')$. En projetant les points A, B, C, D aux points $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ de l'axe des (η) , on construit les valeurs S' et S'' au moyen des polygones $A_1 B' C' D'$ et $A_1 B'' C'' D''$, dont les côtés sont parallèles resp. à $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$. Le point D_1 est au centre du segment $\overline{D' D''}$.

c) En construisant les tangentes à la courbe intégrale aux points A_1, B_1, C_1, D_1 , de la manière bien connue, on trouve que les points d'intersection R, S, T de ces tangentes sont au centre des bandes respectives, formées par les ordonnées des points A, B, C, D . Donc, on peut construire les points $A_1 B_1 C_1 D_1$ au moyen du polygone circonscrit $ARB_1 SC_1 TD_1$, dont les côtés sont parallèles resp. à $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$ et dont les sommets R, S, T sont au centre des bandes respectives.

La critique de ces méthodes confirme que la méthode la plus avantageuse est la méthode c), si l'on détermine les centres R, S, T à vue d'oeil, ce qu'on peut faire avec une précision satisfaisante. C'est la méthode b), qui est la plus précise et, par suite, plus avantageuse que la méthode a). L'avantage consiste surtout en ce que l'erreur commise en divisant les segments $\overline{B' B''}$ et $\overline{C' C''}$ en deux parties égales, n'influence pas la position du point D_1 .

On peut faire des remarques similaires sur l'intégration graphique d'après la règle de Simpson. Il s'agit de calculer graphiquement l'expression (9). On peut le faire de deux manières (fig. 2).

a) En calculant la valeur de la fonction (5) pour les arguments (10). Ces expressions sont les ordonnées des points R, S, T , situés dans les deux tiers des segments respectifs $\overline{FM}, \overline{GN}, \overline{HL}$. En projetant ces points aux points $\overline{R}, \overline{S}, \overline{T}$ de l'axe des (η) et en construisant le polygone $A_1 B_1 C_1 D_1$ aux côtés parallèles resp. à $\overline{PR}, \overline{PS}, \overline{PT}$, on obtient les points A_1, B_1, C_1, D_1 de la courbe intégrale.

b) On peut mettre l'expression (9) sous la forme (11), S' et S'' étant les valeurs de la fonction (5) pour les arguments resp. (12') et (12''). La construction projette encore les points M, N, L aux points $\overline{M}, \overline{N}, \overline{L}$ de l'axe des (η) et construit ensuite les polygones $A_1 B' C' D'$ et $A, B'' C'' D''$, dont les côtés sont resp. pa-

rallèles à \overline{PF} , \overline{PG} , \overline{FH} et \overline{PM} , \overline{PN} , \overline{PL} . Les points de la courbe intégrale, par ex. D_1 , sont aux deux tiers du segment $D'D''$.

L'avantage de la méthode *b*), comparée à la méthode *a*), consiste en ce que la position de chaque point, p. ex. D_1 , est indépendante de la division des segments $\overline{B'B''}$ et $\overline{C'C''}$ en trois parties égales. Il n'en est pas ainsi dans la méthode *a*), la position du point D_1 dépendant de la division des segments \overline{FM} , \overline{GN} , \overline{HL} en trois parties égales. Or, cette division de segments très courts n'est pas une opération précise. Les erreurs de cette division pouvant s'additionner, dans la méthode *a*), on doit préférer la méthode *b*).

Il n'est pas nécessaire de supposer perpendiculaires les axes des coordonnées. On peut même employer, pour la courbe intégrale, un autre système d'axes (ξ_1, η_1) que celui des (ξ, η) , employé pour la fonction intégrée (fig. 3). L'essentiel est que la distance $\delta = \overline{OP}$ du pôle P soit parallèle à l'axe (ξ_1) . Si les modules pour les coordonnées de la fonction f sont α, β et si $\alpha_1 = \alpha \frac{\sin \omega}{\sin \omega_1}$, le module pour les ordonnées de la courbe intégrale est $\gamma = \frac{\alpha_1 \beta}{\delta}$.

O číslech derivovaných funkcí jedné reálné proměnné.

Napsal Vojtěch Jarník.

V tomto článku chci dokázati jistou větu o derivovaných číslech funkcí jedné proměnné. K tomu cíli předešlu jednoduchou větu pomocnou: Budiž $f(x)$ funkce konečná, definovaná v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, jež nemá v tomto intervalu variaci konečnou. Potom množství čísel

$$\Psi(x', x'') = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

pro $a \leq x' \leq b$, $a \leq x'' \leq b$, $x' \neq x''$ není shora ani zdola ohraničeno.

Rozdělme $\langle a, b \rangle$ na konečný počet dílů:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b;$$

sestrojme rozdíly $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ pro $i = 0, 1, \dots, n-1$, a označme součet těch z nich, jež jsou kladné, P (není-li žádný kladný, klademe $P = 0$) a součet těch z nich, jež jsou záporné, $-N$ (není-li žádný z nich záporný, klademe $N = 0$). Označme dále

$$(1) \quad T = P + N.$$