Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohumil Bydžovský

Poznámka ke studiu speciálních kvartik rovinných

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 27--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109360

Poznámka ke studiu speciálních kvartik rovinných.

Napsal *B. Bydžovský.*

1. V lonském ročníku tohoto časopisu[1]) podal jsem dosti obecný příklad toho, jak lze známého principu promítání z prostorů vyšších do nižších užíti ke zjednodušení studia Cremonových příbuzností. V řadě speciálních výsledků tam uvedených vytkl jsem také velmi jednoduchý důkaz známé věty o existenci grupy (sedmi) kvadratických transformací, jimiž se reprodukuje obecná eliptická kvartika rovinná (budu ji značiti K'). Je blízka myšlénka, užíti existence těchto kvadratických transformací (a dalších dvou, jimiž se křivka také reprodukuje, v. dále) jako principu specialisace, t. j. ptáti se po těch speciálních křivkách, jež se reprodukují jiným počtem kvadratických involucí než křivka obecná. Tuto otázku jsem částečně již zodpověděl v dřívějších pracích, užívaje parametrického vyjádření bodů křivky. Na tomto místě chci stručně ukázati, že alespoň některých výsledků v této věci lze dojíti jednoduše opět promítáním prostorové kvartiky eliptické — b u d u j i o z n a č o v a t i K. — do roviny. Běží patrně jen o to, voliti speciálně střed promítání S.

2. Je třeba orientovati se v hlavních rysech o tom, jak promítáním dospějeme k transformacím výše uvedeným. Budiž ρ rovina průmětná, Q kvadratická plocha obsahující kvartiku K a bod S; předpokládáme samozřejmě, že bod S neleží na křivce. Prostorovou kvartikou procházejí, jak známo, čtyři kvadratické kužele, jichž vrcholy O_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou vrcholy polárního tetraedru společného všem kvadratickým plochám obsahujícím kvartiku. Jsou to středy involucí — budeme tyto involuce značiti (O_i) — jimiž se reprodukuje každá tato plocha a také kvartika; vedle toho reprodukují se tyto útvary také ještě třemi dvojosými involucemi, jichž osy jsou vždy dvě mimoběžné hrany polárního tetraedru. Budeme tyto involuce značiti na př. (h_1, h_2), kde h_1, h_2 jsou dvě mimoběžné hrany tetraedru. Promítneme-li těchto sedm involucí (tvořících s identitou grupu), omezených na plochu Q, do roviny, obdržíme právě (v. čl. výše uvedený) sedm kvadratických involucí, jež reprodukují křivku K' (a tvoří rovněž grupu).

Snadno se zjistí, které jsou h l a v n í e l e m e n t y těchto transformací. Ježto ve středové involuci (O_i) každý paprsek bodem O_i je invariantní, platí totéž v rovině o každém paprsku vedeném bodem O_i (označujeme čárkováním body vzniklé promítnutím); i je zřejmo, že promítnutím středové involuce (O_i) vznikne v rovině kvadratická inverse o středu O_i'. Řídící kuželosečka k' této inverse obdrží se promítnutím kuželosečky, v níž je plocha Q

[1]) V článku „Užití principu promítání v teorii geometrických příbuzností“. Čas. LII., str. 11—18.

proťata stěnou polárního tetraedru protější k O_i. Přímky p_1, p_2 plochy Q procházející bodem S protnou k' ve dvojnásobných bodech D_1, D_2 křivky K'. Tyto body jsou v inversi hlavní; neboť v involuci (O_i) odpovídá přímce p_1, jež se do roviny ρ promítá pouhým bodem, přímka q, jež se do roviny ρ promítá v přímku q_1'. Ježto rovina přímek p_1, q_1 prochází bodem O_i, prochází q_1' bodem O_i'; vedle toho ovšem obsahuje bod D_1; t. j. spojnice $D_1 O_i'$ je hlavní přímka odpovídající bodu D_1. Podobně odpovídá hlavnímu bodu D_2 spojnice tohoto bodu s bodem $O^{i'}$.

Prostorová involuce (h_1, h_2) vznikne, jak je známo, složením dvou středových involucí (O_i); příslušné kvadratické transformace tedy složením dvou inversí právě projednávaných. Jejich hlavní elementy lze najíti rovněž přímo užitím projekce. Že body D_1, D_2 jsou hlavní, dokáže se podobně, jako před tím, s tím rozdílem ve výsledku, že přímka odpovídající bodu D_1 prochází bodem D_2, a obráceně. Třetí hlavní bod je zřejmě bod S_i ($i = 1, 2, 3$), v němž rovina ρ protne paprsek protínající h_1 i h_2 a obsahující bod S. Na tomto paprsku leží totiž bod S', odpovídající bodu S v (h_1, h_2); avšak z bodu S promítá se bod S (pokud jej pokládáme za bod plochy Q) každou tečnou v tomto bodu, t. j. každou přímkou vedenou bodem S v rovině (p_1, p_2). I odpovídá bodu S_i každý bod přímky $D_1 D_2$.

3. Kvartika K' se reprodukuje ještě dvěma inversemi (jež s předchozími sedmi transformacemi obecně nenáleží do grupy); střed každé z nich je jeden dvojnásobný bod křivky; označme je tudíž (D_1), (D_2). Promítnutím dospějeme k některé této inversi takto: každá rovina položená přímkou p_1 protne plochu Q v další přímce, na níž leží dva body křivky K. Tato rovina protne ρ v přímce bodem D_1, na níž leží oba body křivky K', jež si odpovídají v této inversi. Další dva hlavní body této inverse jsou jednoduché body křivky. Nalezneme je, když nejprve hledáme body, které v této inversi odpovídají bodu D_1. Bod D_1 obdržíme promítnutím do roviny ρ obou bodů R_1, R_1', v nichž přímka p_1 protne křivku K. Nazveme r_1, r_1' přímky plochy procházející, vedle přímky p_1, body R_1, R_1'; průměty těchto přímek do roviny ρ protnou K' v bodech D_1', D_1'', jež odpovídají bodu D_1. Jejich spojnice je zřejmě hlavní přímka odpovídající bodu D_1; její další dva průsečíky s křivkou jsou hledané body hlavní.

Do dalších podrobností není třeba se pouštěti; to, co bylo uvedeno, stačí pro účel vytknutý zpředu.

4. Volme nyní bod S v jednotlivých s p e c i á l n í c h p o l o h á c h. *a*) Leží-li bod S na kuželi o vrcholu O_i, obsahujícím křivku K, má K' bod taknodální, neboť obě přímky p_1, p_2 splynou v jedinou a tudíž také dvojnásobné body křivky splynou v jediný. Sedm involucí grupy zůstává tím — obecně — nedotčeno. Avšak inverse (D_1), (D_2) zřejmě odpadnou, přesněji

řečeno, splynou navzájem a s jednou inversí grupy, totiž s inversí (O_i'), neboť přímky plošné, v nichž roviny položené přímkou p_1 ($\equiv p_2$) protnou plochu, procházejí nyní všechny bodem O_i. *Je tedy počet kvadratických involucí křivky s bodem taknodálním obecně o dvě menší.*

b) Bod S leží v jedné stěně polárního tetraedru. Pak kuželosečka, v níž plocha Q je proťata touto rovinou, promítá se do roviny ρ v přímku. Z toho, co řečeno o inversích (O_1') je tudíž zřejmo, že *jedna z nich se stala kolineací*, neboť její řídící kuželosečka přešla v přímku.

c) Bod S leží na hraně polárního tetraedru. To je dvojnásobný případ předchozí, t. j., *dvě inverse grupy se staly kolineacemi*, a ovšem *ještě jedna další involuce grupy*, ta totiž, jež vznikne složením prvních dvou.

Lze pak případ *a*) ještě kombinovati s případem *b*) nebo s případem *c*). Dostaneme tak křivku s bodem taknodálním, u které ještě buď jedna (případ *a*), nebo ještě tři kvadratické transformace se staly kolineacemi. Lze snadno zjistiti, že křivka známá z teorie eliptických integrálů o rovnici

$$y^2 = (1 - x^2)\ (1 - k^2 x^2)$$

je křivka mající vlastnost posléze uvedenou, t. j. je to křivka s bodem taknodálním, jež se reprodukuje, vedle tří kolineací, již jen čtyřmi transformacemi kvadratickými. Bylo by možno zkoumati ještě další možné zvláštní polohy bodu S, na př. takovou, při níž by přešla v kolineaci některá z inversí (D_1), (D_2), a j.; ale omezím se již jen na jeden výsledek.

5. Zvláště zajímavý výsledek se obdrží, když zvolíme bod S na jedné z t. zv. ploch Vossových. To je plocha kvadratická položená křivkou, která se reprodukuje (identitu v to počítaje) šestnácti z dvaatřiceti kolineací, jimiž se reprodukuje eliptická kvartika prostorová.[2]) To znamená, že rovinná K', jež vznikne promítnutím z bodu takto voleného, se reprodukuje šestnácti kvadratickými transformacemi. Tuto zvláštní kvartiku lze charakterisovati geometricky velmi jednoduše. Pro stručnost odvodím příslušnou vlastnost užitím parametrického vyjádření bodů křivky K.

Je-li u eliptický parametr, volený tak, že

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0.$$

je podmínka pro to, aby čtyři body ležely v rovině, pak plocha Vossova (jichž je šest), je charakterisována[3]) tím, že přímky

[2]) V. na př. mé pojednání: „Grupa kolineací prostorové křivky bikvadratické atd." Rozpravy Č. Akad. tř. II. roč. XVII (1908), č. 18., kde je uvedena také literatura.

[3]) V práci uvedenou v pozn. předch., str. 7.

jedné její soustavy protínají křivku v bodech (v_1), (v_2), pro něž platí

$$v_1+v_2\equiv\frac{p}{4},$$

kde p značí periodu; pro body (w_1), (w_2), v nichž křivku protne přímka druhé soustavy, platí pak

$$w_1+w_2\equiv\frac{p}{4},$$

kde p značí tutéž periodu. Buďtež v_1, v_2 (w_1, w_2) porametry bodů v nichž křivku protíná přímka p_1 (p_2). Z přímky p_1 promítněme libovolný bod (u) křivky rovinou; pro čtvrtý průsečík (u') této roviny s křivkou pak platí

$$v_1+v_2+u+u'\equiv 0.$$

Promítněme z přímky p_1 body u, u'; čtvrtý průsečík první promítací roviny budiž (u''), druhé (u'''); platí pak

$$w_1+w_2+u+u''\equiv 0,$$
$$w_1+w_2+u'+u'''\equiv 0.$$

Sečtěme poslední dvě kongruence a odečtěme od výsledku předchozí; dostaneme

$$-v_1-v_2+2(w_1+w_2)+u''+u'''\equiv 0.$$

Je však $$w_1+w_2\equiv-(v_1+v_2),$$

takže poslední kongruenci lze psáti

$$-3(v_1+v_2)+u''+u'''=0.$$

Z ní plyne, vzhledem k tomu, že $4(v_1+v_2)\equiv 0$:

$$v_1+v_2+u''+u'''\equiv 0.$$

To však znamená v rovině, že vedeme-li jedním dvojnásobným bodem paprsek a promítneme-li jeho další dva průsečíky A, A' s křivkou z druhého dvojnásobného bodu, a jsou-li B, B' další průsečíky promítacích paprsků s křivkou, prochází spojnice B, B' opět prvním bodem dvojnásobným. Jinými slovy: lze najíti takové dvojice paprsků (v neomezeném množství) jedním dvojnásobným bodem, jež protnou křivku v dalších čtyřech bodech, ležících také na dvojici paprsků vedených druhým bodem dvojnásobným. Z toho snadno usoudíme platnost věty:

Rovinná kvartika eliptická, jež vznikne promítnutím prostorové kvartiky z bodu její Vossovy plochy, a jež se reprodukuje grupou 16 kvadratických transformací, je křivka vytvořená dvěma projektivními involucemi paprsků.

*

Rêmarque sur les quartiques planes spéciales.

(Extrait de l'article précédent.)

On obtient des quartiques spéciales en demandant que le nombre des transformations quadratiques reproduisant la quartique elliptique plane diffère du nombre (de neuf) qui se présente dans le cas général. Puisqu'on peut — comme l'auteur a montré ailleurs — obtenir ces transformations par projection des homographies d'une quartique gauche, on peut s'attendre à ce qu'il sera aisé d'obtenir des courbes spécialisées comme il vient d'etre mentionné, en choisissant le centre de projection dans des positions spéciales par rapport aux figures qui sont importantes pour les homographies citées ci-dessus. L'auteur fait une étude sommaire de ces cas en choisissant comme centre de projection *a)* un point du cône quadratique contenant la quartique gauche, *b)* un point d'une face du tétraèdre polaire commun à toutes les quadriques contenant la quartique, *c)* un point d'une arête de ce tétraèdre, *d)* un point d'une surface de Voss de la quartique gauche respéctive (on nomme ainsi les six quadriques qui se reproduisent par seize homographies du groupe reproduisant la quartique). Dans ce dernier cas la courbe spéciale plane se reproduit par un groupe de seize transformations quadratiques; elle est caractérisée par cette propriété géométrique simple qu'elle est engendrée par deux involutions projectives de droites.

Nová metoda projektivní geometrie zborcených ploch.

Napsal *Eduard Čech.*

1. V následujícím hodlám stručně vyložiti novou metodu pro diferenciální studium zborcených ploch v obyčejném prostoru vzhledem ku projektivním transformacím. Doufám, že čtenář shledá, že tato metoda je mnohem jasnější a jednodušší než metoda Wilczynského. Označuji jediným písmenem, jako x, y, z $(\xi, \eta, \zeta \ldots)$ čtyři homogenní souřadnice bodu (roviny), $(x\,y\,z\,t)$ značí determinant z homogeních souřadnic čtyř bodů, $S\,x\,\xi$ znamená čtyřčlenný součet $x^1\,\xi^1 + x^2\,\xi^2 + x^3\,\xi^3 + x^4\,\xi^4$, $(x\,y\,z)$ značí čtyři souřadnice rovinové ξ tak, že jest identicky v t $(x\,y\,z\,t) = S\,\xi\,t$; duálně pro $(\xi\,\eta\,\zeta\,\tau)$, $(\xi\,\eta\,\zeta)$. Konečně značím $(x\,y)$ Plücherovy souřadnice přímkové $x^1\,y^2 - x^2\,y^1$, $x^2\,y^3 - x^3\,y^2 \ldots$; podobně $(\xi\,\eta)$.

2. Plocha přímková Π je určena, jsou-li dány dva proměnné body, jichž souřadnice y, z*) jsou funkcemi téhož parametru, a jest vytvořena přímkou o souřadnicích $(y\,z)$. Výrazy, které jsou určeny

*) Pro krátkost mluvím o bodech y, z a podobně.