Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Dusl

Dvě poznámky k vektorovému počtu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 71--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109355

ještě pro verifikaci několika počátečních případů. Indukci přijímají jako základní metodu psychologové-nematematikové, jako Wundt.*) Pouhá indukce nestačí. Vede jen k přibližnostem, s nimiž se musí spokojovat snad v přírodních vědách, ale ne v matematice, kde můžeme dociliti naprosté přesnosti. Příkladem induktivních geometrií jsou staré egyptské učebnice, plné nepřesností.

*

La méthodologie des mathématiques.

(Extrait de l'article précédent.)

La méthodologie des mathématiques traite des formes des procédés d'étude en mathématiques, notamment: 1. de la recherche et du choix des problèmes; 2. de la résolution des problèmes; 3. des démonstrations. Le meilleur moyen pour résoudre la première question est la psychologie. La seconde partie traite des méthodes de resolution les plus usuelles, soit: l'analyse et la synthèse, et compare ces méthodes mathématiques aux méthodes logiques désignées par les mêmes noms. La troisième partie s'occupe des formes logiques des démonstrations, des erreurs dans les démonstrations et du sentiment de l'évidence. Sont considerées encore les méthodes qui conduisent aux notions mathématiques fondamentales: l'abstraction, la détermination, l'idéalisation, l'analogie, la déduction et l'induction.

Dvě poznámky k vektorovému počtu.

Napsal *Karel Dusl.*

I. O exponenciálních výrazech vektorových.

Součin dvou vektorů

$$\mathfrak{A} = a\,\mathfrak{a} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} \quad \text{a} \quad \mathfrak{B} = b\,\mathfrak{b} = x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k}$$

pišme, předpokládajíce pravidlo distributivní:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{B} = {} & xx'\,\mathfrak{i}\mathfrak{i} + xy'\,\mathfrak{i}\mathfrak{j} + xz'\,\mathfrak{i}\mathfrak{k} \\ & + yx'\,\mathfrak{j}\mathfrak{i} + yy'\,\mathfrak{j}\mathfrak{j} + yz'\,\mathfrak{j}\mathfrak{k} \\ & + zx'\,\mathfrak{k}\mathfrak{i} + zy'\,\mathfrak{k}\mathfrak{j} + zz'\,\mathfrak{k}\mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Výraz tento možno považovati za pouhou nonionovou formu tensoru (dyadu)**), aneb lze mu dáti význam geometrický, nezávislý

*) l. c. p. 131 nn.

**) Gibbs-Wilson: Vector Analysis p. 269.

na volbě systému $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Klademe-li v (1)

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0; \quad x' = b \cos\varphi, \quad y' = b \sin\varphi$$
$$z = 0, \quad \mathfrak{i}\mathfrak{i} = \alpha, \quad \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \beta \text{ obdržíme:}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = ab \cos\varphi\,\alpha + ab \sin\varphi\,\beta \tag{2}$$

při tom φ znamená odchylku obou vektorů $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, α a β jsou symbolické součiny, z nichž první záleží na poloze vektoru $\mathfrak{A}$, druhý rovněž na této poloze a na poloze roviny obou vektorů ($\beta = \mathfrak{i}\,\mathfrak{j}$). Vyjádříme-li oba součiny $ab \cos\varphi$ a $ab \sin\varphi$ měrnými čísly x, y, z a x', y', z' a položíme-li:

$$\beta = \lambda\bar{\mathfrak{i}} + \mu\bar{\mathfrak{j}} + \nu\bar{\mathfrak{k}}, \tag{3}$$

kde λ, μ, ν jsou směrové kosiny direktní normály ku oběma vektorům a $\bar{\mathfrak{i}}$, $\bar{\mathfrak{j}}$, $\bar{\mathfrak{k}}$ nové symboly, závislé podobně jako β na směru prvního vektoru a na poloze roviny určené oběma vektory, obdržíme z (2):

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (xx' + yy' + zz')\,\alpha +$$
$$(yz' - zy')\,\bar{\mathfrak{i}} + (zx' - xz')\,\bar{\mathfrak{j}} + (xy' - yx')\,\bar{\mathfrak{k}}.$$

Srovnáme-li (1) a (4) nalezneme: (4)

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \;& \mathfrak{k}\mathfrak{k} = \alpha \\ \mathfrak{j}\mathfrak{k} = -\;& \mathfrak{k}\mathfrak{j} = \bar{\mathfrak{i}} \\ \mathfrak{k}\mathfrak{i} = -\;& \mathfrak{i}\mathfrak{k} = \bar{\mathfrak{j}} \\ \mathfrak{i}\mathfrak{j} = -\;& \mathfrak{j}\mathfrak{i} = \bar{\mathfrak{k}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Patrně α na směru prvního vektoru vůbec nezávisí. Klademe-li za α, $\bar{\mathfrak{i}}$, $\bar{\mathfrak{j}}$, $\bar{\mathfrak{k}}$ zvláštní hodnoty, jak následuje, obdržíme všechny druhy geometrických součinů, které se ve vektorovém počtu zavádějí.

Tak součiny Grassmannovy:

$$\text{vnitřní:} \quad \begin{aligned} \mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} &= 1 \\ \bar{\mathfrak{i}} = \bar{\mathfrak{j}} = \bar{\mathfrak{k}} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{vnější:} \quad \begin{aligned} \mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 0 \\ \bar{\mathfrak{i}} = \mathfrak{j}\mathfrak{k}, \quad \bar{\mathfrak{j}} = \mathfrak{k}\mathfrak{i}, \quad \bar{\mathfrak{k}} = \mathfrak{i}\mathfrak{j} \end{aligned} \tag{7}$$

t. j. $\bar{\mathfrak{i}}$, $\bar{\mathfrak{j}}$, $\bar{\mathfrak{k}}$ jsou pak jednotkové bivektory.

V součinech vektorových klademe rovněž

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 0 \qquad \text{avšak}$$
$$\bar{\mathfrak{i}} = \mathfrak{i}, \qquad \bar{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j}, \qquad \bar{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} \tag{8}$$

podobně pro Hamiltonovy kvaterniony jest

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = -1 \\ \bar{\mathfrak{i}} = \mathfrak{i}, \quad \bar{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j}, \quad \bar{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{9}$$

Kvaterniony mají před součiny Grassmannovými*) tu výhodu, že jsou asociativní; součin libovolného počtu kvaternionů jest opět kvaternionem. Součiny vektorové lze však také rozšířiti na libovolný počet činitelů. Ale i součiny vnitřní, uvažujeme-li je jako součiny skalární, t. j. pojmeme-li do skalárního násobení také součiny skalárů s vektory, lze pak provésti při libovolném počtu činitelů. Specielně pak možno definovati celistvé kladné skalární mocnosti vektoru. Budiž a absolutní hodnota vektoru, $\mathfrak{a}$ vektor jednotlivý, takže

$$\mathfrak{A} = a\,\mathfrak{a}. \tag{10}$$

Potom bude

$$\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{A} = a^2 = \mathfrak{A}^2$$

$$\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{A} = a^2\, \mathfrak{A} = a^3\, \mathfrak{a} = \mathfrak{A}^3$$

$$\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{A} = a^3\, \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{A} = a^4 = \mathfrak{A}^4$$

a obecně:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}^{2n} &= a^{2n} \\ \mathfrak{A}^{2n+1} &= a^{2n+1}\, \mathfrak{a}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Pomocí těchto „skalárních mocností“ lze definovati čísla obdobná Hamiltonovým kvaternionům, při násobení skalárním komutativní, zakládající se na dvou jednotkách a to skalární jedničce a vektoriální jedničce libovolného směru. Rozšíříme-li platnost rozvoje:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{12}$$

podobně, jako pro čísla imaginárná (pro něž $i \,.\, 1 = i$, $i \,.\, i = -1$) také pro vektory (kde $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{a} \,.\, 1 = \mathfrak{a}$) při čemž za mocniny vektoru dosadíme skalární mocnosti (11), obdržíme skalární exponenciální výraz:

$$E(\mathfrak{A}) = e^{\mathfrak{A}} = 1 + \frac{a\,\mathfrak{a}}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3\mathfrak{a}}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5\mathfrak{a}}{5!} + \cdots \tag{13}$$

čili

$$E(\mathfrak{A}) = 1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \cdots + \mathfrak{a}\left(\frac{a}{1!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} \cdots\right) \tag{14}$$

Řady tyto jsou hyperbolické funkce argumentu a. I bude:

$$E(\mathfrak{A}) = e^{\mathfrak{A}} = Ch\,a + \mathfrak{a}\, Sh\,a. \tag{I}$$

Význam této rovnice jest analogický jako vzorce Eulerova pro e^{ai}. Také čísla tvaru $Ch\,a + \mathfrak{a}\,Sh\,a$ jsou analogická číslům komplexním resp. kvaternionům, skládajíce se z části skalární a vektoriální. Komutativním skalárním násobením dvou takových čísel vznikne číslo téhož druhu. Použití vzorce (I) jest zcela podobné, jako u vzorce Eulerova.

*) Timmerding: Geometrie der Kräfte. Str. 22.

Jelikož jest:

$$Ch\,a = \cos\, i\,a,\quad i\,Sh\,a = \sin\, i\,a$$

bude především

$$e^{\frac{\pi i}{2}\alpha} = i\,\alpha,\quad e^{\pi i\,\alpha} = -1. \tag{15}$$

Násobíme-li rovnici (I) po obou stranách skalární veličinou b obdržíme:

$$b\,e^{a\,\alpha} = b\,(Ch\,a + \alpha Sh\,a) = P + \alpha Q. \tag{16}$$

Odtud:

$$b = \sqrt{P^2 - Q^2}$$

$$a = Arc\ Th\,\frac{Q}{P}. \tag{17}$$

V těchto vzorcích je patrně obsažen způsob počítání těmito čísly Možno definovati přirozený log $(P + \alpha Q)$ vztahem:

$$\log\,(P + \alpha\,Q) = \frac{1}{2}\,\log\,(P^2 - Q^2) + \alpha\,Arc\ Th\,\frac{Q}{P} + 2\,k\,\pi i \tag{18}$$

odtud bylo by lze přejíti ku obecné mocnině čísel těchto zcela tak, jako při číslech imaginárních.

Pro dvě čísla odvozená z téhož vektoru jednotkového:

$$e^{a\alpha} = Ch\,a + \alpha Sh\,a$$

$$e^{a'\alpha} = Ch\,a' + \alpha Sh\,a'$$

plyne skalárním znásobením:

$$\begin{aligned} e^{a\alpha}\,.\,e^{a'\alpha} &= (Cha\ Cha' + Sha\ Sha') + \alpha\,(Sha\ Cha' + Cha\ Sha') = \\ &= Ch\,(a + a') + \alpha\,Sh\,(a + a') \end{aligned} \tag{19}$$

tedy:

$$e^{a\alpha}\,.\,e^{a'\alpha} = e^{\alpha\,(a' + a)}. \tag{II}$$

Diferencujme rovnici (I). Na levé straně bude:

$$e^{a\alpha}\,.\,(a\,d\alpha + \alpha\,da) = Sh\,a\,da + d\alpha\,a\,Ch\,a + \alpha\,Ch\,a\,da.$$

Na straně pravé diferencováním funkcí hyperbolických:

$$Sh\,a\,da + d\alpha\,Sh\,a + \alpha\,Ch\,a\,da.$$

Pro $d\alpha = 0$, t. j. mění-li se vektor $\mathfrak{A}$ jen co do velikosti, nikoliv co do směru, souhlasí pak obě strany. To souvisí s tou vlastností čísel (I), že vztah (II), pišme

$$E\,(\mathfrak{A}_1)\,.\,E\,(\mathfrak{A}_2) = E\,(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2),$$

platí obdobně jako u kvaternionů*) jen pro vektory kollineárné.

*) Hamilton-Glan: Elemente der Quoternionen I., str. 347.

Z rovnice (I) nalezneme, píšeme-li vektor $\mathfrak{A}$ ve tvaru semikartézském:

$$e^{xi+yj+zk} = Ch\sqrt{x^2+y^2+z^2} + (i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma)\ Sh\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (20)$$

kde α, β, γ jsou úhly vektoru $\mathfrak{A}$ s osami souřadnými, takže nelze psáti

$$e^{xi} . e^{yj} . e^{zk} = e^{xi+yj+zk}.$$

Mohli bychom však touto rovnicí definovati součin tří čísel tvaru (I), ale nebyl by to pak součin skalární, ani vektorový.

Obecně jest totiž v platnosti:

$$e^{\mathfrak{a}_1 a_1 + \mathfrak{a}_2 a_2} = Cha + \mathfrak{a} Sha, \qquad \text{(III)}$$

kde $\mathfrak{a}_1 a_1 + \mathfrak{a}_2 a_2 = \mathfrak{a} a$,

kdežto skalárním znásobením obou exponenciell:

$$e^{\mathfrak{a}_1 a_1} . e^{\mathfrak{a}_2 a_2} = Cha_1\ Cha_2 + \mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}_2\ Sha_1\ Sha_2 + \qquad (21)$$
$$+ \mathfrak{a}_1\ Sha_1\ Cha_2 + \mathfrak{a}_2\ Cha_1\ Sha_2.$$

Pravé strany rovnic (21) a III. shodují se jen tehdy a součin (III) přechází tedy v součin skalárný jen, když:

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2, \quad \text{nebo} \quad \mathfrak{a}_1 = - \mathfrak{a}_2$$

t. j. pro vektory téhož, resp. opačného směru. Tak jest tomu ovšem také při kvaternionech. V „Elemente der Quoternionen" (Hamilton-Glan 1882) I., str. 347.:

Rovnice: $P(q' + q) = P(q')\ P(q)$ platí,

jestliže $q' \parallel\!\mid q$ t. j. příslušné kvaterniony jsou komplanární a lze je algebraicky sečítati (ibid. 346). Jeví se tedy čísla tvaru:

$$Cha + \mathfrak{a}\ Sh(a) = E(\mathfrak{A}) = P + \mathfrak{a}\ Q$$

ve svých vlastnostech obdobná kvaternionům, pro vektory téhož směru jest v platnosti vztah (II) a skalární násobení těchto čísel jest komutativní.

II. O vektorech polárných a axiálných.

Některé učebnice o vektorové analysi vytýkají rozdíl mezi vektory polárnými a axiálnými,*) jiné tohoto rozdílu nečiní**) a opět někteří autoři dokonce popírají různost obou druhů vektorů.***)

*) Jahnke, Ignatowský, Valentiner, Encyklopédie des sciences mathématiques T. IV. Libický, Kučera a j.

**) Gibbs-Wilson, Bucherer, Gans, Runge a j.

***) Burali-Forti: Analyse véctorielle T. II. p. 122.

V žádné z učebnic není rozdíl tento vytčen přesně a někde ne zcela správně.

Pokusím se v této poznámce věc objasniti.

1. Přechod od soustavy pravo- ku levotočivé sprostředkujme nejprve inversí směrů všech tří os souřadných, t. j. jednotkové vektory $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ nahradíme:

$$\mathfrak{i} = -\mathfrak{i}', \ \mathfrak{j} = -\mathfrak{j}', \ \mathfrak{k} = -\mathfrak{k}'. \tag{1}$$

Tím všechny vektorové výrazy, které se vztahovaly k soustavě ($\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$), se transformují k nové soustavě ($\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$).

A tu obyčejně čteme:

„Měrná čísla (komponenty, t. j. čísla, jimiž je vektor odvozen z příslušných jednotkových vektorů) vektoru polárného se při transformaci (1) změní co do znaménka, u vektoru axiálného pak znaménka svého nemění.

Pro vektor polárný (prostý) je to z rovnice:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} = A_1 \mathfrak{i} + A_2 \mathfrak{j} + A_3 \mathfrak{k} &= -A_1 \mathfrak{i}' - A_2 \mathfrak{j}' - A_3 \mathfrak{k}' \\ &= A'_1 \mathfrak{i}' + A'_2 \mathfrak{j}' + A'_3 \mathfrak{k}'\end{aligned} \tag{2}$$

ihned patrno. Avšak zcela tak chovají se k transformaci (1) také vektory axiálné.

Ignatowský (I. str. 87) dochází k následujícímu závěru:

Je-li
$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] \tag{3}$$
jest
$$\mathfrak{A} = A_1 \mathfrak{i} + A_2 \mathfrak{j} + A_3 \mathfrak{k} \tag{4}$$
při čemž
$$A_1 = B_2 C_3 - C_2 B_3 \text{ atd.} \tag{5}$$

Jestliže v rovnici (3) transformujeme dle (1) a provedeme-li vektorové násobení, šetříce pro levotočivou soustavu pravidla

$$[\mathfrak{i}', \mathfrak{j}'] = -\mathfrak{k}' \text{ atd.} \tag{6}$$

obdržíme na konec:

$$\mathfrak{A} = -A'_1 \mathfrak{i}' - A'_2 \mathfrak{j}' - A'_3 \mathfrak{k}' \tag{7}$$

při čemž: $\quad A'_1 = A_1, \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3.$ (8)

Ale to neznamená, jak Ignatowský tvrdí, že se složky tohoto vektoru $\mathfrak{A}$ nezmění, naopak složky vektoru $\mathfrak{A}$ v nové soustavě jsou $-A'_1$, $-A'_2$, $-A'_3$ [dle rovnice (7)] a opět jest $-A'_1 = -A_1$, $-A'_2 = -A_2$, $-A'_3 = -A_3$ zcela tak, jako v rovnici (2).

Totéž vychází ostatně z pravidla pro vektorové násobení v levotočivé soustavě:

$$\mathfrak{k} = [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] = [-\mathfrak{i}', -\mathfrak{j}'] = [\mathfrak{i}', \mathfrak{j}'] = -\mathfrak{k}' \tag{9}$$

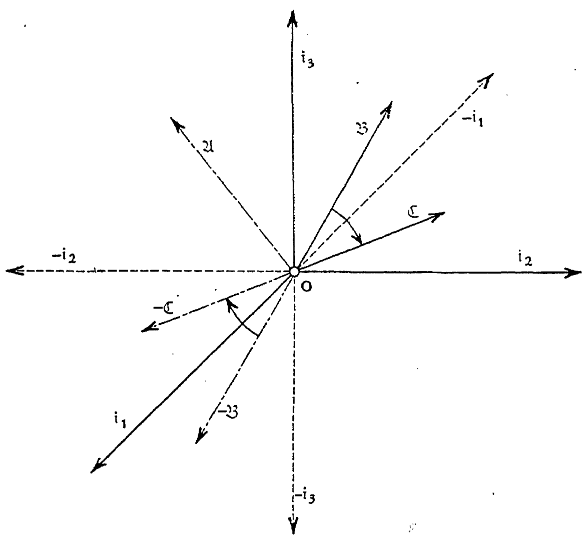
Po této stránce čteme v Kučerových „Základech mechaniky těles tuhých“ str. 15. zcela správně: „Kdybychom připustili, že i v soustavě nové se násobí

$$[\mathfrak{i}', \mathfrak{j}'] = \mathfrak{k}', \tag{10}$$

což by odpovídalo zřídka v praxi užívanému šroubu levotočivému, t. j. volbě kladného směru normály opačným směrem při oběhu příslušné plošky, než jest obvyklo, tu by místo (7) vycházelo

$$\mathfrak{A} = A_1 \mathfrak{i}' + A_2 \mathfrak{j}' + A_3 \mathfrak{k}' \tag{11}$$

a složky by znamení nezměnily.“



Obr. 1.

Rozdíl mezi polárnými a axiálnými vektory dá se definovati pak přesně takto:

Proveďme inversi $\mathfrak{i} = -\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j} = -\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k} = -\mathfrak{k}'$. Oba prostory vztahující se k jednotkovým vektorům $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ a $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ jsou pak středově souměrny dle počátku.

Chceme-li vektor polárný (prostý) v soustavě $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ nahraditi stejně položeným vektorem v soustavě $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$, nutno jej nahraditi vektorem středově souměrným dle počátku. A to je vektor, který píšeme $-\mathfrak{A}$. Tedy: co pro soustavu $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}$ je vektor $\mathfrak{A}$, jest pro soustavu $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ vektor $-\mathfrak{A}$. Oba vektory mají ve svých soustavách stejná měrná čísla. Musíme tedy změniti znaménko u měrných čísel původního vektoru, abychom dostali analogický vektor v nové soustavě $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}$.

Z rovnice:

$$-\mathfrak{A} = -A_1\mathfrak{i} - A_2\mathfrak{j} - A_3\mathfrak{k} = A_1\mathfrak{i}' + A_2\,' + A_3\mathfrak{k}'$$

$$\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k} \qquad (12)$$

jest to patrno.

J i n a k j e t o m u u v e k t o r ů a x i á l n ý c h. Tu jest nutno přihlížeti k tomu, že takový vektor znázorňuje plochu (Plangrösse), t. j. vektorovou veličinu druhého stupně zcela určitě orientovanou v prostoru. Rovnoběžník $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ nahraďme rovnoběžníkem $[-\mathfrak{B}, -\mathfrak{C}]$, který je k předešlému souměru položen dle počátku. (Viz obr. 1.) A l e o b ě t y t o p l o c h y j s o u z n á z o r n ě n y j e d n í m a t ý m ž e v e k t o r e m a x i á l n ý m.

Chceme-li tedy vektor axiálný $\mathfrak{A}$ v soustavě $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ nahraditi stejně položeným vektorem axiálným v soustavě $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$, není třeba s ním ničeho činiti, t. j. nechati jej nezměněný a pouze místo $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ psáti $-\mathfrak{i}', -\mathfrak{j}', -\mathfrak{k}'$. Pak ovšem složky tohoto vektoru v nové soustavě $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ budou záporně vzatými složkami téhož vektoru v soustavě $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, dle rovnice (2). Za to ale tři složky části rovinné $[-\mathfrak{B}, -\mathfrak{C}]$ (t. zv. Richtungsstücke) v soustavě invertované jsou zcela stejné se složkami rovinné části $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ v soustavě původní.

Vektor
$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k} \qquad (13)$$
$$\mathfrak{A}' = [-\mathfrak{B}, -\mathfrak{C}] = -A_1\mathfrak{i}' - A_2\mathfrak{j}' - A_3\mathfrak{k}'$$

jsou jeden a týž vektor axiální. — Ostatně je to patrno již z toho, že klademe:

$$[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] = \mathfrak{k} \quad \text{ale} \quad [\mathfrak{i}'\,\mathfrak{j}'] = -\mathfrak{k}'$$
$$\text{a tedy opět} = \mathfrak{k}. \qquad (14)$$

A zcela tak se má věc s tak zv. p s e u d o s k a l á r y. Na pseudoskalár nutno pohlížeti jako na „část prostoru“, t. j. veličinu vektorovou stupně třetího, zcela určitě směrově orientovanou v prostoru čtyřrozměrném. (Část rovinná jest rovněž skalárem ve dvojrozměrné rovině.)

Pseudoskalár
$$S = \mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] \text{ a}$$
$$S' = -\mathfrak{A}\,[-\mathfrak{B}, -\mathfrak{C}]$$

jsou souměrné dle počátku a jest

$$S' = -S \qquad (15)$$

tedy vektor znázorňující ve čtyřrozměrném prostoru tento pseudoskalár byl by vektorem polárným. Neleží tedy vlastnost polarity nebo axiality ve vlastnosti vektoru samého (ten může být jenom vektorem prostým), nýbrž ve vlastnostech vektorových veličin vyšších stupňů, které znázorňuje.

2. Přechod od soustavy pravo- ku levotočivé dá se také sprostředkovati obrácením směru jen jedné osy (zrcadlením v jedné rovině souřadné). Taková transformace jest na př.:

$$\mathfrak{i} = -\mathfrak{i}', \qquad \mathfrak{j} = \mathfrak{j}', \qquad \mathfrak{k} = \mathfrak{k}'. \tag{16}$$

Tu jest pak:

$$
\begin{aligned}
[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] &= \mathfrak{k}, & [\mathfrak{i}', \mathfrak{j}'] &= -\mathfrak{k}' = -\mathfrak{k} \\
[\mathfrak{j}, \mathfrak{k}] &= \mathfrak{i}, & [\mathfrak{j}', \mathfrak{k}'] &= -\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} \\
[\mathfrak{k}, \mathfrak{i}] &= \mathfrak{j}, & [\mathfrak{k}', \mathfrak{i}'] &= -\mathfrak{j}' = -\mathfrak{j}.
\end{aligned}
$$

Jedna složka polárného vektoru mění své znamení, kdežto u vektoru axiálného složky dvě. — To, míním, přispěje k objasnění poznámky v Analyse véctorille Buralli-Forti T. II. p. 122.

*

Deux remarques sur le calcul vectoriel.

(Extrait de l'article précédent.)

I. Sur les exponentielles des vecteurs.

Si l'on étend la notion de la multiplication scalaire (innere Multiplikation de Grassmann) à un produit d'un nombre quelconque de vecteurs et de multiplicateurs scalaires, on peut définir des puissances scalaires d'un vecteur. On a les formules (10/11) de l'article. La série (13) donne la définition d'exponentielle d'un vecteur: $e^{\mathfrak{A}} = E(\mathfrak{A})$ et on obtient, en séparant la partie scalaire et la partie vectorielle de la série précédente:

$$E(\mathfrak{A}) = Cha + \mathfrak{a}\, Sha$$

où *Cha* et *Sha* sont des fonctions hyperboliques.

Les nombres de la forme $Cha + \mathfrak{a}\, Sha$ ont des propriétés semblables à celles des quaternions de Hamilton. Pour les vecteurs collinéaires la formule (II) a lieu. Ces nombres dépendent de deux unités, dont l'une est scalaire, l'autre vectorielle; les produits scalaires de ces nombres sont commutatifs. Il y a une analogie parfaite avec les nombres imaginaires.

II. Sur les vecteurs polaires et les vecteurs axiaux.

L'auteur tâche de préciser la différence entre les deux espèces de vecteurs, les vecteurs polaires et les vecteurs axiaux.

1) On passe d'un système positif $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ au système négatif $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ p. ex. en changeant la direction des axes, c. à d. par la transformation

$$\mathfrak{i} = -\mathfrak{i}', \; \mathfrak{j} = -\mathfrak{j}', \; \mathfrak{k} = -\mathfrak{k}'.$$

Les deux espèces de vecteurs se transforment, par cette transformation, de la même manière, contrairement à ce qu'affirment *quelques auteurs**). Les composantes d'un vecteur (axial ou polaire) changent de signe dans le nouveau système. On a les formules (2) pour les deux espèces de vecteurs.

La différence entre les deux espèces de vecteurs s'exprime, d'une facon précise, comme il suit: Les deux espaces $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ sont symétriques par rapport à l'origine. Le vecteur $\mathfrak{A}$ est symétrique au vecteur $-\mathfrak{A}$ par rapport à l'origine. Les deux vecteurs $\mathfrak{A}$ et $-\mathfrak{A}$ ont la même position relative dans les deux systèmes $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ et $-\mathfrak{i}, -\mathfrak{j}, -\mathfrak{k}$. *Pour obtenir un vecteur „analogue“ dans le nouveau système, il faut changer le signe des composantes du vecteur polaire* $\mathfrak{A}$ et écrire les formules (12).

Il n'en est pas de même quand il s'agit des vecteurs axiaux. Les parallélogrammes $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ et $(-\mathfrak{A}, -\mathfrak{B})$ sont symétriques par rapport à l'origine; mais les deux produits extérieurs (Plangrösse) doivent être représentés *par le même vecteur* — vecteur axial.

Donc, le vecteur $\mathfrak{A}$ axial a la même position relative dans les deux systèmes $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$, et pour obtenir un vecteur axial „analogue“ dans le système inverse, on ne doit *point changer le signe* du vecteur axial. Il en est de même pour les „pseudoscalaires“. Le pseudoscalaire $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ n'est qu'une „partie de l'espace“, c. à d. une quantité vectorielle du 3^e degré dans un espace à quatre dimensions, qui doit être représenté par un vecteur dans cette espace. Ce vecteur sera polaire, puisque

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B},\mathfrak{C}] = -(-\mathfrak{A}[-\mathfrak{B}, -\mathfrak{C}]).$$

2. Le système positif se transforme en un système negatif par une symétrie par rapport à un plan des coordonnées. Cela s'exprime p. ex. par la transformation $\mathfrak{i} = -\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}'$. On a, dans ce cas, les dernières formules de l'article. Les vecteurs polaires changent *une* composante, les vecteurs axiaux en *changent deux.*

Příspěvek k nomografickému řešení rovnic normálních o dvou neznámých.

Napsal Dr. *Frant. Fiala.*

Jedná-li se o hodnoty přibližné, buď že možno se při výpočtu spokojiti s menší přesností, nebo že chceme kontrolovati výpočet, v němž dopustili jsme se chyby, je výhodno užíti při řešení metody nomografické. Chci poukázati na nomografické řešení rovnic normálních o dvou neznámých, jež zhusta v praktické geodesii přicházejí v úvahu; lze pro ně sestrojiti nomogram velmi snadno, jehož upotřebení je nadmíru jednoduché.

*) Ignatowsky, Jahnke, Encyclopédie des sc. math. t. IV. etc.