Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Kounovský
Příspěvek k sestrojování meze vlastního stínu zborcených ploch šroubových za osvětlení rovnoběžného

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 114--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109351

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1924

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

La formule sommatoire pour la série

$$S = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-n}^{+n} e^{-h^2k^2}$$

(Extrait de l'article précédent.)

La formule sommatoire précise est

$$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{nh} e^{-t^2} dt + \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2n^2} + R_n, \quad R_n = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^n x e^{-h^2x^2} \left\{ [x] - x + \frac{1}{2} \right\} dx$$

On peut exprimer le reste R_n approximativement par la formule (6).

Příspěvek k sestrojování meze vlastního stínu zborcených ploch šroubových za osvětlení rovnoběžného.

Napsal *Jos. Kounovský.*

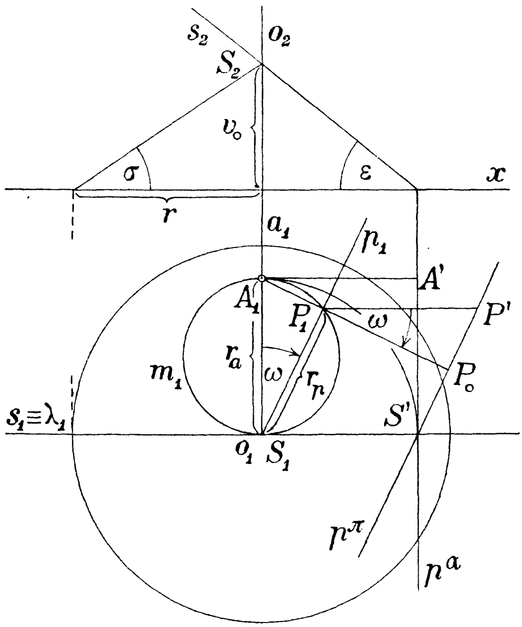
1. Při metodickém zpracování přednášek na vysokých školách technických jest třeba často přihlížeti z praktických důvodů k tomu, aby teoretické důkazy byly uspořádány pokud možná jednoduše. Z takové potřeby vznikla také následující úvaha; konstrukce z ní plynoucí podávají rovnoběžné osvětlení všech zborcených ploch šroubových bez použití geometrie projektivní a kinematické, opírajíce se jen o definici šroubového pohybu a o vztah mezi jeho oběma složkami; na tomto vztahu jest ostatně kinetická nauka o plochách šroubových založena.

Tečná rovina křivé plochy v libovolném jejím bodu jest dána tečnami ku dvěma křivkám, jež procházejí bodem na ploše. U zborcené plochy jest jednou touto čarou výtvarná povrchová přímka, jež bodem prochází; ta leží v tečné rovině. Mez vlastního stínu na zborcené ploše jest určena dotyčnými body světelných rovin, jež procházejí výtvarnými povrchovými přímkami. A tu jest možná určiti dotyčný bod takové světelné roviny z podmínky, že *tečna šroubovice procházející bodem dotyčným na ploše leží v jeho tečné rovině.*

2. Budiž dána v obr. 1. *pravoúhlá uzavřená šroubová plocha* o poloměru r v půdorysně a s osou o; šroubový pohyb určen jest redukovanou výškou závitu v_o, úměrnou rotačnímu pohybu po oblouku základní kružnice, jenž se rovná poloměru r. Je-li výška závitu v a sklon šroubovice σ, jest $2\pi r \,.\, \text{tg}\, \sigma = v$, r tg $\sigma = v_0$, a v_o cotg $\sigma = r$.

V nárysu vytčen vrchol S řídící kuželové plochy dané šroubovice, mající za řídící křivku základní kruh a za výšku redukovanou výšku závitu. Paprsek světelný s sestrojen vrcholem S rovnoběžně s nárysnou, jeho odchylka od půdorysny budiž ε.

Uvažujme o povrchové přímce a kolmé k rovině λ světelného meridiánu plochy. Sestrojme její světelnou rovinu α a stopu p^{α}

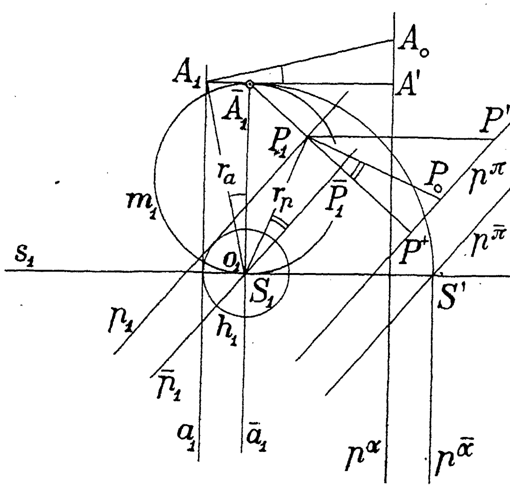


Obr. 1.

na novou půdorysnu, nacházející se ve vzdálenosti v_o pod přímkou a, jejíž nárys netřeba rýsovati; stopa p^{α} prochází patrně vrženým stínem S' vrcholu řídícího kužele o výšce v_o na jeho základnu, $S_1 S' = v_o \operatorname{cotg} \varepsilon$. Bod meze vlastního stínu A jest onen bod povrchové přímky a, pro který platí, že šroubovice bodem na ploše procházející má základní poloměr $r_a = v_o \operatorname{cotg} \varepsilon$; pak tečna té šroubovice jest světelným paprskem a A' leží na p^{α}. I jest $r_a = S_1 A_1 = S_1 S'$.

Pozorujme dále libovolnou povrchovou přímku p uvažovaného šroubového konoidu, zase jen v půdorysu, $\widehat{a_1 p_1} = \omega$ ve smyslu vytčeném. Sestrojíme-li stopu p^{π} světelné roviny π přímky p zase na půdorysně nacházející se ve vzdálenosti v_o pod površkou p, prochází patrně p^{π} bodem S', jenž značí vržený stín průsečíku $p \cdot o$, $p^{\pi} \parallel p_1$. Bod meze vlastního stínu P jest onen bod povrchové přímky p, jehož šroubovice na ploše má základní poloměr $r_p = v_0 \operatorname{cotg} \pi$, značí-li π zároveň půdorysnou odchylku světelné roviny; pak tečna té šroubovice leží v rovině světelné a má stopu P_0, $P_1 F_0 \perp p^{\pi}$, $P_1 P_0 = v_0 \operatorname{cotg} \pi = r_p$. Průmět tečny $P_1 P_0$ svírá s půdorysem $P_1 P'$ paprsku úhel ω v témž smyslu jako povrchová přímka p s površkou a kolmou k světelnému meridiánu,

$$P_1 P_0 = P_1 P' \cos \omega = S_1 S' \cos \omega = r_a \cos \omega, \text{ t. j. } r_p = r_a \cos \omega.$$



Obr. 2.

I jest půdorysem meze vlastního stínu kružnice m_1 opsaná nad průměrem $S_1 A_1$, jako úpatní křivka paprskového svazku o středu S_1 pro pól A_1. A ježto se bod P_1 otáčí na m_1 rovnoměrným pohybem dvakrát rychlejším než půdorys povrchové přímky kol S_1, neboť středový úhel ω jest na kružnici m_1 úhlem obvodovým, jest ukázáno, že mez vlastního stínu pravoúhlé uzavřené plochy šroubové jest šroubovice m o poloviční výšce závitu základního pohybu šroubového. Pól A_1 jest otočená poloha stínu S' o 90^0 ve smyslu vytčeného šroubového pohybu.

3. *Pravoúhlá otevřená plocha šroubová* nechť má osu o a hrdelní šroubovice h (v obr. 2. sestrojen toliko půdorys). Vytkněme paprsek světelný s a vržený stín S' bodu S osy o na půdorysnu, jež se nachází pod bodem S ve vzdálenosti redukované výšky závitu v_0 šroubovic na ploše, $S_1 S' = v_0 \operatorname{cotg} \varepsilon$, je-li ε odchylka světelných paprsků od půdorysny. Půdorysy plošných přímek jsou tečnami kružnice h_1. Povrchová přímka kolmá ku světelnému paprsku budiž a, proměnná povrchová přímka p.

Uvažujme současně o uzavřené šroubové ploše souosé a téže výšky závitu, jejíž povrchové přímky $\bar{a} \perp s$ a $\bar{p}$ jsou rovnoběžny ku a a p v těchže úrovních. Světelné roviny těchto površek buďtež resp. α a $\bar{\alpha}$, π a $\bar{\pi}$, body mezí vlastních stínů na nich A a $\bar{A}$, P a $\bar{P}$.

Sestrojme body meze vlastního stínu plochy uzavřené $\bar{A}$ a $\bar{P}$, $S_1 \bar{A}_1 = S_1 S'$, $\bar{A}_1 \bar{P}_1 \perp \bar{p}_1$, dále pak stopy světelných rovin $\bar{\alpha}$ a $\bar{\pi}$ bodem S' (vždy pro půdorysnu o v_o sníženou), jakož i stopy rovin α a π, $a_1 \dashv p^{\alpha} = \bar{a}_1 \dashv p^{\bar{\alpha}}$, $p_1 \dashv p^{\pi} = \bar{p}_1 \dashv p^{\bar{\pi}}$.

Bodem meze vlastního stínu A, jehož vržený stín A' jest na p^{α}, prochází na ploše šroubovice o základním poloměru r_a a sklonu α, $r_a = v_o \cotg \alpha$. Má-li tečna šroubovice v tom bodu ležeti ve světelné rovině α a její stopa A_o na p^{α}, musí $A_1 A_o = v_o \cotg \alpha = r_a = S_1 \bar{A}_1$. A ježto $A_1 A' = S_1 \bar{A}_1$, $A_1 A_o \perp S_1 \bar{A}_1$, plyne ze shodnosti $\triangle A_1 A' A_o \cong \triangle S_1 \bar{A}_1 A_1$, že $\bar{A}_1 A_1 \perp a_1$.

Obdobný vztah platí pro površku proměnnou, jen vržený stín A' sluší nahraditi stopou P^{+} spádové přímky bodem P meze vlastního stínu v jeho světelné rovině π. Šroubovice bodem na ploše má poloměr r_p a sklon π, $r_p = S_1 \bar{P}_1 = v_o \cotg \pi = P_1 P_o$, $P_1 P_o \perp S_1 \bar{P}_1$. Ježto $S_1 \bar{P}_1 = P_1 P^{+}$, leží P_1 na kolmici $\bar{A}_1 P_1 \perp p_1$. Půdorys meze vlastního stínu jest tedy úpatní křivkou kružnice h_1 pro pól $\bar{A}_1$ nebo též Pascalova závitnice jakožto specielní kruhová konchoida (kruhu m_1, půdorysu meze vlastního stínu pomocné uzavřené šroubové plochy, pro pól $\bar{A}_1$ ležící na něm).

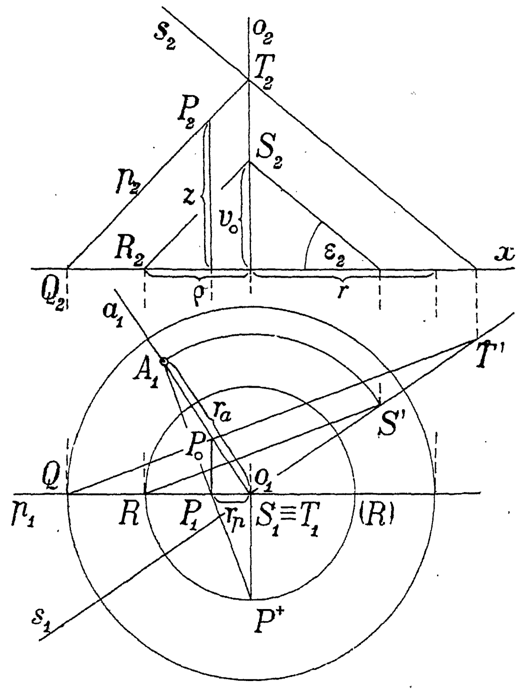
4. Budiž šroubový pohyb určen osou o kolmou k půdorysně a redukovanou výškou závitu v_o, již zvolíme za výšku řídící kuželové plochy dané *šikmé uzavřené plochy šroubové*, určené povrchovou přímkou $p \equiv QT$ rovnoběžnou s nárysnou (obr. 3.); Q jest půdorysná stopa površky, T její bod na ose, R stopa příslušné povrchové přímky $RS \parallel QT$ řídícího kužele o vrcholu S na ose. Označme r a ϱ poloměry základních kruhů procházejících stopami Q a R v půdorysně; kruh o poloměru ϱ jest základnou řídícího kužele.

Zvolme směr osvětlení s s odchylkou ε od půdorysny a sestrojme vržené stíny S' a T'.

Na povrchové přímce a, jež leží v meridiánu kolmém ku světelnému, jest bodem meze vlastního stínu A opět onen bod površky, pro který platí, že šroubovice bodem na ploše procházející má základní poloměr $r_a = v_o \cotg \varepsilon$; tedy $r_a = S_1 A_1 = S_1 S'$. Pól $\bar{A}_1$ jest otočená poloha stínu S' o 90^0 ve smyslu vytčeného šroubového pohybu.

Proměnnou površkou budiž daná přímka p s bodem vlastního stínu P. Poloměr základního kruhu šroubovice, jež prochází bodem na ploše, buď r_p, vzdálenost od půdorysny $PP_1 = z$, půdorysná stopa tečny šroubovice v tom bodu P_o na vrženém stínu QT', stopě to světelné roviny přímkou p procházející; konečně π odchylka tečny od půdorysny.

Z podobných trojúhelníků pravoúhlých se jeví v nárysu vztah $z : r - r_p = v_o : \varrho$, t. j. $z = \frac{v_o (r - r_p)}{\varrho}$. Ježto $r_p \operatorname{tg} \pi = v_o$ a tedy $\operatorname{cotg} \pi = \frac{r_p}{v_o}$, jest $P_1 P_o = z \operatorname{cotg} \pi = \frac{v_o (r - r_p)}{\varrho} \cdot \frac{r_p}{v_o} = \frac{(r - r_p)\, r_p}{\varrho}$.



Obr. 3.

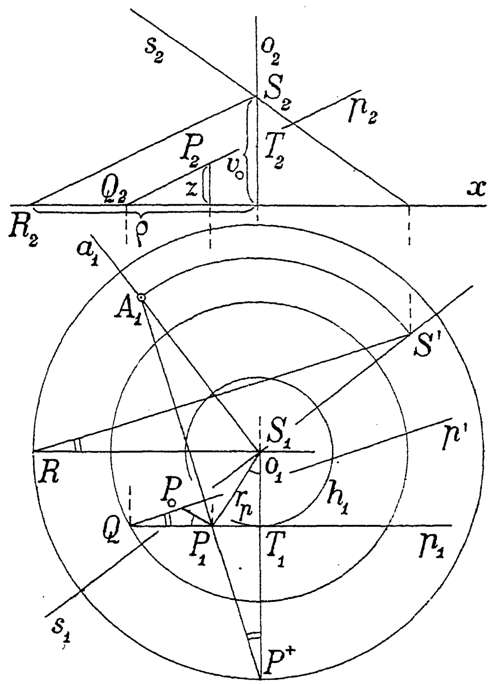
Z toho vztahu obdržíme úměrnost

$$\frac{P_1 P_o}{r - r_p} = \frac{r_p}{\varrho}, \text{ t. j. } \frac{P_1 P_o}{Q P_1} = \frac{S_1 P_1}{P^+ S_1},$$

značí-li P^+ bod základny řídícího kužele, pro který $S_1 P^+ \perp p_1$ ve smyslu pohybu.

Z této úměrnosti plyne podobnost $\triangle P^+ S_1 P_1 \sim \triangle Q P_1 P_o$, oba trojúhelníky jsou o pravý úhel stočeny, t. j. $P^+ P_1 \perp Q T'$ a též $P^+ P_1 \perp R S'$. Z obrazce jest patrno, že $\triangle P^+ S_1 A_1 \cong \triangle R S_1 S'$

a ježto oba trojúhelníky jsou o pravý úhel stočeny, jest $P^{+}A_1 \perp RS'$; i prochází $P^{+}P_1$ pólem A_1. Tím dána jest konstrukce půdorysu meze vlastního stínu. Na každém průměru základního kruhu o poloměru ϱ obdržíme dva body půdorysu křivky jako paty kolmic sestrojených pólem A_1 na spojnice RS' a $(R)S'$; bod A_1 jest dvojným bodem křivky, kteráž jest čtvrtého řádu.



Obr. 4.

5. Zvolme opět osu o kolmou k půdorysně a redukovanou výšku závitu v_0 *kosoúhlé šroubové plochy otevřené*, jejíž povrchové přímky mají za půdorysy tečny základní kružnice h_1 hrdelní šroubovice h na ploše (obr. 4.). Sestrojme povrchovou přímku $p \equiv QT$ rovnoběžnou s nárysnou, bod Q jest její půdorysná stopa a T bod hrdelní šroubovice. Řídící kuželová plocha má vrchol S na ose, výšku v_0, jednu povrchovou přímku $RS \parallel QT$ s půdorysnou stopou R, základnou kruh o poloměru ϱ v půdorysně.

Světelný paprsek s vrcholem kužele určí jeho vržený stín S' na půdorysnu. Učiňme $S_1A_1 \perp S_1S'$, $S_1A_1 = S_1A'$. Bod A_1 jest otočená poloha stínu S' o 90^0 ve smyslu vytčeného šroubového pohybu.

Bod P meze vlastního stínu na povrchové přímce p má vzdálenost od půdorysny z, z úměrnosti v nárysně plyne:

$$z : QP_1 = v_o : \varrho, \text{ t. j. } z = \frac{v_o}{\varrho} \cdot QP_1.$$

Šroubovice bodem P na ploše má zakladní kruh o poloměru $r_p = v_o \operatorname{cotg} \pi$, je-li π odchylka její tečny v bodu P od půdorysny; půdorysná stopa P_o této tečny musí se opět nacházeti na půdorysné stopě roviny světelné přímkou p procházející, t. j. na vrženém stínu $p' \parallel RS'$. I musí

$$P_1 P_o = z \operatorname{cotg} \pi = \frac{v_o}{\varrho} QP_1 \cdot \frac{r_p}{v_o} = QP_1 \cdot \frac{r_p}{\varrho}.$$

Odtud plyne úměra

$$P_1 P_o : QP_1 = r_p : \varrho, \text{ t. j. } P_1 P_o : QP_1 = S_1 P_1 : P^+ S_1,$$

kde P^+ leží na základně řídícího kužele, $P^+ S_1 \perp R S_1$ ve smyslu pohybu. Z rovnosti úhlů jedním obloučkem označených a této úměry patrna podobnost $\triangle QP_1 P_o \sim \triangle P^+ S_1 P_1$ a ježto oba trojúhelníky mají sdružené strany vzájemně kolmé, jest $P^+ P_1 \perp QP_o$, t. j. $P^+ P_1 \perp RS'$. Protože $\triangle RS_1 S' \cong \triangle P^+ S_1 A_1$ a oba trojúhelníky jsou o pravý úhel otočeny, jest i $P^+ A_1 \perp RS'$. I leží bod P_1 na kolmici sestrojené pólem A_1 ku RS', čímž jest dána konstrukce půdorysu meze vlastního stínu. Pól A_1 jest dvojným bodem křivky, jak plyne z jejího průběhu. Sestrojení této unikursální křivky 4. řádu jest vyjádřeno takto: Na kružnici h_1 a soustředné kružnici o poloměru ϱ určuje proměnný poloměr body T_1 a P^+. Spojnice $P^+ A_1$ (s pevným pólem) určí na tečně kružnice h_1 v bodu T_1 bod P_1 křivky.

*

Contribution à la construction de la courbe d'ombre propre sur l'hélicoïde gauche dans le cas des rayons parallèles.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur construit les points de la courbe d'ombre propre de l'hélicoïde réglé, éclairé par des rayons lumineux parallèles, dans le cas où la génératrice rectiligne rencontre son axe ou ne le rencontre pas, orthogonalement ou sous un angle aigu.

En supposant l'axe vertical, l'auteur construit la projection horizontale de la ligne d'ombre propre, lieu des points de contact des plans menés par les génératrices de la vis parallèlement à la direction des rayons lumineux. On obtient le point de contact en appliquant le théorème que la tangente de l'hélice passant par le point de contact situé sur l'hèlicoïde est située dans le plan tangent. L'auteur détermine la longueur de la projection de la tangente en se servant de la relation bien connue entre le rayon de l'hélice, le pas réduit du mouvement hélicoïdal et l'angle de sa tangente avec le plan horizontal. C'est une manière qui conduit à des constructions connues sans l'application de la géométrie cinématique.

Poznámka k výpočtu hodnoty nároků v pensijním pojištění.

Napsal *V. Lenz.*

Pro výpočet hodnot nároků pensijního pojištění zavedl dr. G. Rosmanith, ve svém pojednání z r. 1911[1]) tři pomocná čísla $H^1{}_x$, $H^2{}_x$, $H^3{}_{[x]}$, z nichž první dvě vztahují se na pensijní nároky při počátku pojištění, poslední na nejvyšší výměru renty invalidní a rentu starobní. Tímto seskupením dociluje se snazšího výpočtu čitatele zlomku, jenž udává hodnotu nároků.

V tomto článku chci pro výpočet tabulky hodnot nároků plynoucích ze stoupání služného použití početní metody diferenční, které užívá pro podobné výpočty tabulkové dr. E. Schoenbaum a jejíž teorii i aplikace, doufám, k obohacení literatury tohoto oboru sám brzy uveřejní.

Podmínky pojištění buďtež následující: Po k-leté karenční době mají pojištěnci nárok na invalidní důchod π % pensijního základu, každým následujícím rokem stoupne nárok na invalidní důchod o ε % pensijního základu. Po n-letém stoupání nároku na invalidní rentu mějž pojištěnec nárok na rentu starobní, která mu náleží bez ohledu na jeho schopnost výdělečnou. Starobní renta jest pak vyměřena $h\,\% = (\pi + n\varepsilon)\,\%$ pensijního základu, což budiž současně nejvyšší výměrou renty invalidní.

Hodnota nároků osoby x-leté, která vstoupila do pojištění ve stáří ξ a má započtěno t služebních let ($x = \xi + t$), při pevném základu pensijním z bude oceněna takto:

pro $t < k$

$$
{}_tP_\xi = \frac{z}{D_x^{aa}} \left\{ \pi N^{ai}_{\xi+k} + \varepsilon \left(S^{ai}_{\xi+k+1} - S^{ai}_{\xi+k+n+1}\right) + h N^{aa}_{\xi+k+n} \right\}^{2)} \tag{1}
$$

pro $t > k$

$$
{}_tP_\xi = \frac{z}{D_x^{aa}} \left\{ [\pi + (t-k)\varepsilon]\, N^{ai}_x + \varepsilon \left(S^{ai}_{x+1} - S^{ai}_{\xi+k+n+1}\right) + h N^{aa}_{\xi+k+n} \right\}. \tag{1'}
$$

1) Dr. G. Rosmanith, Die Lösung des Problems der Gehaltssteigerung in der Invalidenversicherung. Vídeň 1911.

2) Označení užito ve shodě s odbornou literaturou.