Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Mass.

Vlad. Knichal, Praha.

(Eingegangen am 13. April 1936.)

§ 1. Definitionen und Resultate.

Alle Zahlen in dieser Abhandlung sind reel. Für $0 \leqq x < 1$ sei

$$x = 0, \dot{i}_1\dot{i}_2\dot{i}_3 \ldots = \frac{\dot{i}_1}{2} + \frac{\dot{i}_2}{2^2} + \frac{\dot{i}_3}{2^3} + \ldots$$

die *dyadische Entwicklung* der Zahl x (i_k ist also gleich 0 oder 1 für $k = 1, 2, 3, \ldots$), die durch die Forderung normiert ist, daß die Folge $i_1, i_2, i_3, \ldots$ unendlich viele Nullen enthalten soll. *Ist $n \geqq 1$ ganz, so bezeichnen wir mit $p(x, n)$ die Anzahl der Nullen in dem System $i_1, i_2, i_3 \ldots, i_n$ und setzen $p(x, 0) = 0$.*

Herr Khintchine[1]) bewies folgenden Satz. Für alle Zahlen x mit $0 \leqq x < 1$ mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Maß Null gilt

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|\, p(x, n) - \frac{1}{2}n \,|}{\sqrt{n \log \log n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

In dieser Abhandlung beschäftigen wir uns mit einer Menge $\mathfrak{M}_a$, welche folgendermassen definiert ist. *Es sei $0 \leqq \alpha$. Mit $\mathfrak{M}_a$ wollen wir stets die Menge aller solchen Zahlen x mit $0 \leqq x < 1$ bezeichnen, für welche*[2])

$$p(x, n) - \tfrac{1}{2}n = O(n^a)$$

gilt. Nach dem Satze von Herrn Khintchine ist für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ das Lebesguesche Maß der Menge $\mathfrak{M}_a$ gleich Null. Man kann also für

---

[1]) A. Khintchine, Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. **6** (1924), 9—20.

[2]) Ist $f(n) > 0$ für $n > n_0$, so bedeutet $\varphi(n) = O(f(n))$, dass

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|\,\varphi(n)\,|}{f(n)} < \infty \text{ ist.}$$

eine geeignete Maßfunktion $f(x)$ das Hausdorffsche Maß der Menge $\mathfrak{M}_a$ untersuchen.

$\mathfrak{M}$ sei eine lineare Menge und $f(x)$ eine positive Funktion für $0 < x < 1$. Es sei $0 < \varrho < 1$. Man überdecke $\mathfrak{M}$ mit einer höchstens abzählbaren Menge S offener Intervalle v, deren Längen[3]) $|v|$ sämtlich kleiner als ϱ sind. Man setze[4]) $A = \sum\limits_{v}^{S} f(|v|)$. Die untere Grenze der Zahlen A für alle solche Überdeckungen S wollen wir mit $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$ bezeichnen. Nimmt ϱ ab, so nimmt $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$ offenbar nicht ab, und es existiert daher $\lim\limits_{\varrho=0+} L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$. Diese Zahl nennt man *das zur Funktion* $f(x)$ *zugehörige Hausdorffsche*[5]) *Maß der Menge* $\mathfrak{M}$. *Wir bezeichnen es mit* $L(\mathfrak{M}, f(x))$.

Der Leser findet die Grundeigenschaften des Hausdorffschen Masses in der unter 5. zitierten Abhandlung. Hier mögen nur einige von ihnen ohne Beweis angegeben werden. $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \ldots$ seien lineare Mengen, $f(x)$, $g(x)$ positive Funktionen für $0 < x < 1$.

1. Ist[6]) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$, so ist $L(\mathfrak{M}, f(x)) \leqq L(\mathfrak{M}_1, f(x))$.
2. Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots$, so ist
$$L(\mathfrak{M}, f(x)) \leqq L(\mathfrak{M}_1, f(x)) + L(\mathfrak{M}_2, f(x)) + \ldots$$
3. Ist $\lim\limits_{x=0+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ und $L(\mathfrak{M}, f(x)) < \infty$, so ist
$$L(\mathfrak{M}, g(x)) = 0.$$
4. Ist $f(x) = x$, so ist $L(\mathfrak{M}, f(x))$ das äußere Lebesguesche Maß der Menge $\mathfrak{M}$.

Wenn $\lim\limits_{x=0+} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ ist, so kann $L(\mathfrak{M}, f(x)) > 0$ sein, auch wenn das Lebesguesche Maß der Menge $\mathfrak{M}$ gleich Null ist. Man kann also das Hausdorffsche Maß für eine feinere Klassifikation der Mengen vom Lebesgueschen Maß Null benützen. Wir wollen diesen Begriff des Hausdorffschen Maßes auf die schon früher definierte Menge $\mathfrak{M}_a$ anwenden. Wir wählen für die Hausdorffsche Maßfunktion die Funktion $f(x) = f(x, \beta) = x \,.\, e^{(-\log x)^\beta}$. Wenn $\mathfrak{M}$ vom Lebesgueschen Maß Null ist, so ist für $\beta \leqq 0$ auch $L(\mathfrak{M}, f(x, \beta)) = 0$ und wenn $\mathfrak{M}$ unendlichviele Elemente enthält, so ist für $\beta \geqq 1$ $L(\mathfrak{M}, f(x, \beta)) = \infty$.

---

[3]) $|v|$ bedeutet stets die Länge des Intervalls v.

[4]) Die Limesoperationen wollen wir im erweiterten Sinne nehmen.

[5]) F. Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, Math. Annalen, 79 (1919), 157—179.

[6]) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ bedeutet: $\mathfrak{M}$ ist eine Teilmenge von $\mathfrak{N}$, $a \in \mathfrak{M}$ bedeutet: a ist ein Element aus $\mathfrak{M}$, mit $\{a, b, c, \ldots\}$ bezeichnet man die aus den Elementen $a, b, c, \ldots$ bestehende Menge.

Wir wollen uns also nur mit dem Falle $0 < \beta < 1$ beschäftigen. Die Sätze 1 bis 4 und die eben angeführten Bemerkungen sind fast trivial; im Folgenden wird übrigens von ihnen kein Gebrauch gemacht. Unser Hauptziel liegt im Beweise des folgenden Satzes.

Hauptsatz. *Es sei* $0 < \beta < 1$, $f(x) = f(x, \beta) = x \,.\, e^{(-\log x)^\beta}$ *für* $0 < x < 1$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Dann ist*

I. $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = 0$ *für* $0 < \beta < 1 - 2\alpha$.

II. $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = \infty$ *für* $1 - 2\alpha < \beta < 1$.

Mit $c_1, c_2, c_3, \ldots$ wollen wir im Folgenden *positive, absolute Konstanten* bezeichnen.

Vor dem Beweise des Hauptsatzes wollen wir noch einige Hilfssätze ableiten.

Hilfssatz 1. *Es sei n, k ganz, $n \geqq 1$, $k' = k - \frac{1}{2}n$. Für $|k'| \leqq \leqq \frac{1}{4}n$ gilt dann*

$$\binom{n}{k} \leqq c_1 \frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-2k'^2/n}, \tag{1}$$

$$\binom{n}{k} \geqq c_2 \frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-3k'^2/n}, \tag{2}$$

und für alle k' gilt

$$\binom{n}{k} \leqq c_3 2^n e^{-2k'^2/n}. \tag{3}$$

Beweis. Nach der Stirlingschen Formel ist für ganzes $n \geqq 1$

$$c_4\sqrt{n}\, e^{-n}\, n^n \leqq n! \leqq c_5\sqrt{n}\, e^{-n} \,.\, n^n \tag{4}$$

und also für ganze n, k mit $1 \leqq k \leqq n - 1$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \leqq c_6 \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}. \tag{5}$$

Man setze $\varrho = \dfrac{2k'}{n}$. Dann gilt

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2}n(1+\varrho)\,\frac{1}{2}n(1-\varrho)}} = \frac{2}{\sqrt{n(1-\varrho^2)}} \tag{6}$$

und weiter

$$\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} = \frac{n^n}{(\frac{1}{2}n(1+\varrho))^k\,(\frac{1}{2}n(1-\varrho))^{n-k}} =$$
$$= \frac{2^n}{(1+\varrho)^k\,(1-\varrho)^{n-k}} = 2^n \,.\, y,$$

wo

$$\log y = -k\log(1+\varrho) - (n-k)\log(1-\varrho) = -\tfrac{1}{2}n\,\varphi(\varrho)$$

ist.

Dabei ist $\varphi(x) = (1 + x) \log (1 + x) + (1 - x) \log (1 - x)$ für $0 < x < 1$ und $\varphi'(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$, $\varphi''(x) = \frac{2}{1-x^2}$. Nach dem Taylorschen Satze ist

$$\varphi(\varrho) = \varphi(0) + \frac{\varrho}{1!} \varphi'(0) + \frac{\varrho^2}{2!} \varphi''(\Theta\varrho) = \frac{\varrho^2}{1 - \Theta^2\varrho^2}$$

mit $0 \leqq \Theta \leqq 1$ und also

$$\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} = 2^n e^{-\frac{n}{2} \frac{\varrho^2}{1-\Theta^2\varrho^2}} = 2^n e^{-\frac{2k'^2}{n} \frac{1}{1-\Theta^2\varrho^2}}. \tag{7}$$

Für $|k'| \leqq \frac{1}{4}n$, $n \geqq 1$ ist $|\varrho| \leqq \frac{1}{2}$, also erhält man nach (5), (6), (7) die Ungleichung (1).

Für $1 \leqq k \leqq n - 1$ (dann ist also $n \geqq 2$) erhält man nach (5), (6), (7)

$$\binom{n}{k} \leqq \frac{2c_6}{\sqrt{n(1-\varrho^2)}} \cdot 2^n e^{-2k'^2/n}.$$

Nun ist aber $n(1 - \varrho^2) \geqq n\left(1 - \left(\frac{2}{n}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)^2\right) = 4\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geqq 2$ und daher

$$\binom{n}{k} \leqq c_3 2^n e^{-2k'^2/n}.$$

Diese Beziehung (mit eventuell vergrößerter Konstante c_3) gilt offenbar auch für $k = 0$ und $k = n$, $n \geqq 1$, denn in diesem Falle ist $k' = \frac{1}{2}n$ und daher

$$2^n e^{-2k'^2/n} = 2^n e^{-\frac{1}{2}n} = e^{n(\log 2 - \frac{1}{2})}$$

wo $\log 2 - \frac{1}{2} > 0$ ist.

Für $|\varrho| \leqq \frac{1}{2}$ erhält man ähnlich nach (4), (6), (7)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \geqq c_7 \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} \geqq c_2 \frac{1}{\sqrt{n}} 2^n e^{-3k'^2/n}.$$

Es sei $w = \langle a, b \rangle$ ein abgeschlossenes Intervall und $n \geqq 0$, ganz. Die Intervalle

$$v = \left\langle a + \frac{i}{2^n}(b-a), a + \frac{i+1}{2^n}(b-a) \right\rangle \text{ für } i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$$

wollen wir die *zu w zugehörigen Intervalle n-ter Ordnung nennen.* Gleichzeitig führen wir für ganzes $k \geqq 0$ *folgende Bezeichnung* ein:

$$p(v, k, w) = p\left(\frac{i}{2^n}, k\right). \tag{8}$$

Der Kürze halber wollen wir die zu $\langle 0, 1\rangle$ zugehörigen Intervalle n-ter Ordnung auch *Intervalle n-ter Ordnung nennen* und statt $p(v, k, \langle 0, 1\rangle)$ einfach $p(v, k)$ schreiben. Wenn w ein Intervall n_1-ter Ordnung, v ein zu w zugehöriges Intervall n_2-ter Ordnung ($n_1 \geqq 0$, $n_2 \geqq 0$) und x ein innerer Punkt des Intervalls v ist, so erkennt man leicht, daß v ein Intervall $(n_1 + n_2)$-ter Ordnung ist und daß

$$p(v, k, w) = p(x, n_1 + k) - p(x, n_1) \tag{9}$$

für $k = 0, 1, \ldots, n_2$ ist.

§ 2. Beweis der Behauptung I. des Hauptsatzes.

1. Es sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $0 < \beta < 1 - 2\alpha$. Man wähle α' so, daß $\beta < 1 - 2\alpha' < 1 - 2\alpha$ gilt. Mit $C_1, C_2, \ldots$ wollen wir nur von α, α', β abhängige positive Konstanten bezeichnen.

Es sei a ganz,

$$a > \operatorname{Max}\,(2, C_1^{\frac{2}{1-2\alpha'}}, C_3); \tag{10}$$

die Konstanten C_1, C_3 bestimmt man erst später. Für ganzes $n_1 \geqq a$ sei $\mathfrak{N}(n_1)$ die folgendermassen definierte lineare Menge.

Für $i = 0, 1, 2, \ldots$ setzen wir[7])

$$n_i = [n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}}]. \tag{11}$$

Für $i = 1, 2, \ldots$ sei $r_i = n_i - n_{i-1}$.

Für ganzes $i \geqq 2$ ist nun (nach dem Mittelwertsatze)

$$r_i \geqq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - n_1(i-1)^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - 1 \geqq \frac{n_1}{1-2\alpha'}(i-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} - 1 \geqq$$

$$\geqq \frac{n_1}{2(1-2\alpha')}(i-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}$$

und für ganzes $i \geqq 1$ also,

$$r_i \geqq C_2 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}. \tag{12}$$

Für $n_1 > C_3$ und für ganzes $i \geqq 1$ ist deshalb

$$2 n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} < \tfrac{1}{4} C_2\, n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} \leqq \tfrac{1}{4} r_i. \tag{12'}$$

Mit V_k ($k \geqq 1$, ganz) bezeichnet man die Menge aller abgeschlossener Intervalle n_k-ter Ordnung v, für welche folgende Ungleichungen gelten:

---

[7]) $[\xi]$ bedeutet die grösste ganze Zahl, die höchstens gleich ξ ist.

$$| p(v, n_i) - \tfrac{1}{2} n_i | < n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{13}$$

P_k soll im Folgenden die Anzahl der Intervalle aus V_k bezeichnen. Man setze nun[8])

$$\mathfrak{N}(n_1) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{v}^{V_k} v. \tag{14}$$

Es sei $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$. Man wähle ein ganzes $k \geqq 1$ so, daß die Ungleichungen

$$\frac{1}{2^{n_k - 1}} < \varrho, \quad 2(n_1^{-(\frac{1}{2}-\alpha')} C_1)^k \, e^{n_1^{\beta} k^{\frac{\beta}{1-2\alpha'}}} < \varepsilon \tag{15}$$

gelten. Dies kann man wegen (10) und wegen $\beta < 1 - 2\alpha'$ verwirklichen. Dann kann man $\mathfrak{N}(n_1)$ durch das abgeschlossene Intervallensystem V_k, also auch durch ein System von P_k offener Intervalle überdecken, deren Längen sämtlich kleiner als $\frac{1}{2^{n_k-1}}$ sind. Es ist also

$$L_\varrho(\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)) \leqq \frac{1}{2^{n_k-1}} e^{(n_k-1)^\beta \log^\beta 2} \,.\, P_k \leqq \frac{2}{2^{n_k}} e^{n_k^\beta \log^\beta 2} \,.\, P_k. \tag{16}$$

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ seien ganze Zahlen, für welche

$$| p_i - \tfrac{1}{2} n_i | < n_1^{\alpha'} \,.\, i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \quad \text{mit } i = 1, 2, \ldots, k \tag{17}$$

gilt. Nach (17) und (12′) ist

$$| p_1 - \tfrac{1}{2} n_1 | \leqq n_1^{\alpha'} < \tfrac{1}{4} r_1 = \tfrac{1}{4} n_1 \tag{18}$$

und für $i = 2, 3, \ldots$ auch

$$\begin{aligned} | p_i - p_{i-1} - \tfrac{1}{2}(n_i - n_{i-1}) | &\leqq | p_i - \tfrac{1}{2} n_i | + | p_{i-1} - \tfrac{1}{2} n_{i-1} | \leqq \\ &\leqq 2 n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} < \tfrac{1}{4} r_i = \tfrac{1}{4}(n_i - n_{i-1}). \end{aligned} \tag{19}$$

Es gibt genau

$$\binom{n_1}{p_1} \binom{n_2 - n_1}{p_2 - p_1} \binom{n_3 - n_2}{p_3 - p_2} \cdots \binom{n_k - n_{k-1}}{p_k - p_{k-1}}$$

also nach (1) aus Hilfssatz 1 wegen $r_i \geqq 1$ [siehe (12)] und wegen (18), (19) höchstens $\frac{c_1^k}{\sqrt{r_1 \,.\, r_2 \,.\, \ldots \,.\, r_k}} \,.\, 2^{n_k}$. Intervalle n_k-ter Ordnung v, für welche

$$p(v, n_i) = p_i \quad \text{mit } i = 1, 2, \ldots, k \tag{20}$$

[8]) Σv bedeutet die mengentheoretische Summe der Intervalle v.

ist. Damit die Intervalle n_k-ter Ordnung v, für welche (20) gilt, die Elemente aus V_k seien, so müssen die Beziehungen (17) für $i = 1, 2, \ldots, k$ erfüllt sein. Man hat also für die Wahl der Zahl p_i höchstens $2n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} + 1 \leqq 3n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}}$ Möglichkeiten. Es ist also nach (12),

$$P_k \leqq \frac{3^k c_1^k}{\sqrt{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_k}} 2^{n_k} n_1^{k\alpha'} (k!)^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \leqq$$

$$\leqq C_1^k n_1^{k(\alpha'-\frac{1}{2})} (k!)^{-\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} 2^{n_k} (k!)^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} = C_1^k n_1^{-(\frac{1}{2}-\alpha')k} \cdot 2^{n_k}$$

und weiter nach (16), (11) und (15)

$$L_\varrho(\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)) \leqq 2\,(n_1^{-(\frac{1}{2}-\alpha')} C_1)^k \cdot e^{n_1^\beta k^{\frac{\beta}{1-2\alpha'}} \log^\beta 2} < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt worden ist, so ist $L_\varrho[\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)] = 0$ und weiter

$$L(\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)) = 0. \tag{21}$$

2. Konstruieren wir jetzt die Menge $\mathfrak{P} = \sum_{n=a}^{\infty} \mathfrak{N}(n)$. Dann ist $\mathfrak{M}_a \subset \mathfrak{P}$.

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{M}_a$, also $0 < x < 1$ und $p(x, n) = \frac{1}{2}n + O(n^a)$. Dann gibt es $n_1 \geqq a$ ganz so, daß für alle ganze $n \geqq n_1$ folgende Beziehung gilt $(\alpha' > \alpha)$

$$| p(x, n) - \tfrac{1}{2}n | < n^{\alpha'}. \tag{22}$$

Es sei $i \geqq 1$, ganz. Der Punkt x ist wegen (22) ein innerer Punkt eines Intervalles n_i-ter Ordnung v, wo n_i durch (11) definiert ist. Nach (9), (22) und (11) gilt dann für dieses Intervall $| p(v, n_i) - \frac{1}{2}n_i | < n_i^{\alpha'} \leqq n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}}$. Der Punkt x liegt also für jedes $i \geqq 1$ in $\sum_v^{V_i} v$ also auch in $\mathfrak{N}(n_1)$ also in $\mathfrak{P}$.

3. Nach (21) ist $L(\mathfrak{N}(n), f(x, \beta)) = 0$ für $n \geqq a$. Es sei nun $0 < \varrho < 1$, $\varepsilon > 0$. Überdecken wir die Menge $\mathfrak{N}(n)$ mit einer höchstens abzählbaren Menge offener Intervalle W_n, von denen jedes kleinere Länge als ϱ hat, und so, daß

$$\sum_v^{W_n} f(|v|, \beta) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ist. Die Menge $\sum_{n=a}^{\infty} W_n$ besteht aus einer höchstens abzählbaren Menge offener Intervalle, sie überdeckt $\mathfrak{P}$ und nach dem 2. Abstaze auch $\mathfrak{M}_a$, und die Länge jedes einzelnen Intervalls ist kleiner als ϱ. Es ist also

$$L_\varrho(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) \leqq \sum_{n=a}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leqq \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, $\varrho > 0$. Deshalb ist $L(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) = 0$, w. z. b. w.

§ 3. Beweis der Behauptung II. des Hauptsatzes.

1. Es sei

$$0 < \alpha < \tfrac{1}{2},\ 1 - 2\alpha < \beta < 1. \tag{23}$$

Wir wählen α' und ε so, daß

$$1 - 2\alpha < 1 - 2\alpha' < \beta,\ (1 + 2\varepsilon)\,\alpha' < \alpha,\ 0 < \varepsilon < \tfrac{1}{2} \tag{24}$$

gilt. Mit $C_1, C_2, \ldots$ wollen wir *positive nur von $\alpha, \alpha', \beta, \varepsilon$ abhängige Konstanten* bezeichnen.

Es sei $r \geqq 1$, ganz, w ein abgeschlossenes Intervall. Dann wollen wir jedes zu w zugehörige Intervall r-ter Ordnung v, für weches die Beziehungen

$$| p(v, k, w) - \tfrac{1}{2}k | \leqq r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1 \text{ mit } k = 1, 2, 3, \ldots, r \tag{25}$$

gelten, ein *untergeordnetes zu w zugehöriges Intervall r-ter Ordnung nennen.*

Für $r > C_1$ ist

$$r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1 < \tfrac{1}{2}r \tag{26}$$

und das untergeordnete Intervall v enthält also keinen Endpunkt des Intervalls w, denn sonst wäre $p(v, r, w)$ gleich 0 oder r.

Hilfssatz 2. *Es sei $r \geqq C_2$, ganz, l ganz $| l - \tfrac{1}{2}r | \leqq \sqrt{r}$. Mit P bezeichne man die Anzahl der untergeordneten zu w zugehörigen Intervalle r-ter Ordnung v, für welche $p(v, r, w) = l$ ist. Dann ist $P > \frac{C_3}{\sqrt{r}} 2^r$.*

Beweis. Für $k = 1, 2, \ldots, r$ soll A_k die Anzahl derjenigen (zu w zugehörigen) Intervalle r-ter Ordnung v bedeuten, für welche

$$| p(v, k, w) - \tfrac{1}{2}k | > r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1,\ p(v, r, w) = l \tag{27}$$

ist. Die Anzahl aller Intervalle r-ter Ordnung mit $p(v, r, w) = l$ ist gerade gleich $\binom{r}{l}$ und daher ist

$$P \geqq \binom{r}{l} - \sum_{k=1}^{r} A_k. \tag{28}$$

Es sei k ganz, $1 \leqq k \leqq r - 1$. Dann ist offenbar nach (27)

$$A_k = \Sigma' \binom{k}{p}\binom{r-k}{l-p} + \Sigma'' \binom{k}{p}\binom{r-k}{l-p} \tag{29}$$

wo man in Σ' über alle ganze p mit $p > \frac{1}{2}k + r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1$ und in Σ'' über alle ganze p mit $p < \frac{1}{2}k - r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} - 1$ summiert. Man setze $p' = p - \frac{1}{2}k$, $l' = l - \frac{1}{2}r$. Nach (3) im Hilfssatze 1 ist

$$A'_k = \Sigma' \binom{k}{p}\binom{r-k}{l-p} \leqq c_3{}^2 \Sigma' \, 2^r e^{-\frac{2p'^2}{k} - \frac{2(l'-p')^2}{r-k}} =$$

$$= c_3{}^2 2^r e^{-\frac{2l'^2}{r}} \Sigma' \, e^{-2\frac{(rp'-kl')^2}{rk(r-k)}}.$$

Die Funktion $(rx - kl')^2$ ist für $x \geqq r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ wachsend, denn es ist $|\, l' \,| \leqq \sqrt{r}$ und $r \geqq 1$. Deshalb ist

$$A'_k \leqq c_3{}^2 2^r e^{-\frac{2l'^2}{r}} \int\limits_{r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}^{\infty} e^{-2\frac{(rx-kl')^2}{kr(r-k)}} \, dx.$$

Führt man statt x die neue Variable u durch die Gleichung $u = \sqrt{\frac{2}{kr(r-k)}}\,(rx - kl')$ ein, so erhält man

$$A'_k \leqq c_3{}^2 2^r \sqrt{\frac{k(r-k)}{2r}} \int\limits_{y}^{\infty} e^{-u^2} \, du, \tag{30}$$

wo wegen $k \leqq r$ und wegen $|\, l' \,| \leqq \sqrt{r}$ die untere Grenze y mindestens gleich $\frac{\sqrt{2}\, r \,.\, r^{\frac{1}{2}}(r^{\varepsilon} - 1)}{\sqrt{kr(r-k)}} = \frac{\sqrt{2}\, r(r^{\varepsilon} - 1)}{\sqrt{k(r-k)}}$ ist.

Durch partielle Integration erhält man für $y > 0$

$$\int\limits_{y}^{\infty} e^{-u^2} \, du = -\left[\frac{e^{-u^2}}{2u}\right]_{y}^{\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_{y}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} \, du \leqq \frac{e^{-y^2}}{2y}. \tag{31}$$

Nach (30) und (31) ist also

$$A'_k \leqq c_3{}^2 2^r \frac{k(r-k)}{4r(r^{\varepsilon} - 1)\sqrt{r}} e^{-2\frac{r^2(r^{\varepsilon}-1)^2}{k(r-k)}}.$$

Daher ist für $r \geqq C_4$

$$A'_k \leqq \tfrac{1}{2}\, c_3{}^2\, 2^r \sqrt{r}\, e^{-r^{2\varepsilon}}. \tag{32}$$

Aus Symetriegründen oder durch eine analoge Berechnung erhalten wir

$$A''_k = \Sigma'' \binom{k}{p} \binom{r-k}{l-p} \leqq \tfrac{1}{2} c_3^2\, 2^r \sqrt{r}\, e^{-r^{2\varepsilon}}. \tag{33}$$

Da $A_r = 0$ ist, so ist nach (29), (32) und (33)

$$\sum_{k=1}^{r} A_k \leqq c_3^2\, 2^r\, r^{\frac{3}{2}}\, e^{-r^{2\varepsilon}}.$$

Für $r \geqq C_5$ ist also

$$\sum_{k=1}^{r} A_k < \frac{c_2}{2e^3\sqrt{r}}\, 2^r. \tag{34}$$

Weiter ist nach (2) im Hilfsatze 1 für $r \geqq C_6$

$$\binom{r}{l} \geqq \frac{c_2}{\sqrt{r}}\, 2^r e^{-\frac{3l'^2}{r}} \geqq \frac{c_2}{e^3\sqrt{r}}\, 2^r$$

und deshalb für $r \geqq C_2 = \operatorname{Max}(C_5, C_6)$ nach (28) und (34)

$$P = \binom{r}{l} - \sum_{k=1}^{r} A_k > \frac{c_2}{2e^3\sqrt{r}}\, 2^r = \frac{C_3}{\sqrt{r}}\, 2^r.$$

2. Es sei $A > 0$. Wir wählen n_1 ganz so, daß es folgende Bedingungen erfüllt:

$$n_1 > \operatorname{Max}(2, C_9, C_{12}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}), \tag{35}$$
$$C_{19} n_1^{-\beta} e^{n_1^\beta \log^\beta 2} > A C_{13}.$$

Dabei sind C_9, C_{12} usw. Konstanten, die man erst später bestimmen wird. Man setze

$$\varrho = \frac{1}{2^{n_1}},\quad n_i = \left[n_1 \,.\, i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \right] \text{ für } i = 1, 2, \ldots$$

und $\quad r_i = n_i - n_{i-1}$ für $i = 2, 3, \ldots$ Dann ist

$$\tfrac{1}{2} n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \leqq n_i \leqq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

und weiter (nach dem Mittelwertsatz) für $i = 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} r_i &\leqq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - n_1 (i-1)^{\frac{1}{1-2\alpha'}} + 1 \leqq \\ &\leqq n_1 \frac{1}{1-2\alpha'}\, i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} + 1 \leqq C_7 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}. \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} r_i &\geqq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - n_1 (i-1)^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - 1 \geqq \\ &\geqq n_1 \frac{1}{1-2\alpha'}\, (i-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} - 1 \geqq C_8 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}. \end{aligned} \tag{38}$$

Für $n_1 \geqq C_9$ ist

$$r_i \geqq \text{Max}\,(C_1, C_2) \quad (i = 2, 3, \ldots). \tag{39}$$

Es sei $i \geqq 1$, ganz. Jedes Intervall n_i-ter Ordnung v heißt ein Intervall i-ter Stufe, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$|\, p(v, n_i) - \tfrac{1}{2}n_i \,| \leqq C_{10} n_1^{\alpha'} i^{\overline{1-2\alpha'}^{\,\alpha'}}, \tag{40}$$

wo $C_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{C_8}$ ist.

Wir wollen nun *normale Intervalle i-ter Stufe* durch vollständige Induktion definieren. Wir nennen jedes Intervall erster Stufe normal. Es sei $i \geqq 1$ ganz. Setzen wir voraus, daß wir schon die normalen Intervalle i-ter Stufe definiert haben. Dann nennen wir diejenigen Intervalle $(i + 1)$-ter Stufe normal, die einem normalen Intervalle i-ter Stufe untergeordnet sind.

3. *Es sei $i \geqq 2$, ganz, w ein Intervall $(i - 1)$-ter Stufe. Mit $N(w)$ bezeichnet man die Anzahl der normalen Intervalle i-ter Stufe v, die in w enthalten sind. Dann ist* (für $n_1 > C_{12}$)

$$N(w) \geqq C_{11} n_1^{\alpha'-\frac{1}{2}}\, 2^{r_i} > 0. \tag{41}$$

Beweis. Ist p eine ganze Zahl mit

$$|\, p - \tfrac{1}{2}n_i \,| \leqq C_{10} n_1^{\alpha'} i^{\overline{1-2\alpha'}^{\,\alpha'}}, \tag{42}$$

dann sind alle zu w zugehörige untergeordnete Intervalle r_i-ter Ordnung v mit

$$p(v, r_i, w) = p - p(w, n_{i-1}) \text{ normal.} \tag{43}$$

Die Anzahl dieser Intervalle ist nach Hilfssatz 2 gleich

$$P(p) > \frac{C_3}{\sqrt{r_i}}\, 2^{r_i}. \tag{44}$$

Es ist nämlich nach (35) und (39) $r_i \geqq C_2$ und nach (43), (42), (40), (38) wegen $C_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{C_8}$:

$$|\, p - p(w, n_{i-1}) - \tfrac{1}{2}r_i \,| \leqq |\, p - \tfrac{1}{2}n_i \,| + |\, p(w, n_{i-1}) - \tfrac{1}{2}n_{i-1} \,| \leqq$$

$$\leqq C_{10} n_1^{\alpha'} i^{\overline{1-2\alpha'}^{\,\alpha'}} + C_{10} n_1^{\alpha'} (i-1)^{\overline{1-2\alpha'}^{\,\alpha'}} \leqq \sqrt{r_i}.$$

Die Anzahl der Zahlen p, welche die Bedingung (42) erfüllen, ist mindestens gleich $2C_{10} n_1^{\alpha'} i^{\overline{1-2\alpha'}^{\,\alpha'}} - 1$. Es ist also nach (44), (37) für $n_1 > C_{12}$

$$N(w) \geqq C_{11} n_1^{\alpha'} i^{\overline{1-2\alpha'}^{\,\alpha'}} \frac{1}{\sqrt{n_1}}\, i^{-\overline{1-2\alpha'}^{\,\alpha'}}\, 2^{r_i}.$$

4. ***Für $i \geqq 1$ ganz sei V_i die Menge aller normalen Intervalle***

i-ter Stufe. Es sei

$$\mathfrak{N}_i = \sum_{v}^{V_i} v, \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 . \mathfrak{N}_2 . \mathfrak{N}_3 . \ldots$$

a) *Es sei $x \in \mathfrak{N}$, $k \geqq 0$ ganz. Dann ist x ein innerer Punkt eines Intervalls k-ter Ordnung.*

Sonst könnte man $i \geqq 2$ ganz so wählen, daß $n_{i-1} > k$ wäre. Da $x \in \mathfrak{N}$ ist, so gibt es in V_i ein Intervall v, das x enthält. v ist einem Intervalle w $(i-1)$-ter Stufe untergeordnet. x müßte wegen $n_{i-1} > k$ ein Endpunkt dieses Intervalls sein, was mit dem 1. Absatze wegen (35) und (39) im Widerspruch steht. Speziell ist also $0 < x < 1$.

b) *Es gilt*

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_\alpha. \tag{45}$$

In der Tat sei n ganz, $n > n_1$. Dann gibt es $i \geqq 2$ ganz so, daß $n_{i-1} < n \leqq n_i$ ist. Es sei $x \in \mathfrak{N}$. Es gibt ein Intervall $v \in V_i$ so, daß x nach a) sein innerer Punkt ist. Es sei $w \in V_{i-1}$, $v \subset w$. Nach (9) ist

$$p(x, n) = p(v, n - n_{i-1}, w) + p(x, n_{i-1}) =$$
$$= p(v, n - n_{i-1}, w) + p(w, n_{i-1})$$

und also nach (25), (40), (24), (37)

$$| p(x, n) - \tfrac{1}{2}n | \leqq | p(v, n - n_{i-1}, w) - \tfrac{1}{2}(n - n_{i-1}) | +$$
$$+ | p(w, n_{i-1}) - \tfrac{1}{2}n_{i-1} | \leqq r_i^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1 + C_{10} n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \leqq$$
$$\leqq C_7^{\frac{1}{2}+\varepsilon} n_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon} i^{\frac{\alpha'(1+2\varepsilon)}{1-2\alpha'}} + C_{10} n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} + 1 \leqq$$
$$\leqq K i^{\frac{\alpha}{1-2\alpha'}} \leqq K'(i-1)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha'}} \leqq K'' n^\alpha_{i-1} \leqq K'' n^\alpha,$$

wo K, K', K'' nur von α, α', β, ε, n_1 abhängig sind. Daraus folgt $p(x, n) - \frac{1}{2}n = O(n^\alpha)$ also $x \in \mathfrak{M}_\alpha$.

5. *$\mathfrak{N}$ ist eine abgeschlossene Menge*, denn sie ist ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen.

Es sei $i \geqq 1$ ganz und w ein normales Intervall i-ter Stufe. Dann ist der Durchschnitt $w . \mathfrak{N}$ nicht leer.

Nach dem Absatze 3 ist nämlich $N(w) > 0$ und es gibt daher ein normales Intervall $(i+1)$-ter Stufe w_1, welches in w enthalten ist. Ähnlich enthält auch w_1 ein normales Intervall $(i+2)$-ter Stufe w_2 usw. Die Intervalle $w \supset w_1 \supset w_2 \supset \ldots$ sind abgeschlossen und der Durchschnitt $w . w_1 . w_2 . \ldots$ ist also nicht leer. Er enthält also mindestens einen Punkt x. Es ist nun aber $w_k \subset \mathfrak{N}_{i+k}$ für jedes ganze $k \geqq 1$ und $w \subset \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_{i-1} \subset \ldots$

6. Man überdecke nun $\mathfrak{M}_\alpha$ mit einer höchstens abzählbaren Menge offener Intervalle S, wo die Länge eines jeden Intervalls

kleiner als ϱ ist. Die Menge S überdeckt nach dem Absatze 4b auch die Menge $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$ ist nun beschränkt und abgeschlossen (siehe Absatz 5); daher ist es möglich aus S ein endliches System S' offener Intervalle herausnehmen so, daß S' auch $\mathfrak{N}$ überdeckt. Man füge jedem Intervalle aus S' seine Endpunkte hinzu. So erhält man ein endliches System S'' abgeschlossener Intervalle.

Es ist dann ($\varrho < 1$)

$$\sum_v^{S''} f(|v|, \beta) \leqq \sum_v^{S} f(|v|, \beta). \tag{46}$$

Es sei $w \in S''$, $w' = w \,.\, \langle 0, 1\rangle$. Ist $|w'| > 0$, so sei $i \geqq 2$ die kleinste ganze Zahl, für welche das Intervall w' mindestens ein Intervall n_i-ter Ordnung enthält (w' enthält wegen $\varrho = \frac{1}{2^{n_1}}$ also kein Intervall n_{i-1}-ter Ordnung). Es sei $Q(w)$ die Menge aller Intervalle n_i-ter Ordnung, die einen nicht leeren Durchschnitt mit w' haben. Die Anzahl der Intervalle in $Q(w)$ ist höchstens gleich $2^{n_i}|w'| + 2 \leqq 3|w'| \,.\, 2^{n_i}$, denn die Länge jedes Intervalls n_i-ter Ordnung ist gleich $\frac{1}{2^{n_i}}$.

Da $|w'| \leqq 2 \,.\, \frac{1}{2^{n_{i-1}}}$, $\beta < 1$ ist, so ist

$$\begin{aligned}\sum_v^{Q(w)} f(|v|, \beta) &\leqq 3\,|w'|\,2^{n_i}\,|v|\,e^{(-\log|v|)^\beta} \leqq 3\,|w'|\,e^{(n_i \log 2)^\beta} \leqq \\ &\leqq 3\,|w'|\,e^{(-\log|w'|)^\beta}\,e^{(n_i\log 2)^\beta - (-\log|w'|)^\beta} \leqq \\ &\leqq 3\,|w|\,e^{(-\log|w|)^\beta} \,.\, e^{(n_i^\beta - n_{i-1}^\beta)\log^\beta 2 + (n_{i-1}^\beta - (n_{i-1} - 1)^\beta)\log^\beta 2} \leqq \\ &\leqq C_{13}\, f(|w|, \beta)\, e^{A_i}.\end{aligned} \tag{47}$$

Der Kürze halber haben wir $A_i = (n_i^\beta - n_{i-1}^\beta) \log^\beta 2$ für $i = 2, 3, \ldots$ gesetzt. Wir ersetzen in S'' jedes Intervall w durch das System $Q(w)$. Die Intervalle w, für welche $|w'| = 0$ ist, lassen wir weg. Somit erhält man ein endliches Intervallsystem S''' mit folgenden Eigenschaften: Zu jedem Intervall v aus S''' gibt es eine ganze Zahl $i \geqq 2$ so, daß das Intervall v n_i-ter Ordnung ist. S''' überdeckt $\mathfrak{N}$. Mit S'''_i bezeichnet man die Menge aller Intervalle n_i-ter Ordnung aus S'''.

Es sei $k \geqq 2$ die größte ganze Zahl, für welche in S''' Intervalle n_k-ter Ordnung vorkommen. Dann ist nach (46) und (47)

$$\sum_{i=2}^{k} e^{-A_i} \sum_v^{S_i'''} f(|v|, \beta) \leqq C_{13} \sum_v^{S} f(|v|, \beta). \tag{48}$$

7. Man bezeichne mit U Systeme von (endlich vielen) Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

a) Jedes Intervall des Systemes ist n_i-ter Ordnung mit $k \geqq i \geqq 1$;

b) Das System überdeckt $\mathfrak{N}$.

Die Anzahl der Systeme U ist endlich und es gibt daher ein solches System W, für welches der Ausdruck

$$\Phi(U) = \sum_{i=1}^{k} e^{-A_i} \sum_{v}^{U_i} f(\,|\,v\,|, \beta) \tag{49}$$

den Minimalwert annimmt. Dabei bedeutet U_i die Menge der Intervalle n_i-ter Ordnung, die in U vorkommen und außerdem haben wir $e^{A_1} = n_1^{\frac{1}{2}\beta}$ gesetzt.

α) Zwei Intervalle $v, \bar{v}$ aus W haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Denn sonst wäre bei geeigneter Bezeichnung $v \subset \bar{v}$. Dann wäre offenbar $W - \{v\}$ auch ein U-System und für dieses wäre $\Phi(W - \{v\}) < \Phi(W)$, was mit der Voraussetzung in Widerspruch steht.

β) Es sei $v \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Wegen der Minimaleigenschaft der Menge W gibt es in v mindestens ein Punkt $x \in \mathfrak{N}$. Da die Endpunkte von v nach dem Absatze 4a nicht in $\mathfrak{N}$ liegen, so ist x ein innerer Punkt in v. Daraus folgt $v \in V_i$. Das Intervall v ist also ein normales Intervall i-ter Stufe.

γ) Nehmen wir an, daß $k \geqq 2$ ist. Es gibt in W_k ein Intervall v. Dieses ist nach β) normal und k-ter Stufe. Es ist in einem normalen Intervall w $(k - 1)$-ter Stufe enthalten. Nach α) ist nicht $w \in W$. Mit $R(w)$ bezeichnet man die Menge aller normalen Intervalle k-ter Stufe, die in w enthalten sind. Ihre Anzahl hat man in Absatz 3 mit $N(w)$ bezeichnet. Jedes Intervall $\bar{v}$ aus $R(w)$ enthält nach Absatz 5 mindestens einen Punkt x, der in $\mathfrak{N}$ liegt. Dieser Punkt muß nach dem Absatze 4a ein innerer Punkt eines Intervalls $\bar{w}$ aus W sein. Wenn $\bar{w}$ von einer niedrigeren Stufe als $\bar{v}$ wäre, so wäre $w \subset \bar{w}$ und also auch $v \subset \bar{w}$, was nach α) unmöglich ist. Das Intervall $\bar{w}$ ist also k-ter Stufe und deshalb $\bar{w} = v$. Daraus folgt $R(w) \subset W$. Das System $W_0 = W - R(w) + \{w\}$ ist offenbar auch ein U-System und nach (49), (41) ist

$$\Phi(W_0) = \Phi(W) - e^{-A_k} N(w) \frac{1}{2^{n_k}} e^{(n_k \log 2)^\beta} +$$
$$+ e^{-A_{k-1}} \frac{1}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta} \leqq$$
$$\leqq \Phi(W) - C_{11} n_1^{\alpha' - \frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta} + e^{-A_{k-1}} \frac{1}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta},$$

also

$$\Phi(W_0) \leqq \Phi(W) - \frac{n_1^{\alpha'-\frac{1}{2}}}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1}\log 2)^\beta} (C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}-\alpha'} e^{-A_{k-1}}). \quad (50)$$

Nun ist für $k \geqq 3$ nach dem Mittelwertsatze und nach (38), (36), (24)

$$A_{k-1} = (n^\beta{}_{k-1} - n^\beta{}_{k-2}) \log^\beta 2 \geqq \beta r_{k-1} n_{k-1}^{\beta-1} \log^\beta 2 \geqq$$

$$\geqq \beta C_8 n_1 (k-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} \cdot n_1^{\beta-1} (k-1)^{\frac{\beta-1}{1-2\alpha'}} \log^\beta 2 \geqq C_{14} n_1^\beta.$$

Für $n_1 > C_{15}$, $k \geqq 3$ ist also

$$C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}-\alpha'} e^{-A_{k-1}} > 0. \quad (51)$$

Für $k = 2$, $n_1 > C_{16}$ ist

$$C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}-\alpha'} e^{-A_1} = C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}(1-2\alpha'-\beta)} > 0 \quad (52)$$

und also nach (35), (51), (52) und (50) $\Phi(W_0) < \Phi(W)$ gegen die Voraussetzung. Es ist also notwendig $k = 1$ und $W = V_1$.

Da nach dem Absatze 6. S''' auch ein U-System ist, so ist nach (48), (49)

$$n_1^{-\frac{1}{2}\beta} \sum_v^{V_1} |v| \, e^{(-\log|v|)^\beta} \leqq \sum_{i=2}^{k} e^{-A_i} \sum_v^{S_i'''} f(|v|, \beta) \leqq C_{13} \sum_v^{S} f(|v|, \beta). \quad (53)$$

8. Es sei N die Anzahl der Intervalle erster Stufe. Dann ist $N = \sum_l \binom{n_1}{l}$, wo man in $\sum_l$ über alle ganze l mit $|l - \frac{1}{2}n_1| \leqq \leqq C_{10} n_1^{\alpha'}$ summiert. Für $n_1 > C_{17}$ ist $C_{10} n_1^{\alpha'} < \sqrt{n_1} < \frac{1}{4} n_1$ und also $|l'| = |l - \frac{1}{2}n_1| \leqq \sqrt{n_1} < \frac{1}{4}n_1$. Nach (2) im Hilfssatze 1 ist nun $\binom{n_1}{l} \geqq c_2 \frac{2^{n_1}}{\sqrt{n_1}} e^{-3}$; also ist für $n_1 > C_{18}$, $N \geqq C_{19} n_1^{\alpha'-\frac{1}{2}} 2^{n_1}$. Deshalb ist nach (24), (35)

$$n_1^{-\frac{1}{2}\beta} \sum_v^{V_1} f(|v|, \beta) \geqq C_{19} n_1^{-\beta} e^{n_1^\beta \log^\beta 2} > A C_{13}. \quad (54)$$

Aus (53) und (54) folgt dann $\sum_v^S f(|v|, \beta) > A$. Das gilt für alle mögliche Überdeckungen S, die aus höchstens abzählbarvielen offenen Intervallen, die kleiner als ϱ sind, bestehen. Daraus folgt

$$A \leqq L_\varrho(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) \leqq L(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)).$$

Da A beliebig groß gewählt werden durfte, so ist $L(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) = \infty$.

*

Dyadické rozvoje a Hausdorffova míra.

(Obsah předešlého článku.)

Pro $0 < x < 1$ budiž $x = 0, i_1 i_2 i_3 \ldots = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \ldots$ dyadický rozvoj čísla x (i_k tedy rovno buď 0 neb 1) normovaný požadavkem, aby posloupnost $i_1, i_2, i_3, \ldots$ obsahovala nekonečně mnoho nul. Označme $p(x, n)$ počet nul v systému $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Budiž $f(x) > 0$ pro $0 < x < 1$ a $\mathfrak{M}$ nějaké lineární množství. Budiž $0 < \varrho < 1$. Pokryjme $\mathfrak{M}$ nejvýše spočetným množstvím S otevřených intervalů kratších než ϱ a utvořme výraz $A = \sum_{v}^{S} f(\mid v \mid)$, kde $\mid v \mid$ je délka intervalu $v \in S$. Dolní hranici součtů A pro všechna taková pokrytí S označme $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$. Jestliže ϱ klesá, $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$ neklesá a existuje tedy limita

$$L(\mathfrak{M}, f(x)) = \lim_{\varrho=0+} L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x)),$$

kterou nazýváme Hausdorffovou mírou množství $\mathfrak{M}$ příslušnou k $f(x)$.

Budiž $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Souhrn čísel x, pro která $0 \leq x < 1$ a pro která $p(x, n) = \frac{1}{2}n + O(n^\alpha)$ označme $\mathfrak{M}_\alpha$. Budiž $f(x, \beta) = x \cdot e^{(-\log x)^\beta}$ pro $0 < x < 1$, $0 < \beta < 1$. V předešlém článku jsme dokázali tuto větu.

Je-li $0 < \beta < 1 - 2\alpha$ je $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = 0$ a je-li $1 - 2\alpha < \beta < 1$ je $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = \infty$.