O lichoběžníku opsaném kružnici.

Pojednává
Vavřinec Jelínek,
professor v Novém Městě u Vídně.

(Dokončení.)

c) Dáno jest rameno c_1 a úhly α a β.

Používajíce zase horních rovnic, obdržíme ostatní hodnoty lichoběžníka:

$$r = \frac{c_1}{2} \sin \alpha,$$

$$c_2 = c_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$a = \frac{r \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} = c_1 \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}},$$

$$b = \frac{r \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = c_1 \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

Plocha pak jest

$$p = ab \, . \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = c_1^2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$= c_1^2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

d) Dány jsou obě půdice a a b a rameno c_1.

Druhé rameno $c_2 = a + b - c_1$ můžeme pro krátkost považovati za známou.

Dle případu *a)* jest

$$c_1 = \frac{a \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}, \quad c_2 = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}},$$

tedy

$$c_1 c_2 = \frac{a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2} = \frac{ab}{\left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2};$$

tudíž

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\frac{ab}{c_1 c_2}}. \tag{1}$$

Z úměry $c_1 : c_2 = \sin \beta : \sin \alpha$, neb

$$(c_1 + c_2) : (c_1 - c_2) = \operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}$$

nabudeme

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Dle hodnoty pro $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ najdeme

$$\operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sqrt{1 - \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{ab}{c_1 c_2 - ab}},$$

takže

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{\frac{ab}{c_1 c_2 - ab}}. \tag{2}$$

Z obou těchto rovnic (1) a (2) vypočítati lze oba úhly α a β; najíti však lze i funkci pro každý úhel zvlášť. Sestavme z výsledků v případě *a*) jednoduché poměry

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}},$$

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

a pak složité poměry

$$\frac{bc_1}{ac_2}=\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{ac_1}{bc_2}=\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\frac{1-\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Řešíce obě poslední rovnice, najdeme z první

$$\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{bc_1\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{ac_2},$$

kteroužto hodnotu dosadivše do rovnice druhé

$$\frac{ac_1}{bc_2}=\frac{ac_2-bc_1+bc_1\sin^2\frac{\alpha}{2}}{ac_2\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

obdržíme

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{b(ac_2-bc_1)}{c_1(a^2-b^2)}};$$

podobně

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{b(ac_1-bc_2)}{c_2(a^2-b^2)}}.$$

Výsledky tyto se zjednoduší, vyměníme-li v nich $a+b-c_1$ místo c_2:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{b[a(a+b-c_1)-bc_1]}{c_1(a^2-b^2)}}=\sqrt{\frac{b(a^2+ab-ac_1-bc_1)}{c_1(a^2-b^2)}}$$

$$=\sqrt{\frac{b[a(a+b)-c_1(a+b)]}{c_1(a^2-b^2)}}=\sqrt{\frac{b(a-c_1)}{c_1(a-b)}},$$

a podobně

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{b(c_1-b)}{c_2(a-b)}}.$$

Dle těchto sinusů najdeme cosinusy

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{a(c_1-b)}{c_1(a-b)}},\quad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{a(a-c_1)}{c_2(a-b)}},$$

a pak tangenty

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{b(a-c_1)}{a(c_1-b)}},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{b(c_1-b)}{a(a-c_1)}}.$$

Poloměr vepsané kružnice jest dle výsledku v případě c)

$$r=\frac{c_1}{2}\sin\alpha=c_1\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$r=c_1\sqrt{\frac{ab(a-c_1)(c_1-b)}{c_1^2(a-b)^2}}=\frac{\sqrt{ab(a-c_1)(c_1-b)}}{a-b},$$

a tudíž plocha $p=(a+b)r$,

$$p=\frac{a+b}{a-b}\sqrt{ab(a-c_1)(c_1-b)},$$

vzorec, který bychom byli také obdrželi, kdybychom byli do známého vzorce pro libovolný lichoběžník

$$p=\frac{a+b}{4(a-b)}$$

$$\cdot\sqrt{(-a+b+c_1+c_2)(a-b+c_1+c_2)(a-b-c_1+c_2)(a-b+c_1-c_2)}$$

dosadili $c_2=a+b-c_1$.

Strany v součinu $(a - c_1)(c_1 - b)$ můžeme zaměniti kterýmikoli třemi stranami jinými, tvoříce vždy rozdíl mezi některou stranou a každou stranou sousední. Nahradíme-li totiž v tomto součinu rameno c_1 ramenem c_2 v prvním činiteli

$$(a - c_1)(c_1 - b) = (a - a - b + c_2)(c_1 - b) = (c_2 - b)(c_1 - b),$$

neb v druhém činiteli

$$(a - c_1)(c_1 - b) = (a - c_1)(a + b - c_2 - b) = (a - c_1)(a - c_2),$$

neb v obou činitelích

$$(a - c_1)(c_1 - b) = (a - a - b + c_2)(a + b - c_2 - b) = (a - c_2)(c_2 - b),$$

shledáme v těchto součinech, ač sobě rovných, pokaždé jiné strany.

Vzdálenosti vrcholů lichoběžníka ode středu kružnice jsou:

$$x_1 = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{ac_1(c_1 - b)}{a - b}}, \quad x_2 = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{ac_2(c_2 - b)}{a - b}},$$

$$y_1 = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{bc_1(a - c_1)}{a - b}}, \quad y_2 = \frac{r}{\cos\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{bc_2(a - c_2)}{a - b}}.$$

Úhlopříčny vypočítáme dle Carnotovy věty.

Z trojúhelníka ABD obdržíme:

$$u_1^2 = a^2 + c_1^2 - 2ac_1 \cos\alpha,$$

$$= a^2 + c_1^2 - 2ac_1\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$= a^2 + c_1^2 - 2ac_1 \frac{a(c_1 - b) - b(a - c_1)}{c_1(a - b)}.$$

Dosadíme-li zde $a - c_1 = c_2 - b$, bude

$$u_1^2 = a^2 + c_1^2 - 2a \frac{ac_1 - ab + b^2 - bc_2}{a - b},$$

$$= a^2 + c_1^2 - 2a \frac{ac_1 - bc_2 - b(a - b)}{a - b},$$

$$u_1^2 = a^2 + c_1^2 + 2ab - \frac{2a}{a-b}(ac_1 - bc_2).$$

Podobně postupujíce, obdržíme z trojúhelníka ABC

$$u_2^2 = b^2 + c_1^2 + 2ab - \frac{2b}{a-b}(ac_2 - bc_1).$$

Hledáme-li však tutéž úhlopříčnu u_2 z trojúhelníka ACD, nabudeme

$$u_2^2 = a^2 + c_2^2 - 2ac_2 \cos\beta,$$

$$= a^2 + c_2^2 - 2ac_2 \left(\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right),$$

$$= a^2 + c_2^2 - 2ac_2 \frac{a(a-c_1) - b(c_1-b)}{c_2(a-b)}.$$

Položíme-li tu $c_1 - b = a - c_2$, bude

$$u_2^2 = a^2 + c_2^2 - 2a \frac{a^2 - ac_1 - ab + bc_2}{a-b},$$

$$= a^2 + c_2^2 - 2a \frac{a(a-b) - ac_1 + bc_2}{a-b},$$

$$= a^2 + c_2^2 - 2a^2 + \frac{2a}{a-b}(ac_1 - bc_2),$$

$$= -a^2 + c_2^2 + \frac{2a}{a-b}(ac_1 - bc_2).$$

Součet hodnoty u_2^2 a hodnoty u_1^2 dá

$$u_1^2 + u_2^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2ab.$$