

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vavřinec Jelínek

O lichoběžníku opsaném kružnici

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 3, 177--182

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109327>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1894

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O lichoběžníku opsaném kružnicí.

Pojednává

Vavřínek Jelínek,

profesor v Novém Městě u Vídně.

(Dokončení.)

c) *Dáno jest rameno c_1 a úhly α a β .*

Používajíce zase horních rovnic, obdržíme ostatní hodnoty lichoběžníka:

$$r = \frac{c_1}{2} \sin \alpha,$$

$$c_2 = c_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$a = \frac{r \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} = c_1 \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}},$$

$$b = \frac{r \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = c_1 \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

Plocha pak jest

$$\begin{aligned} p = ab &= c_1^2 \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \\ &= c_1^2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \end{aligned}$$

d) *Dány jsou obě půdlice a a b a rameno c_1 .*

Druhé rameno $c_2 = a + b - c_1$ můžeme pro krátkost považovati za známou.

Dle případu a) jest

$$c_1 = \frac{a \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}, \quad c_2 = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}},$$

tedy

$$\begin{aligned} c_1 c_2 &= \frac{a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2} \\ &= \frac{a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2} = \frac{ab}{\left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2}; \end{aligned}$$

tudíž

$$(1) \quad \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\frac{ab}{c_1 c_2}}.$$

Z úměry $c_1 : c_2 = \sin \beta : \sin \alpha$, neb

$$(c_1 + c_2) : (c_1 - c_2) = \operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}$$

nabudeme

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Dle hodnoty pro $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ najdeme

$$\operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sqrt{1 - \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2}} = \sqrt{\frac{ab}{c_1 c_2 - ab}},$$

takže

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{\frac{ab}{c_1 c_2 - ab}}.$$

Z obou těchto rovnic (1) a (2) vypočítati lze oba úhly α a β ; najítí však lze i funkci pro každý úhel zvlášť. Sestavme z výsledků v případě a) jednoduché poměry

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}},$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$$

a pak složité poměry

$$\frac{bc_1}{ac_2} = \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{ac_1}{bc_2} = \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \frac{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Řešíce obě poslední rovnice, najdeme z první

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{bc_1 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{ac_2},$$

kteroužto hodnotu dosadivše do rovnice druhé

$$\frac{ac_1}{bc_2} = \frac{ac_2 - bc_1 + bc_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{ac_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

obdržíme

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{b(ac_2 - bc_1)}{c_1(a^2 - b^2)}},$$

podobně

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{b(ac_1 - bc_2)}{c_2(a^2 - b^2)}}.$$

Výsledky tyto se zjednoduší, vyměníme-li v nich $a + b - c_1$ místo c_2 :

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{b[a(a+b-c_1) - bc_1]}{c_1(a^2 - b^2)}} = \sqrt{\frac{b(a^2 + ab - ac_1 - bc_1)}{c_1(a^2 - b^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{b[a(a+b) - c_1(a+b)]}{c_1(a^2 - b^2)}} = \sqrt{\frac{b(a-c_1)}{c_1(a-b)}},\end{aligned}$$

a podobně

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{b(c_1 - b)}{c_2(a-b)}}.$$

Dle těchto sinusů najdeme cosinusy

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a(c_1 - b)}{c_1(a-b)}}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{a(a-c_1)}{c_2(a-b)}},$$

a pak tangenty

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{b(a-c_1)}{a(c_1-b)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{b(c_1-b)}{a(a-c_1)}}.$$

Poloměr vepsané kružnice jest dle výsledku v případě c)

$$r = \frac{c_1}{2} \sin \alpha = c_1 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$r = c_1 \sqrt{\frac{ab(a-c_1)(c_1-b)}{c_1^2(a-b)^2}} = \frac{\sqrt{ab(a-c_1)(c_1-b)}}{a-b},$$

a tudíž plocha $p = (a+b)r$,

$$p = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{ab(a-c_1)(c_1-b)},$$

vzorec, který bychom byli také obdrželi, kdybychom byli do známého vzorce pro libovolný lichoběžník

$$p = \frac{a+b}{4(a-b)}$$

$\sqrt{(-a+b+c_1+c_2)(a-b+c_1+c_2)(a-b-c_1+c_2)(a-b+c_1-c_2)}$
dosadili $c_2 = a + b - c_1$.

Strany v součinu $(a - c_1)(c_1 - b)$ můžeme zaměnitli kterýmikoli třemi stranami jinými, tvořící vždy rozdíl mezi některou stranou a každou stranou sousední. Nahradíme-li totiž v tomto součinu rameno c_1 ramenem c_2 v prvním činiteli

$$(a - c_1)(c_1 - b) = (a - a - b + c_2)(c_1 - b) = (c_2 - b)(c_1 - b),$$

nebo v druhém činiteli

$$(a - c_1)(c_1 - b) = (a - c_1)(a + b - c_2 - b) = (a - c_1)(a - c_2),$$

nebo v obou činitelích

$$(a - c_1)(c_1 - b) = (a - a - b + c_2)(a + b - c_2 - b) = (a - c_2)(c_2 - b),$$

shledáme v těchto součinech, ač sobě rovných, pokaždé jiné strany.

Vzdálenosti vrcholů lichoběžníka ode středu kružnice jsou :

$$x_1 = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{ac_1(c_1 - b)}{a - b}}, \quad x_2 = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{ac_2(c_2 - b)}{a - b}},$$

$$y_1 = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{bc_1(a - c_1)}{a - b}}, \quad y_2 = \frac{r}{\cos \frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{bc_2(a - c_2)}{a - b}}.$$

Úhlopříčny vypočítáme dle Carnotovy věty.

Z trojúhelníka ABD obdržíme :

$$\begin{aligned} u_1^2 &= a^2 + c_1^2 - 2ac_1 \cos \alpha, \\ &= a^2 + c_1^2 - 2ac_1 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right), \\ &= a^2 + c_1^2 - 2ac_1 \frac{a(c_1 - b) - b(a - c_1)}{c_1(a - b)}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li zde $a - c_1 = c_2 - b$, bude

$$\begin{aligned} u_1^2 &= a^2 + c_1^2 - 2a \frac{ac_1 - ab + b^2 - bc_2}{a - b}, \\ &= a^2 + c_1^2 - 2a \frac{ac_1 - bc_2 - b(a - b)}{a - b}, \end{aligned}$$

$$u_1^2 = a^2 + c_1^2 + 2ab - \frac{2a}{a-b} (ac_1 - bc_2).$$

Podobně postupujíc, obdržíme z trojúhelníka ABC

$$u_2^2 = b^2 + c_1^2 + 2ab - \frac{2b}{a-b} (ac_2 - bc_1).$$

Hledáme-li však tutéž úhlopříčnu u_2 z trojúhelníka ACD, nabudeme

$$\begin{aligned} u_2^2 &= a^2 + c_2^2 - 2ac_2 \cos \beta, \\ &= a^2 + c_2^2 - 2ac_2 \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \right), \\ &= a^2 + c_2^2 - 2ac_2 \frac{a(a-c_1) - b(c_1-b)}{c_2(a-b)}. \end{aligned}$$

Položíme-li tu $c_1 - b = a - c_2$, bude

$$\begin{aligned} u_2^2 &= a^2 + c_2^2 - 2a \frac{a^2 - ac_1 - ab + bc_2}{a-b}, \\ &= a^2 + c_2^2 - 2a \frac{a(a-b) - ac_1 + bc_2}{a-b}, \\ &= a^2 + c_2^2 - 2a^2 + \frac{2a}{a-b} (ac_1 - bc_2), \\ &= -a^2 + c_2^2 + \frac{2a}{a-b} (ac_1 - bc_2). \end{aligned}$$

Součet hodnoty u_2^2 a hodnoty u_1^2 dá

$$u_1^2 + u_2^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2ab.$$