František Josef Studnička

Methodický příspěvek k integrálnímu počtu. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 2, 67--76

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109320`

Methodický příspěvek k integrálnímu počtu.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Již na první pohled se poznává, že

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin}{\cos}(nx)dx = 0, \tag{1}$$

z čehož pak plyne se strany jedné

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2}{\cos^2}(nx)dx = \pi, \tag{2}$$

a se strany druhé

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin}{\cos}(mx)\frac{\sin}{\cos}(nx)dx = 0, \tag{3}$$

jelikož tu platí

$$\frac{\sin}{\cos}(mx)\frac{\sin}{\cos}(nx) = {}^1\!/_2 \cos(m-n)x \mp {}^1\!/_2 \cos(m+n)x,$$

onde pak jest

$$\frac{\sin^2}{\cos^2}(nx) = \frac{1 \mp \cos 2nx}{2},$$

při čemž máme ve všech případech na zřeteli, že m a n jsou čísla *celistvá* i positivní, a současně se volí svrchní neb spodní symboly.

Pomocí těchto velmi jednoduchých vzorců možná pak stanoviti hodnotu četných integrálů omezených spůsobem pohodlným, což ukázati jest účelem těchto řádků.

1. Značí-li p a q positivní čísla celistvá, platí, jakož známo*)

*) Viz *Studnička* „Výklady o funkcích monoperiodických", pag. 102.

$$(-1)^{\frac{1}{2}p} 2^{p+q-1} \sin^p x \cos^q x$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p+q)-1} (-1)^k A_k \cos(p+q-2k)x + \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q)}}{2} A_{\frac{1}{2}(p+q)},$$

(*p*, *q sudé*)

$$= \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p+q-1)} (-1)^k A_k \cos(p+q-2k)x,$$

(*p sudé*, *q liché*),

kdež koëfficienty A_k stanoveny jsou vzorcem

$$A_k = p_k - q_1 p_{k-1} + q_2 p_{k-2} - \ldots + (-1)^k q_k, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

vyjadřuje-li symbol p_k známý koëfficient binomický, takže

$$A_0 = 1,$$

obdržíme ze vzorců těchto, znásobíme-li na obou stranách differenciálem

$$\cos(p+q-2k)x dx$$

a integrujeme-li pak v mezích $0 - 2\pi$, se zřetelem ke vzorcům (2) a (3) přímo

$$\sin^p x \cos^q (p+q-2k)x dx = (-1)^{k+\frac{1}{2}p} \frac{A_k \pi}{p+q-1}, \tag{5}$$

kterýžto vzorec platí pro *sudé* p a libovolné q.

Položíme-li tu $p = 0$, ve kterémžto případě vyplyne ze vzorce (4)

$$A_k = (-1)^k q_k,$$

obdržíme bezprostředně

$$\int_0^{2\pi} \cos^q x \cos(q-2k)x dx = \frac{q_k \pi}{2^{q-1}}, \tag{6}$$

a ze vzorce tohoto pro $k = 0$ konečně

$$\int_0^{2\pi} \cos^q x \cos qx dx = \frac{\pi}{2^{q-1}}, \tag{7}$$

kteréžto vzorce platí pro sudé i liché q.

Z téhož vzorce (5) obdrží se pro $q = 0$ podobně

$$\int_0^{2\pi} \sin^p x \cos(p - 2k)x dx = (-1)^{k+\frac{1}{2}p} \frac{p_k \pi}{2^{p-1}}, \tag{8}$$

a tedy pro $k = 0$ zvláště

$$\int_0^{2\pi} \sin^p x \cos px dx = (-1)^{\frac{1}{2}p} \frac{\pi}{2^{p-1}}, \tag{9}$$

kteréžto vzorce platí jen pro sudé p.

Mimo to plyne ze vzorce (5) pro

$$p + q - 2k = 0,$$

tedy v jednoduchém případě, kde

$$k = \tfrac{1}{2}(p + q),$$

nový jednoduchý vzorec pro sudé p a q

$$\int_0^{2\pi} \sin^p x \cos^q x dx = (-1)^{\frac{1}{2}q} \frac{\pi}{2^{p+q-1}} A_{\frac{1}{2}(p+q)}, \tag{10}$$

kterýž možná i přímo ze vzorce původního vyvinouti, násobí-li se na obou stranách dx a integruje-li se v mezích $0 - 2\pi$.

Podlé toho jest tedy na př.

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^6 x \cos 8 x dx = \frac{\pi}{2^8},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^7 x \cos 7 x dx = \frac{\pi}{2^6},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx = \frac{5\pi}{2^6}.$$

2. Užijeme-li podobně vzorce

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{p+q-1} \sin^p x \cos^q x$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p+q)-1} (-1)^k A_k \sin(p+q-2k)x + \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p+q)}}{2} A_{\frac{1}{2}(p+q)},$$

(p, q liché)

$$= \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p+q-1)} (-1)^k A_k \sin(p+q-2k)\, x,$$

(p liché, q sudé),

kdež A_k určeno taktéž vzorcem (5), obdržíme, znásobíce na obou stranách differenciálem

$$\sin(p+q-2k)\, x dx$$

a integrujíce opět v mezích $0 - 2\pi$, se zřetelem ke vzorcům (2) a (3)

$$\int_0^{2\pi} \sin^p x \cos^q x \sin(p+q-2k) x dx = (-1)^{k+\frac{1}{2}(p-1)} \frac{A_k \pi}{2^{p+q-1}}, \quad (11)$$

ze kteréhožto vzorce pro liché p a libovolné celistvé q platného plyne pro $q = 0$ přímo

$$\int_0^{2\pi} \sin^p x \sin(p-2k) x dx = (-1)^{k+\frac{1}{2}(p-1)} \frac{p_k \pi}{2^{p-1}}, \quad (12)$$

takže pro $k = 0$ zvláště platí

$$\int_0^{2\pi} \sin^p x \sin px dx = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\pi}{2^{p-1}}. \quad (13)$$

Zároveň tu patrno, jakož i jinak snadno se obdrží,*) že

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2k+1} x dx = 0.$$

---

*) Uvažme, že náš sinus definován vzorcem

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}!$$

Podle toho jest na př.

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^4 x \sin 5x dx = -\frac{\pi}{2^6},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^5 x \sin 5x dx = \frac{\pi}{2^4},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^5 x \sin x dx = \frac{5}{8}\pi,$$

kdež ostatně v posledním příkladě možná $\sin^6 x$ psáti a dle jiného vzorce integrovati.

Konečně budiž tu ještě poznamenáno, že ze vzorce (7), klademe-li tam

$$q = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

a sečteme-li pak na obou stranách, obdrží se

$$\int_0^{2\pi} \sum_{q=0} \cos^q x \cos qx dx = 4\pi, \tag{14}$$

kdežto z obdobného vzorce (13) se týmže spůsobem přijde ke vzorci obdobnému

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=0} \sin^{2k+1} x \sin (2k+1)x dx = {}^4/_5\pi \tag{15}$$

což i jiným spůsobem lze vyvinouti.

O sdruženosti číselných veličin vůbec a o řešení kvadratických rovnic pomocí kvaternionů zvlášť.

Napsal

dr. F. J. Studnička.

Číslo u sluje *sdruženým* čili *konjugovaným* s nějakým číslem, označeným proto symbolem $\mathrm{K}v$, představuje-li u součet a $\mathrm{K}u$ rozdíl týchže dvou čísel, platí-li tedy

$$\begin{aligned} u &= a + b, \\ \mathrm{K}u &= a - b. \end{aligned} \tag{1}$$

Z toho plyne, že každé číslo jest sdružené s hodnotou svou negativní, poněvadž pro zvláštní případ, kde

$$a = o,$$

ze vzorců (1) jde přímo

$$\begin{aligned} u &= b, \\ \mathrm{K}u &= -b, \end{aligned}$$

a že každá dvojice čísel představuje čísla sdružená, poněvadž z téže soustavy (1) snadno se obdrží

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(u + \mathrm{K}u), \\ b &= \frac{1}{2}(u - \mathrm{K}u). \end{aligned} \tag{2}$$

Zároveň tu patrno, že všeobecně platí

$$\begin{aligned} u + \mathrm{K}u &= 2a, \\ u \,.\, \mathrm{K}u &= a^2 - b^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Tento pojem sdruženosti neposkytuje nic zvláštního, pokud jsou čísla a, b stejnorodá; za to nabývá však tím větší zajímavosti a důležitosti, jakmile jest číslo a jiného rázu nežli číslo b, takže nelze součet neb rozdíl jich vyjádřiti číslem jediným tvaru konečného, což na př. se vyskytuje

1. jestli a číslo racionální, b irracionální, takže u představuje číslo *surdické*;

2. jestli a číslo reální, b imaginární, takže u představuje číslo *soujemné*;

3. jestli a číslo reální, b ideální,*) takže u představuje *kvaternion*.**)

Možnáť totiž v případech takovýchto veličiny toho neb onoho rázu odstraniti pomocí vzorců (2), takže se v dalším postupu početním vyskytuje pouze a nebo b, čímž se mathematické vyšetřování valně zjednodušuje.

Poněvadž se všechny tyto případy jeví již při řešení nejjednodušších rovnic kvadratických, totiž majících koëfficienty racionální, zjednejme si kořeny jejich, jevící se vždy ve tvaru sdruženém, v podobě nejvšeobecnější a to kvaternionové. Budeť tu pro

$$x^2 - 2ax + b = 0, \tag{4}$$

označíme-li kvaternion

$$u = s + xi_1 + yi_2 + zi_3 \tag{5}$$

kratším tvarem binomickým, kladouce

$$u = \mathrm{R} + \mathrm{I},$$

takže představuje R složku jeho reální, I pak ideální, výrazem obou kořenů x_1, x_2 zvaných

$$x_1 = \mathrm{R} + \mathrm{I},$$
$$x_2 = \mathrm{R} - \mathrm{I}.$$

O těchto kořenech pak platí

$$x_1 + x_2 = 2a = 2\mathrm{R},$$

takže tu R stanoveno vzorcem obdobně se vzorci (3), přihlížíme-li k jejich složení,

$$\mathrm{R} = a, \tag{6}$$

*) Zde máme na zřeteli jen případ tento, ač i o jiných číselných hodnotách ideálních platí výrok předcházející.

**) Kdo by neznal podstaty kvaternionů, viz *Studnička* „O kvaternionech“ Časop. pro pěst. math. a fys. R. V.

a mimo to

$$x_1 \,.\, x_2 = b = \mathrm{R}^2 - \mathrm{I}^2,$$

takže tu I stanoveno vzorcem

$$\mathrm{I} = \sqrt{a^2 - b}\,, \tag{7}$$

z něhož plyne, jakož známo, se zřetelem ke vzorci (5)

$$x^2 + y^2 + z^2 = b - a^2. \tag{8}$$

Poněvadž se řešením rovnice (8) obdrží nekonečně velké množství hodnot pro x, y, z, poznáváme ze vzorce (5), že *rovnice kvadratická má nekonečně mnoho kořenů kvaternionových*,*) mezi nimiž mohou býti dva *reální* pro $a^2 > b$,

stejné „ $a^2 = b$,

soujemné „ $a^2 < b$.

Geometrické znázornění těchto hodnot kořenových objasňuje zcela dobře tyto poměry.

Značí-li x, y, z pravoúhlé souřadnice, představuje rovnice (8) kulovou plochu, mající poloměr

$$r = \sqrt{b - a^2}\,.$$

A tu znázorníme hodnoty kořenů rovnice (3), jestli

$$\mathrm{I} = \sqrt{a^2 - b}\,, \begin{cases} \textit{reální}, & \text{kořeny reální,} \\ 0\,, & \text{kořeny stejné,} \\ \textit{imaginární}, & \text{kořeny soujemné,} \end{cases}$$

polohou libovolného bodu na ploše kulové, jejíž

$$r = \sqrt{b - a^2} \begin{cases} \textit{imaginární} \\ 0 \\ \textit{reální} \end{cases}$$

a jejíž střed leží na ose čísel reálních od bodu nullového a jenotek délkových vzdálen, kdežto osa čísel kvality i_1 splývá s osou čísel imaginárních, osy pak čísel kvality i_2 a i_3 jsou sice orthogonálně, ale jinak libovolně položeny.

Jestli na př. řešiti rovnici

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

---

*) Jestli $a^2 > b$, promění se kvaternion v tak zvaný *bikvaternion*.

obdržíme kořeny bikvaternionové

$$x_1 = \frac{3}{2} + xi_1 + yi_2 + zi_3$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - xi_1 - yi_2 - zi_3$$

poněvadž tu vyhovují složky x, y, z podmínce

$$x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{1}{4},$$

takže pro $y = 0$, $z = 0$ se tu obdrží

$$x = \frac{1}{2} i,$$

a tedy zvláštní dva kořeny mají hodnotu

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i^2 = 1,$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i^2 = 2.$$

jakož se i řešením obyčejným obdrží.

Jestli podobně řešiti rovnici

$$x^2 - 3x + \frac{5}{2} = 0,$$

obdržíme týmže postupem

$$x_1 = \frac{3}{2} + xi_1 + yi_2 + zi_3$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - xi_1 - yi_2 - zi_3,$$

kdež vyhovují složky x, y, z podmínce

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4},$$

takže pro $y = 0$, $z = 0$ se tu obdrží zvláštní řešení

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i,$$
$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i,$$

což se i potvrzuje způsobem řešení obyčejným.

Ještě jednodušší illustraci poskytuje tu řešení rovnice

$$x^2 \pm 1 = 0.$$

Zároveň při tom poznáváme, jak odpovídá znázornění čísel soujemných body kružnicovými obdobné znázornění čísel kvaternionových body plochy kulové.

Krátký důkaz Borchardtovy věty determinantní.

Napsal

M. Lerch,

docent v Praze.

Pro Borchardtův vztah $D = \varDelta T$ podali důkazy pp. Cayley*) a Řehořovský**); oba spočívají na vzorci t. zv. interpolačním, dosti složitém. Následující důkaz má za účel nahraditi zdlouhavé výpočty jednoduchou úvahou a tím začátečníku usnadniti studium této partie algebry.

Znamenejme

$$\varDelta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1 - x_1}, & \frac{1}{t_2 - x_1}, & \dots & \frac{1}{t_n - x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{t_1 - x_n}, & \frac{1}{t_2 - x_n}, & \dots & \frac{1}{t_n - x_n} \end{vmatrix},$$

---

*) Faà de Bruno, Théorie des formes binaires, p. 39.

**) Časopis, XI. ročník, str. 111; Základové vyšší algebry, str. 92.