Drobné zprávy.

Napsal

prof. Eduard Weyr.

Poznámka o celistvých transcendentních funkcích prvního rodu.

Pan *B. J. Bukrjejev* uveřejnil v XVII. svazku Mathematického Sborníku vydávaného Moskevským mathematickým družstvem zajímavou poznámku o rozloze kořenů jistého druhu celistvých transcendentních funkcí, již tuto uvedeme, a k níž patrně veden byl statí „Sur les équations algébriques", kterou pan *Berloty* v XCIX. svazku Comptes Rendus byl uveřejnil.

Jak známo, jest obecný tvar celistvé transcendentní funkce jedné proměnné dán formulí *Weierstrass*-ovou

$$F(x) = x^n e^{G(x)} \prod_{(\nu)} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{Q_m\left(\frac{x}{a_\nu}\right)} \right\};$$

zde značí n celistvé kladné číslo, $a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots \infty)$ kořeny funkce různé od nully a takové, že

$$\lim |a_\nu| = \infty, \text{ při } \nu = \infty,$$

$G(x)$ pak funkci celistvou racionalnou neb transcendentní, a konečně Q_m funkcí definovanou rovnicí

$$Q_m(z) = z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^m}{m}.$$

Pro případ, že m má pevnou hodnotu, nazval *Laguerre* $F(x)$ funkcí rodu m^{ho} (genre).

Ve zvláštním případě, kdy $m = 1$, $G(x) = \text{const.}$, $n = 0$ a kdy tedy

$$(1) \qquad F(x) = \text{const.} \prod \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\frac{x}{a_\nu}} \right\}$$

ukazuje p. auktor, že platí tato věta:

„Nalézají-li se všecky kořeny funkce prvního rodu (1) v oné části A roviny, kterou omezují dvě rovnoběžné přímky (L) a (M) probíhající tak, že počátek se nenalézá mezi nimi, tu žádný kořen první derivace $F'(x)$ se nemůže nalézati v oné části B roviny, jež se rozprostírá za přímkou (M), vzdálenější od počátku; na přímce (M) mohou se nalézati jen ony kořeny derivace, jež jsou zároveň vícenásobnými kořeny funkce $F(x)$."

Větu tu lze dokázati následující úvahou, poněkud kratší než jest úvaha pana auktora.

Logarithmickým derivováním funkce $F(x)$ obdržíme

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_{(\nu)} \left\{ \frac{1}{x - a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} \right\}.$$

Označíme-li φ sklon kolmice spuštěné s počátku na přímky (L) a (M) s kladnou osou realnou, a nalézá-li se bod x v části B roviny, tu patrně argument jak hodnoty a_ν, tak hodnoty $x - a_\nu$ jest v mezích $\varphi - \frac{\pi}{2}$ a $\varphi + \frac{\pi}{2}$, a tedy argumenty hodnot $\frac{1}{a_\nu}$, $\frac{1}{x - a_\nu}$ v mezích $-\varphi - \frac{\pi}{2}$ a $-\varphi + \frac{\pi}{2}$. Jeví se tedy $\frac{F'(x)}{F(x)}$ jakožto součet komplexních hodnot repraesentovaných body, jež se vesměs nalézají po jedné straně přímky vedené počátkem a uzavírající úhel $-\varphi$ s realnou kladnou osou; z toho však patrno, že tento součet jest různý od nully, a tedy také $F'(x)$.

Nalézá-li se bod x na přímce (M) samé, lze opět tak rozumovati, arci za supposice, že x není kořenem dané funkce $F(x)$; je-li v posledním případě též kořenem derivace $F'(x)$, jest vícenásobným kořenem dané funkce, a věta dokázána.

Pan auktor uvádí zajímavý specialný případ, kdy obě přímky (L) a (M) splývají; pak máme tento theorem: „Nalézají-li se všecky kořeny funkce prvního rodu (1) na přímce neprocházející počátkem, tu se mohou kořeny první derivace nalézati jen po oné straně této přímky, na které leží počátek; na přímce samé mohou býti jen takové kořeny první derivace, jež jsou zároveň vícenásobnými kořeny dané funkce."

Podotkněme, že v případě, kdy všecky kořeny funkce (1) jsou realné, jsou i všecky kořeny derivace $F'(x)$ realné, jakož ukázal *F. Chio* (v. *Hermite*, Cours d'Analyse, 3[e] éd. p. 83).

Přihlédněme nyní k celistvým funkcím nulltého rodu, $m = 0$, a specialně k případu, kdy $G(x) = \text{const.}$ a tedy

$$(2) \qquad F(x) = \text{const.}\ x^n \prod_{(\nu)} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right).$$

O těch, jakož i o celistvých racionalných funkcích, dokázal p. *Berloty* (l. c.), že, nalézají-li se jich kořeny po jedné straně nějaké přímky, tu i kořeny derivace $F'(x)$ se nalézají po téže straně oné přímky, přímku samu do té strany počítajíc.

Naše úvaha podává ihned důkaz tohoto výroku, neboť je-li na př. počátek ve vytčeném oboru, a x po druhé straně přímky, tu opět argument hodnoty $x - a_\nu$ jest v mezích $\varphi - \frac{\pi}{2}$ a $\varphi + \frac{\pi}{2}$, značí-li φ sklon kolmice spuštěné s počátku na přímku, a v případě, kdy počátek není ve vytčeném oboru a x též ne, jest argument hodnoty $x - a_\nu$ v mezích $\varphi + \frac{\pi}{2}$ a $\varphi + \frac{3\pi}{2}$, z čehož ihned jde, že $\sum \frac{1}{x - a_\nu}$ nevymizí, a že tedy také $F'(x)$ nevymizí.

Applikováním tohoto výsledku ku všem stranám vypouklého obvodu plyne ihned: „Jsou-li všecky kořeny funkce (2) uvnitř otevřeného vypouklého přímočarného neb křivého obvodu, tu se nalézají též všecky kořeny derivace $F'(x)$ uvnitř obvodu," a specialně: „jsou-li všecky kořeny funkce (2) mezi dvěma rovnoběžnými přímkami, jsou i všecky kořeny derivace $F'(x)$ mezi těmito přímkami."

V případě, kdy (2) jest celistvou, racionalnou funkcí, lze patrně v této větě zmíněný obvod nahraditi vypouklým obvodem uzavřeným, obemykajícím všecky kořeny funkce (2), jakož vše l. c. podotknuto.

O funkcích analytických uveřejnil prof. *J. V. Slešinskij* v cit. Sborníku krátkou stať „k theorii analytických funkcí," v níž podal a dokázal tuto větu:

„Jsou-li v řadě

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

koefficienty čísla realná, a existuje-li limita

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = c,$$

kde c značí konečné číslo různé od nully, tu jest c zvláštním (singularným) číslem analytické funkce $f(x)$," t. j. rozvoj této funkce pokračující dle celistvých kladných mocností hodnoty $x - c$ neexistuje.

Podává

Dr. V. Láska,
docent v Praze.

O rozdílu v roční teplotě obou polokoulí. Jak známo, slunce pobude na severní polokouli o několik dnů déle než na jižní. To považováno za hlavní příčinu fakta, že střední teplota severní polokoule jest větší než jižní.

De *Tromelin* (viz Compt. Rend. 1892 II. p. 409.) a již dříve *Augot* (v cenou poctěném pojednání francouzské Akademie z roku 1883) dokazují, že příčina jest jistě *jiná.*

Důkaz de Tromelinův jest jednoduchý a elegantní.

Jsou-li v dráze zemské dvě rozličná místa dána vzdálenostmi r a r' a úhly ω a ω', pak platí vztah:

$$r^2 d\omega = r'^2 d\omega' = C dt,$$

kdež C znamená určitou konstantu.

Znamená-li Q a Q′ hodnoty tepelné energie, kterou slunce v době dt na zemi vrhá, pak bude

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{r'^2}{r^2}, \tag{I}$$

tak že platí rovnice

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{d\omega}{d\omega'}.$$

Rovnici tu možno psáti všeobecněji, jak následuje:

$$Q dt = k\, d\omega,$$

kdež k značí jakousi konstantu. Integrujme nyní od $t = 0$ až $t = T$ pro $\omega = 0$ až $\omega = 90^0$ (na př. od onoho bodu, kde začíná jaro, až ku konci jara) pak obdržíme:

$$\int_0^T Q dt = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega . \qquad \text{(II)}$$

Integral v pravo stojící nemění své hodnoty, čímž bude i prvý integral stálý v mezích odpovídajících mezím integralu druhého. Z toho soudíme, že *množství tepla*, které země v tom kterém období ročním obdrží od slunce, *jest od ročního období neodvislé a stejné.*

Patřme nyní na určitý element na povrchu země $d\varepsilon$. Elementem tím veďme přímku, která prochází sluncem a *na opáčném místě dráhy* protíná opět jeden element $d\varepsilon'$ povrchu země. Leží-li element $d\varepsilon$ na polokouli severní, leží $d\varepsilon'$ na jižní. Má-li $d\varepsilon$ jaro, má $d\varepsilon'$ podzim. Vzhledem k tomu, že platí pro oba elementy rovnice (I), praví rovnice (II), že oba elementy obdrží během oné doby, v které ω od 0 až 90^0 dospěje, stejné množství tepelné energie, t. j. během jara obdrží $d\varepsilon$ právě tolik energie tepelné, co $d\varepsilon'$ během podzimku. Integrací přes všechny elementy polokoule obdržíme větu:

Severní polokoule obdrží během jara tutéž teplotu, co jižní polokoule během podzimku, a vice versa. Totéž platí pro léto a zimu.

O geometrii neeuklidovské.*)

*Legendre***) byl prvým, který podal důkaz věty, že *součet tří úhlů rovinného trojúhelníka nemůže býti větší* 180^0. Dále dokázal***), že součet bude se rovnati 180^0 u všech, jestliže se důkaz pro jeden libovolný provede.

Lobačevskij †) dospěl k témuž úsudku a proto hleděl

---

*) Srovnej referát prof. A. Strnada o knize Killing „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“ str. 104. *Red.*

**) Geóm. Note 2.

***) Mém. de Paris 1833. p. 367.

†) Geometrische Untersuchungen.

pomocí velkých trojúhelníkův astronomických podati důkaz a posteriori. Podobně *Bolyai* v souhlase astronomických výpočtů s pozorováním vidí důkaz, aspoň potud, dokud sahá praktické upotřebení.

Gauss *) pomýšlel již roku 1792 na geometrii, kterou založiti hodlal na větě:

Součet tří úhlů v trojúhelníku jest menší než 180° a sice o veličinu, která jest jeho ploše úměrná.

Poněvadž nelze dokázati, že by součet všech úhlů nemohl menší býti než 180°, nezbývá nic jiného, než zkoumati, jak by poslední věta změnila geometrii Euklidovu.

Tím ovšem modifikujeme představu svou o prostoru a nazveme prostor, pro který uvedená věta platí, *prostorem Lobačevského.*

Riemann utvořil prostor, vycházeje z *věty, že součet tří úhlů jest větší než* 180°.

Máme tedy schema:

Prostor	*Součet úhlů S*	*Délka přímky*	*Zobrazení*
Euklid	$S = 180^0$	Nekonečná	Rovina
Lobačevskij	$S < 180^0$	Nekonečná	Plocha pseudosférická
Riemann	$S > 180^0$	Konečná	Koule.

Euklidovu theorii pojímá dobře soustava roviny, Riemannovu koule jako plocha stálého zakřivení positivního. Aby nalezl i pro Gaussovu theorii zobrazení, *Beltrami* **) sestrojil plochu pseudosférickou, t. j. plochu stejného zakřivení negativního. Jak si takovou máme představiti, podává Helmholz zajímavým způsobem ve své přednášce: Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. ***)

Lobačevskij odvozuje jako základní rovnici všech představ známou rovnicí trigonometrickou

$$\cos \varepsilon a = \cos \varepsilon b \cos \varepsilon c + \sin \varepsilon b \sin \varepsilon c \cos A,$$

kdež *abc* jsou strany a ABC úhly trojúhelníka.

---

*) Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. Ze dne 12. června roku 1831.

**) Saggio di inter. della Geom. non-euclidea. Giorn. math. 1868.

***) Vorträge und Reden II. Sv. p. 1.

Zde obdržíme veškeré relace geometrie Euklidovy, položíme-li

$$\lim \varepsilon = 1.$$

Theorie Lobačevského předpokládá

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{-1}}{|\varrho|},$$

kdež ϱ značí určitou konstantu.

Je-li konečně

$$\varepsilon = \frac{1}{|\varrho|},$$

pak máme základní větu pro prostor Riemannův.

Že však geometrie neeuklidovská jest nutným členem našich názorů geometrických, dokázal Klein *). Jak známo, rozlišeny byly vlastnosti obrazců dle toho, zda se při promítání mění čili nic. Vlastnosti polohy promítáním se nemění. To neplatí však všeobecně o vlastnostech metrických. Teprve když Cayley **) ve svém pojednání „Memoirs upon Quantics“ dokázal, že každá vlastnost metrická obsažena jest v projektivním vztahu obrazce ku pevné kuželosečce, nebylo třeba rozlišení svrchu uvedeného. Klein dokazuje l. c. souvislost bádání Cayleyových s geometrií neeuklidovskou.

Věstník literární.

Eléments de la théorie des Fonctions elliptiques par *Jules Tannery* et *Jules Molk.* Tome I. Introduction. — Calcul différentiel (Ire Partie). Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893.

Tento první ze čtyř svazkův, z nichž se celý spis bude skládati, věnován úvodu a první části oněch úvah o theorii elliptických funkcí, jež náležejí počtu differencialnému.

Úvodem, zabírajícím 132 strany, spis velice získal; po-

---

*) Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Ann. Svazek 4.

*) Phil. Trans. 149.