Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda

Několik úvah, hledících k osovému komplexu ploch druhého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 2, 100--108

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109288

uprostřed trojúhelníka abc k jeho rovině, nebyly souměrny dle roviny této, daly by se pětiúhelníky převésti na dva typy základní.

Všechny ostatní úvahy byly pak zcela obdobny těm, jež jsme právě vykonali; rovnice uvedené v odst. 4. a výrazy pro r a c ovšem nabývají pak tvarů složitějších.

Několik úvah, hledících k osovému komplexu ploch druhého stupně.

Napsal

Dr. **Ant. Sucharda**, t. č. ve Štrasburku.

Zabývaje se osovým komplexem plochy druhého stupně, připadl jsem na některé drobné úlohy, jejichž řešení si tuto dovoluji předložiti.

1. „Které jest geometrické místo polů os komplexního kužele plochy druhého stupně, jehož střed jest v některé rovině hlavní?"

Vycházejme od centrické plochy F^2, jejíž střed budiž v počátku o soustavy pravoúhlé, osy v osách souřadných. Jest známo*), že každým bodem r prostoru prochází obecně ∞^1 os této plochy a že tvoří tyto osy komplexní plochu kuželovou druhého stupně. Budeme ji krátce nazývati komplexním kuželem. Kužel ten jest recipročným útvarem parabolického svazku os, obsažených v rovině R, polarné jeho středu r. Poněvadž každý průměr plochy F^2 jest její osou, prochází kužel řečený též středem o plochy této, a poněvadž také všechny kolmice k hlavním rovinám plochy F^2 jsou osami, obsahuje kužel ten kolmice ku všem třem hlavním rovinám plochy F^2. Z toho následuje, že jest kuželem rovnostranným podle Schröterova označení. Snadno se dokáže, že se rozpadá ve dvě roviny, jestliže jeho střed r obsažen jest v některé z hlavních rovin plochy F^2. Víme totiž, že všechny přímky každé hlavní roviny náležejí k osovému komplexu plochy. Je-li tedy bod r v hlavní rovině na př. XY,

*) Reye, „Die Geometrie der Lage" III. vyd. 2. díl p. 142.

celý rovinný svazek přímek, určený v této rovině bodem r, náleží k plošným přímkám řečeného kužele. Zbývající část musí tedy býti také rovinná. Ježto pak, jak bylo již připomenuto, také všechny k hlavním rovinám kolmé přímky jsou přímkami komplexu, náleží k řečenému kuželi degenerujícímu též kolmice v bodě r k rovině XY vztyčená, tuto musí tedy obsahovati rovina M, jež tvoří druhou část kužele degenerujícího. Kužel ten rozpadá se tedy v případě řečeném ve dvě roviny k sobě kolmé, z nichž jednou jest ona hlavní rovina, v níž se nalézá jeho střed r, druhou rovina M.

Plošné jeho přímky skládají tedy dva svazky rovinné o středu r, z nichž každý obsažen v jedné z jmenovaných rovin. Hledejme geometrické místo polů přímek tohoto kužele, tedy bodů, jejichž polarné roviny vůči F^2 jsou k příslušným osám kolmy. Počněme svazkem v rovině XY obsaženým. V této rovině leží hlavní osy X, Y plochy F^2. S těmi jsou rovnoběžny přímky D a E svazku r. Jest patrno, že jen úběžnému bodu d_∞ osy D přísluší kolmá k ní rovina polarná, hlavní to rovina YZ, podobně pak úběžnému bodu e_∞ osy E hlavní rovina XZ k ní kolmá. Také jest zřejmo, že žádná jiná z os, obsažených v tomto svazku rovinném, nemá polu úběžného, konečně pak, že bod o jest polem osy $\overline{or}$. Hledané geometrické místo prochází tedy bodem o a má dva realné body úběžné. Jest na jevě, že neskládá se z přímek $\overline{oc_\infty}$ $\overline{od_\infty}$, neboť polům v těchto přímkách obsaženým příslušejí polarné roviny k nim kolmé, spolu tedy rovnoběžné, kdežto polarní roviny přímek svazku r rovnoběžny býti nemohou. Hledaným geometrickým místem jest tedy rovnoosá hyperbola H, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny s hlavními osami XY v rovině této obsaženými. Bodu r přísluší jako polu určitá rovina polarná vůči F^2, kolmá k rovině XY; kolmice bodem tím k oné polarné rovině jest onou osou O, jejímž polem jest sám bod r.

Zbývá určiti geometrické místo polů os, skládajících svazek v rovině M obsažený. V této příčině považme, že leží-li osy v rovině M, leží arci i jejich poly v této rovině, tudíž musí polarné roviny jim příslušné procházeti polem m roviny M.

Ježto pak M jest kolma k hlavní rovině XY, leží pol m v rovině této, poněvadž pak polarné ony roviny jsou kolmy k příslušným osám, musí se protínati v přímce F' bodem m jdoucí a k rovině M kolmé, tudíž v rovině XY obsažené. Dospíváme takto mimochodem k základní větě theorie konfokalních ploch druhého stupně, kterou lze takto vysloviti: Otáčí-li se rovina kol své průsečnice s hlavní rovinou plochy F^2, otáčí se sdružená normala kol pevného bodu hlavní roviny*). Možno nyní souditi dále: Ježto polarné roviny procházející přímkou F' v hlavní rovině ležící, musí příslušné poly vyplňovati recipročnou poláru F přímky F', tudíž kolmici k rovině XY, ovšem v rovině M obsaženou. Poněvadž konečně jedna z plošných přímek degenerujícího kužele, o němž tu jednáme, jest zároveň v rovinách XY a M, musí se její pol nalézati v obou geometrických místech H a F, tato se tedy protínají v bodě f. Abychom jej obdrželi, sestrojme polaru R bodu r vůči fokalní kuželosečce, obsažené v rovině XY. Kolmice K sestrojená k této polaře bodem r, jest stopou roviny M v rovině XY; přímka K jest osou příslušnou oběma rovinám, v níž kužel uvažovaný degeneruje, a její průsečík s hyperbolou H jest žádaným bodem f.

Lze tedy říci: „Geometrickým místem polů všech os pro„cházejících bodem r hlavní roviny XY jest rovnoosá hyperbola „H a přímka F. Hyperbola prochází středem o plochy F^2 a bodem „r, její asymptoty jsou rovnoběžny s hlavními osami plochy F^2 „v rovině XY obsaženými. Přímka F jest k rovině hyperboly „kolmá a seče tuto křivku v bodě f".

Hyperbola H bude dokonale určena, ustanovíme-li jen jediný ještě její bod. Toho nabudeme, sestrojíme-li k libovolné ose svazku r, obsaženého v rovině XY, pol vůči kuželosečce E, v níž F^2 rovinu tu seče, z toho kolmici k oné ose a k této pol u vůči křivce E. Myslíme-li si pak body s, u, r rovnoběžky k osám kuželosečky E, nabudeme dvou obdélníků, z nichž jeden má protější rohy o, r, druhý o, u; úhlopříčky těchto obdélníků, řečenými rohy neprocházející, protínají se ve středu žádané hyperboly**), kterou lze nyní pohodlně narýsovati.

Je-li plocha F^2 necentrická, tedy paraboloid, výsledek od-

---

*) Sr. Reye, ibid. p. 150.

**) Sr. Emil Weyr, Die Elemente der projectivischen Geometrie II. díl pag. 34.

vozený nedozná podstatné změny. Také zde jest žádané geometrické místo složeno z rovnoosé hyperboly H, která prochází bodem r a středem o, a z přímky F kolmé k této rovině a s onou hyperbolou se pronikající. Povšimnutí zde zasluhuje ta okolnost, že střed o nyní jest úběžným bodem osy paraboloidu a že proto tato osa jest jednou z asymptot hyperboly H. Sestrojení středu této hyperboly tím jest usnadněno.

Jest dále známo, že k přímkám osového komplexu plochy F^2 náležejí též všechny její normaly, a že jsou to ony, jejichž poly leží na ploše. Tehdy totiž sdružená normalná rovina osy, polarná to rovina polu vůči F^2, stává se tečnou rovinou v polu, osa tudíž normalou plochy. Z toho následuje, že lze z libovolného bodu r hlavní roviny XY sestrojiti ku ploše F^2 tolik normal, v kolika bodech křivka složená z hyperboly H a z přímky F seče tuto plochu.

Takých bodů jest šest a to jsou tedy paty řečených normal. Z bodů těch dva připadají do přímky F, ostatní čtyři náležejí kuželosečce E, v níž plocha F^2 proniká hlavní rovinu XY. Naskytá se tedy spolu řešení úkolu, sestrojiti z daného bodu r normaly kuželosečky E. Řešení vyžaduje rovnoosé hyperboly H, o jejímž sestrojení bylo mluveno. Z předešlého jest také patrno, že každému bodu hlavní roviny plochy F^2 přidružena jest takto určitá jím procházející rovnoosá hyperbola H.

Hyperboly tyto mají společnými body střed o plochy F^2 a úběžné body hlavních os, obsažené v řečené rovině hlavní, tvoří tedy síť. Je-li plocha F^2 paraboloidem, síť ta vyznamenává se tím, že dva z jejích tří vrcholů splývají v úběžném bodě hlavní osy tohoto paraboloidu, která všem hyperbolám jest společnou asymptotou.

2. „Které jest geometrické místo pat os degenerujícího komplexního kužele úlohy předešlé?“

Nalezše geometrické místo polů těchto os, snadno i tuto otázku zodpovíme. Hledané paty jsou tam, kde se osy protínají sdruženými rovinami normalnými, polarnými to rovinami oněch polů. Plocha F^2 budiž zase napřed centrická s osami v osách souřadných, se středem tedy v bodě o. Hleďme předem ku svazku r, obsaženému v hlavní rovině, kterou budiž zase rovina XY. Polarné roviny, jsouce kolmy k příslušným osám, jsou kolmy k rovině XY, a poněvadž poly vyplňují hyperbolu H, polarné roviny obalují válcovou plochu druhého stupně, jež seče rovinu XY v kuželosečce H', obalené polarami hyperboly H vůči kuželosečce E, v níž F^2 rovinu XY proniká. Hyperbola H prochází středem o plochy F^2, proto jedna z oněch polar jest úběžná, a křivka H' tedy parabolou. Poněvadž pak, jak v úloze 1. bylo pověděno, k polarným rovinám náležejí také hlavní roviny XZ a YZ, musí parabola H' dotýkati se obou os kuželosečky E.

Úpatnice L paraboly H' vůči bodu r jest tedy hledaným místem geometrickým. Jelikož k oněm dvěma tečnám paraboly H', jež si z bodu r k ní lze mysliti, příslušné paty do bodu r připadají, poznáváme, že hledaná úpatnice L má bod r bodem dvojným. Na každé přímce svazku r jest jen jediná ještě pata, poněvadž k parabole možná jest jen jediná vždy tečna určitého běhu, a z toho již následuje, že jest křivka L racionalnou křivkou třetího stupně o dvojném bodě r.

Zbývá určiti geometrické místo pat os, tvořících druhý svazek přímek, obsažený v rovině M. O těch však jest známo*), že naplňují kružnici K v této rovině obsaženou, která prochází bodem r a jest dle hlavní roviny XY souměrna. Druhý konec průměru bodem r počínajícího jest v přímce F', recipročné to polaře přímky F, o níž bylo v odst. 1. jednáno.

„Skládá se tedy geometrické místo hledaných pat z raci-
„onalné křivky L třetího stupně, obsažené v hlavní rovině XY,
„a z kružnice K, ležící v rovině M a procházející bodem r,
„v němž křivka L má bod dvojný“.

Pro případ, že daná plocha F^2 jest necentrická, výsledek nedozná podstatné změny; připomenouti možná jen vzhledem k parabole H', že její osa jest pak kolmá k hlavní ose plochy F^2, poněvadž tato jest, jak víme, asymptotou hyperboly H.

Na doplněnou úvah v odst. 1. a 2. vykonaných, povšimněme si ještě případu, kdy bod r jest v některé hlavní ose, na př. v ose X plochy F^2. Tehdy kužel komplexní degeneruje v hlavní roviny XY, XZ onou osou procházející. Osy tvoří dva rovinné svazky o středu r, z nichž jeden v rovině XY, druhý v rovině XZ se rozkládá. Geometrickým místem polů jsou tu tři přímky,

---

*) Reye, ibid. p. 150.

prvou z nich jest osa X, druhé dvě, U, V, jsou k ní kolmy a obsaženy prvá v rovině XY, druhá v rovině XZ. Spolu jsou mimoběžny. Geometrické místo pat těchto os snadno se najde. Polarné roviny, příslušné k polům v ose X obsaženým, tvoří osnovu rovin k této ose kolmých, příslušné jim paty vyplňují tedy osu X. Polarné roviny os svazku v rovině XY obsaženého přísluší polům přímky U, tvoří tedy svazek rovin, jehož osou jest kolmice k ose X v rovině XZ obsažená, příslušné paty vyplňují kružnici K v rovině XY, jež prochází bodem r, střed majíc v ose X. Podobně jest místem pat os svazku r v rovině XZ obsaženého, kružnice L v této rovině ležící, jež bodem r procházejíc, střed má v ose X.

„Hledané místo geometrické skládá se tedy z osy X „a z těchto dvou kružnic K a L, jež procházejí obě bodem r „této osy, na níž každá mají střed, ležíce v jedné z hlavních „rovin osou tou procházejících".

Věty v odst. 1. a 2. pronesené snadno jest přenésti na soustavu ploch konfokalních. Jeť známo, že poly libovolné roviny W vůči všem plochám konfokalním dané soustavy vyplňují přímku W k této rovině kolmou. Tato jest osou jí příslušnou v osovém komplexu, společném celé této soustavě.

Každému z těchto polů přísluší jediná plocha soustavy, společnými rovinami hlavními, k nimž i úběžná náleží, rovinou W a tímto polem určená. Volíme-li pol ten v patě kolmice W, příslušná plocha bude se v bodě tom dotýkati roviny řečené. Přímka W bude tedy v něm normalou této plochy. Z toho následuje, že jsou paty prve nalezené patami normal k jednotlivým plochám soustavy ploch konfokalních. Vzhledem k výsledkům prve obdrženým lze nyní říci:

„Normaly k soustavě konfokalních ploch druhého stupně „z libovolného bodu r některé hlavní roviny vyplňují dva rovinné „svazky, z nichž jeden v této rovině, druhý v jisté k ní kolmé „rovině se rozkládá. Paty prvých normal vyplňují racionalnou „křivku L stupně třetího, paty druhých určitou kružnici K. „Střed její jest v hlavní rovině a kružnice prochází bodem r, „jenž křivce L jest dvojnásobným. Tečné roviny konfokálních „ploch v těchto patách jednak obalují válcovou plochu parabo„lickou, kolmou k rovině křivky L, jednak tvoří svazek rovin,

„jehož osa jest kolmá k rovině kružnice K a obsažena v rovině „křivky L*). Je-li bod r v některé z hlavních os soustavy, nor- „maly vyplňují dva svazky, z nichž každý obsažen jest v jedné „z hlavních rovin tou osou procházejících. Jejich paty naplňují „tuto osu a pak dvě kružnice K a L bodem r procházející, „z nichž každá jest v jedné z oněch hlavních rovin, a jež mají „středy na oné hlavní ose. Tečné roviny ploch v těchto patách „naplňují jednak osnovu rovin kolmých k oné hlavní ose, jednak „dva svazky rovin, z nichž každý jest kolmý k rovině jedné „z obou kružnic, osu maje v rovině křivky druhé“.

3. „Určiti přímo osy kuželoseček A, v nichž libovolná rovina seče plochu F^2 stupně druhého, otáčejíc se kol svého průniku s některou rovinou hlavní“.

Budiž dána centrická plocha F^2 o středu o, s osami v osách souřadných, rovina R protínej ji v kuželosečce A, která nebudiž předem sestrojena. Snadno se dokáže, že osy těch kuželoseček na ploše F^2 ležících náležejí osovému komplexu plochy F^2**). Podávám toho důkaz následující: Budiž na ploše libovolná kuželosečka. Vrcholy jedné její osy buďte a, b, vrcholy druhé c, d. Tečné roviny plochy F^2 v bodech a, b protínají se v přímce U s $\overline{cd}$ rovnoběžné, tudíž k $\overline{ab}$ kolmé; $\overline{U}$ a ab jsou tedy recipročnými polarami vůči F^2, a jsouce k sobě kolmy, jejími osami. Opakujeme-li úvahu tuto, vycházejíce od přímky $\overline{cd}$, zcela obdobně se přesvědčíme, že jest přímka tato kolma ku své polaře reciproční a tudíž také osou komplexu. Řešení úkolu předloženého vyžaduje tedy, vyhledati v rovině R ony dvě přímky komplexu, jež jsou k sobě kolmy. Jest však známo***), že přímky komplexu osového plochy F^2, jež v libovolné rovině R jsou obsaženy, obalují parabolu P, jež se dotýká hlavních rovin dané plochy. Mezi tečnami oné paraboly jsou tedy žádané osy obsaženy. Z těch nutno vytknouti ony dvě, jež procházejí středem s průsečné kuželosečky A. Střed tento leží ve sdruženém průměru $\overline{or}$ roviny R, k jehož sestrojení třeba nalézti pol r roviny této.

*) Sr. Chasles-Sohncke, Geschichte der Geometrie p. 434., kde toto vysloveno jest bez důkazu.

**) Reye, ibid. p. 140.

***) Reye, ibid. p. 142.

Předpokládáme-li, že hlavní křivky plochy F^2, v rovinách XY a XZ ležící, jsou zobrazeny, rovněž tak i stopy sečné roviny, v žádném případě nevyžaduje konstrukce polu r více než sestrojení tří tečen těchto křivek. Poněvadž středem s procházející tečny paraboly P jsou k sobě kolmy, lze o bodě s ještě poznamenati, že leží na její přímce řídící.

O parabole P bylo již pověděno, že se dotýká hlavních rovin F^2. Stopy M, N, P roviny R v těchto rovinách jsou tedy již třemi jejími tečnami. Čtvrtá jest, jak známo, úběžná, zbývá tedy jen ještě jedinou, Q, v konečnu stanoviti. Ta jest jako všechny ostatní osou plochy F^2 a obdrží se nejsnáze jako recipročná polara osy Q' bodem r procházející a k rovině R kolmé. Polarná rovina úběžného bodu této osy Q', již snad nejsnáze sestrojíme jako rovnoběžnou k tečné rovině bodu, v němž přímka $\overline{or}$ proniká plochu F^2, seče rovinu R v žádané páté tečně Q paraboly P. Zbývá nyní ještě z bodu s sestrojiti tečny k parabole této, dané tečnami $MNPQ$. Úkol ten řeší se známou konstrukcí nové geometrie, která vyžaduje jediné pomocné kružnice. Budiž ještě připomenuto, že tečna Q, jsouc recipročnou polarou osy Q', jest také polarou její paty q' v rovině R; nalezenými osami $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, přímkou Q a jejím polem q' jest pak kuželosečka A dokonale určena.

Hleďme vyšetřiti, kterak se vyjímá řešení úkolu předloženého, otáčí-li se rovina R kol své průsečnice s hlavní rovinou. Tou budiž druhá stopa N v hlavní rovině XZ.

Tažme se především, které jest geometrické místo parabol P, obsažených v rovinách svazku N.

Bylo již v odst. 1. k tomu poukázáno, že osy plochy F^2, jež procházejí libovolným bodem hlavní roviny, v ní však nejsou obsaženy, vyplňují rovinný svazek v určité rovině M, kolmé k rovině hlavní. Máme-li tedy v libovolné rovině R čtyři tečny M, N, P, Q paraboly P, tehdy tečny M, P, Q protínají hlavní rovinu XZ v bodech čtvrté tečny N. Otočí-li se rovina R kol přímky N, otočí se tudíž tečny ony kol svých proniků s přímkou N ve svých k rovině XZ normalných rovinách promítacích. Promítacími rovinami tečen M a P jsou tu ovšem hlavní roviny XY a YZ. Z toho však následuje, že řečené paraboly vyplňují válcovou plochu V kolmou k hlavní rovině XZ*), jež přímky N a hlavních rovin XY a YZ se dotýká. Průmět jedné z oněch parabol v rovinu XZ je tedy též průmětem plochy V.

Určeme nyní geometrické místo středu kuželoseček A, v nichž roviny R svazku N protínají plochu F^2. Bylo již řečeno, že tyto středy leží ve sdruženém průměru $\overline{or}$ roviny R. Poněvadž rovina R otáčí se kolem své stopy N, musí poly r naplňovati její recipročnou polaru, přímku to N' k rovině XZ kolmou. Přímky $\overline{or}$ tvoří tedy rovinný svazek v průměrové rovině S přímkou N' procházející, tedy kolmé k rovině XZ. Rovina S jest sdružena směru N. V ní jest hledané geometrické místo středů s. Rovina tato proniká svazek N rovin R v rovinném svazku přímek, jehož střed t jest na přímce N. Svazek ten jest promětný se svazkem přímek $\overline{or}$, jehož středem jest bod o. Naplňují tudíž středy s kuželosečku K v rovině S obsaženou, jež v bodech o a t má protější vrcholy. Přímkou $\overline{ot}$ křivka K v rovinu XZ se orthogonalně promítá. Každá rovina R svazku N seče kuželosečku K po vytčení stálého bodu t jen ještě v jediném bodě proměnlivém i a válcovou plochu V v určité parabole. Bodem i procházející tečny k této křivce průsečné jsou již osami kuželosečky A, v níž rovina R proniká plochu F^2.

Sestrojíme-li tedy jednou pro vždy druhé obrazy jedné z parabol P, tedy parabolickou čáru P_2, jež dotýká se přímých čar $X_2\ Z_2\ N_2$ předem daných a přímé čáry Q_2, již lze sestrojiti způsobem prve uvedeným, bude P_2 již obrazem plochy V. Obě tečny vedené z libovolné podstatné tečky i_2 na přímé čáře $\overline{o_2\, t_2} \equiv K_2$ ležící, budou již druhými obrazy obou os kuželosečky A, v níž rovina $R \equiv (Ni)$ plochu F^2 protíná.

„Osy takto zobrazené naplňují plochu mimosměrek sou- „měrnou dle hlavní roviny XZ. Plocha tato má dvojnásobnou „kuželosečku K a trojnásobnou přímku N. V rovině kuželosečky „K má ještě jedinou přímku jednoduchou, tečnu této křivky „v bodě t. Jest to plocha pátého stupně“.

*) Reye, ibid. p. 144.