Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vojtěch Jäger

Řešení rovnic VII. stupně

$$x^7\pm 7px^5 + 14p^2x^3\pm 7p^3x + q = 0$$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 3, 121--124

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109279`

V B sestrojíme normalu na stálou asymptotu, učiníme $BH = lm$ (lm vyčteme z tabulek). $OJ \perp OH$, čímž $BJ = u$, Chceme-li sestrojiti hyperbolu pro soustavu o základě m, opíšeme nad OB půlkruh, jakož i nad OD (obr. 4).

neboť $\overline{OB}^2 = 1\ BH.JB.\ JB = \frac{1}{BH} = \frac{1}{lm} = M$. Dále učiníme $BK = BJ$ obloukem. Bodem B vedeme rovnoběžku s OK, až protne kruh větší, čímž dostaneme vrchol A_m, OA_m je osou realnou hyperboly odpovídající soustavě m.

Pořadnice y hyperbol jsou stejné, $x = OP$ též stejné, proto se nalézají body hyperbol pro úsečku $x = \overline{OB}$ v půlkruhu, opsaném ze středu P poloměrem PM, který se rovná pořadnic pro specialný případ rovnostranné hyperboly. Užijeme-li této věty, můžeme snadno z hyperboly rovnostranné odvodit body hyperboly o vrcholu A_m a ose realně OA_m.

V obrazci 4. je věc provedena pro soustavu Briggickou, tu je $\sin 2\alpha_{10} = 0{\cdot}434294 \ldots = u$ tedy $2\alpha_{10} = 25^0 44' 24'' 4$.

Tím je zajímavý význam geometrický modulů logaritmických soustav objasněn.

Řešení rovnic VII. stupně

tvaru $x^7 \pm 7p\,x^5 + 14p^3 x^3 \pm 7p^3 x + q = 0$.

Sepsal

Vojtěch Jäger v Něm. Brodě.

1. Srovnáme-li identickou rovnici

$$[\alpha_1 + \alpha_2)^7 - 7\alpha_1\alpha_2[\alpha_1 + \alpha_2]^5 + 14\alpha_1^2\alpha_2^2[\alpha_1 + \alpha_2]^3$$
$$- 7\alpha_1^3\alpha_2^3[\alpha_1 + \alpha_2] - (\alpha_1^7 + \alpha_2^7) = 0$$

s hořejší danou, platí pro

$$x = \alpha_1 + \alpha_2$$

podmínky

$$-\alpha_1\alpha_2 = \pm p \quad \text{čili } \alpha_1^7\alpha_2^7 = \mp p^7$$
$$-(\alpha_1^7 + \alpha_2^7) = q \quad \text{„} \ \alpha_1^7 + \alpha_2^7 = -q$$

z nichž následuje, jak patrno

$$\alpha_1 = \sqrt[7]{1}\sqrt[7]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \pm p^2}}$$

$$\alpha_2 = \sqrt[7]{1}\sqrt[7]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \pm p^7}}$$

Jelikož součin

$$\alpha_1\,\alpha_2 = (\sqrt[7]{1})\,\alpha_1 \times (\sqrt[7]{1})\,\alpha_2$$

dle podmínky hořejší realní veličinu ($\mp p$) tvoří, nutno jen takové dvě a dvě hodnoty sedmé odmocniny jednotky vzíti, jejichž součin jest *kladnou* jednotkou, tudíž

$$+1 \quad \text{s} \quad +1$$

$$\left(\cos\frac{2\pi}{7} \pm i \sin\frac{2\pi}{7}\right) \text{ s } \left(\cos\frac{2\pi}{7} \mp i \sin\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$\left(\cos\frac{4\pi}{7} \pm i \sin\frac{4\pi}{7}\right) \text{ s } \left(\cos\frac{4\pi}{7} \mp i \sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$\left(\cos\frac{6\pi}{7} \pm i \sin\frac{6\pi}{7}\right) \text{ s } \left(\cos\frac{6\pi}{7} \mp i \sin\frac{6\pi}{7}\right);$$

kořeny rovnice jsou pak, označíme-li oněch sedmero hodnot sedmé odmocniny jednotky krátce dle postupu

$$+1,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,\ J_5,\ J_6$$

pro $q \gtrless O$ tyto

$$(a)\begin{cases} x_{\text{I.}} = \alpha_1 + \alpha_2 = \sqrt[7]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \pm p^7}} \\ \qquad\qquad + \sqrt[7]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \pm p^7}} \\ x_{\text{II.}} = J_1\,\alpha_1 + J_2\,\alpha_2;\ x_{\text{III.}} = J_2\,\alpha_1 + J_1\,\alpha_2;\ x_{\text{IIII.}} = J_3\,\alpha_1 + J_4\,\alpha_2 \\ x_{\text{V.}} = J_4\,\alpha_1 + J_3\,\alpha_2;\ x_{\text{VI.}} = J_5\,\alpha_1 + J_6\,\alpha_2;\ x_{\text{VII.}} = J_6\,\alpha_1 + J_5\,\alpha_2 \end{cases}$$

při čemž platí znaménka *hořejší* pro p *kladné* a *dolejší* pro p *záporné.*

2. Je-li ve zvláštním případě

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 < p^7$$

objeví se kořeny rovnice

$$x^7 - 7\,p\,x^5 + 14\,p^2x^3 - 7\,p^3x + q = 0$$

v podobě imaginární

$$x = \sqrt[7]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{p^7 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[7]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{p^7 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

Dosadíme-li do rovnice poslední

$$\frac{q}{2} = \sqrt{p^7} \cos\varphi$$

obdržíme z ní napřed

$$x = -\sqrt{p}\,[(\cos\varphi - i \sin\varphi)^{\frac{1}{7}} + (\cos\varphi + i \sin\varphi)^{\frac{1}{7}}]$$

a po odstranění imaginárních členů pomocí vzorce Moivre-ova

$$x = -2\sqrt{p} \cos\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{7}\right),$$

kdež n libovolné celé číslo znamená.

Jelikož $\cos\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{7}\right)$ jen *sedmero* od sebe rozdílných hodnot dává, jež se obdrží, vsadí-li se tam za n postupně 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, jest sedm vesměs realných kořenů rovnice

$$x^7 - 7px^5 + 14p^2x^3 - 7p^3x + q = 0$$

$$\text{pro } \left(\frac{q}{2}\right)^2 < p^7$$

$$(b)\left\{\begin{array}{l}
x_{\text{I.}} = -2\sqrt{p}.\cos\frac{\varphi}{7} \\
x_{\text{II.}} = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{7} + 51^0 25' 42{\cdot}857''\right) \\
x_{\text{III.}} = +2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{7} - 77^0 8' 34{\cdot}2857''\right) \\
x_{\text{IIII.}} = +2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{7} - 25^0 42' 51{\cdot}428''\right) \\
x_{\text{V.}} = +2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{7} + 25^0 42' 51{\cdot}428''\right) \\
x_{\text{VI.}} = +2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{7} + 77^0 8' 34{\cdot}2857''\right) \\
x_{\text{VII.}} = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{7} - 51^0 25' 42{\cdot}857''\right)
\end{array}\right.$$

Stejným způsobem dají se i podobné rovnice vyšších stupňů řešiti, pokud obsahují jen dva libovolné koëfficienty p q, jako na př. rovnice

$$x^9 \pm 9px^7 + 27p^2x^5 \pm 30p^3x^3 + 9p^4x + q = 0;$$

všeobecný vzorec tu jest

$$x = \sqrt[n]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \pm p^n}} + \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \pm p^n}},$$

kterýž pro $n = 3$ obsahuje v sobě známý vzorec *Cardanův*, řešící rovnice stupně třetího, jež možná vždy uvésti na tvar obecný

$$x^3 \pm 3px + q = 0.$$

Co platí zde všeobecně, platí při vyšších rovnicích jen v případech zcela zvláštních.

Vypočítávání trojúhelníku, dány-li jsou tři strany nebo dvě strany a úhel jimi sevřený.

Podává

Augustin Pánek.

1. Nazveme-li při trojúhelníku libovolném ABC (obr. 5.) strany a, b, c, úhly protilehlé α, β, γ a prodloužíme-li na př. stranu $AC = b$, aby $CD = CB = a$, a vedeme-li konečně spojnici BD, obdržíme dle Carnotovy věty

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 - 2 \, . \, \overline{AD} \, . \, \overline{DB} \, . \cos \frac{\gamma}{2} \, .$$

Poněvadž

$$AD = AC + CD = b + a,$$

$$DB = 2a \cos \frac{\gamma}{2},$$

nabude svrchní věta tvaru

$$c^2 = (b + a)^2 + 4a^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 4(b + a)\, a \cos^2 \frac{\gamma}{2}$$

anebo

$$c^2 = (b + a)^2 - 4ab \cos^2 \frac{\gamma}{2} \, . \qquad \text{(I)}$$

Ze vzorce (I) plyne

$$\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(b + a)^2 - c^2}{4ab} = \frac{1}{4ab} \, . \, D_1 \, D_2,$$