Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bedřich Procházka

Konstrukce tečny ke křivce vlastního stínu na plochách rotačních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 1, 1--8

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109265`

Konstrukce tečny ke křivce vlastního stínu na plochách rotačních.

Napsal prof. **Bedřich Procházka.**

1. Je-li druhá průmětna rovnoběžna s meridiánem M plochy rotační obsahujícím svítící bod s, můžeme konstrukcí *Wienerovou* *) sestrojiti druhé průměty bodů křivky vlastního stínu bez použití průmětu prvého.

Dle této konstrukce sestrojíme, zvolivše za příčinou jednoduššího označení za 2. průmětnu rovinu meridiánu M, druhý průmět bodu d křivky stínu vlastního, který leží na kružnici K, vytvořené bodem a tohoto meridiánu, následujícím způsobem.

Tečna T a normála N k meridiánu v bodu a sestrojené protínají osu O v bodech t a n, respektive středech plochy kuželové a kulové, kteréž se plochy rotační dle kružnice K dotýkají; kolmice nd_2 s bodu n ku přímce st spuštěná protíná průmět K_2 v hledaném 2. průmětu bodu d. Neboť st jest společnou druhou stopou obou rovin tečných a bodem s ku ploše kuželové sestrojených, kteréž také plochy kulové — každá v jednom bodě kružnice K se dotýkají, a na stopě st stojí kolmo průmět obou poloměrů plochy kulové směřující k dotyčným bodům, jichž průměty se v bodu d_2 stotožňují.

Tečnu ke křivce stínu vlastního lze sestrojiti pomocí vět *o křivosti ploch a jejich průseků.* Tak ji sestrojuje *de la Gournerie* **) jakožto *sdruženou tečnu* k paprsku světelnému pomocí průmětu indikatrixy sestrojené z hlavních poloměrů křivosti

---

*) *Dr. Christian Wiener*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Lipsko 1887, II. svazek, str. 184.

**) *De la Gournerie*, Traité de géométrie descriptive, 2e edition, 3e partie, 1885, p. 66.

plochy rotační. *Staudigl**) používá však souosé rotační plochy 2. stupně, která původní plochu rotační dle kružnice oskuluje. Pan *professor Pelz***), podal konstrukci středu této plochy oskulující použiv paraboly *Steiner-Pelzovy* a zjednodušil sestrojení průmětu tečny. *Dr. Wiener* tuto konstrukci *Pelzovu* přejav do svého díla***) a sestrojení 2. průmětu tečny poněkud zjednodušiv na jiném místě†) sestrojuje bez použití theorie křivosti ploch tečnu ke křivce vlastního stínu pomocí *vztahu podobných obrazců* a dospívá k následní konstrukci průmětu tečny v bodu d křivky vlastního stínu:

Protnouce přímkou ss', vedenou bodem svítícím s rovnoběžně k ose O, druhý průmět kružnice K v bodu s', spojme jej s patou c kolmice ac spuštěné s bodu a na kolmici ov vedenou s příslušného středu křivosti o meridiánu M na osu O. Průsečík f této spojnice s osou O spojme s bodem a, a přímkou touto af a dříve sestrojenou přímkou nd_2 protněme přímku ov v bodě j resp. g. Body těmito j a g veďme rovnoběžky s O, respektive s přímkou no, kteréž se protínají v bodě k, jímž veďeme přímku $kb \perp no$ a protínající přímku ov v bodu b, jenž s bodem d_2 určuje hledanou tečnu k 2. průmětu křivky stínu vlastního.

2. Uvedená konstrukce Wienerova 2. průmětu bodu d křivky vlastního stínu vede nás však také k sestrojení 2. průmětu tečny této křivky, použijeme-li *zásad geometrie kinematické*.

Myslíme-li si, že se bod a v meridiánu M nekonečně málo pošinul, pošine se nekonečně málo i průmět K_2, tečna $T \equiv at$, přímka st, normála $N \equiv ao$, a tím i bod n a jím procházející přímka ng, která při svém pohybu k otáčející se přímce st stále kolma zůstává. Stanovíce pohyb přímek K_2 a ng budeme moci stanoviti i rychlost jejich bodu průsečného d_2 jakožto hledanou tečnu k 2. průmětu křivky vlastního stínu.

---

*) *Staudigl*, Bestimmung von Tangenten an die Selbstschattengrenze von Rotationsflächen; Sitzungsberichte der Ak. d. Wiss. in Wien B. 68, Abth. 2.

**) *Carl Pelz*, Die Tangentenbestimmung der Selbstschattengrenze von Rotationsflächen; Sitzungsberichte der Ak. d. Wiss. in Wien B. 79, Abth. 2, 1879, S. 471.

***) Dr. Ch. Wiener, Lehrb. der darstell. Geom., Lipsko, 2. sv., str. 556.

†) Tamtéž str. 185.

Zvolme, za rychlost bodu a pohybujícího se v křivce M na př. délkou $a\,{}^1a$ (${}^1a$ budiž průsečík tečny T s přímkou $ov \perp O$). Při tom pohybu otáčí se tečna at určitou rychlostí, jejíž velikost vyjádříme rychlostí $t\,{}^1t$ bodu t tím, že s bodu a spuštěnou kolmicí ku $o\,{}^1a \equiv ov$ omezíme přímku $t\,{}^1t \perp at$.*) Z rychlosti té odvodíme si rychlost $\overline{t\,{}^2t}$, kterou se bod t, jakožto průsečík tečny at s osou otáčení O v této přímce pohybuje, vedouce bodem ${}^1t$ přímku ${}^1t\,{}^2t \parallel at$, kteráž osu O v bodu ${}^2t$ protíná. Na rychlosti pohybu tohoto bodu t v ose O jest závislý pohyb otáčení přímky st, jehož rychlost si vyjádříme délkou $t\,{}^3t$ jakožto rychlostí bodu t při tomto pohybu tím, že přímku $t\,{}^3t \perp st$ omezíme přímkou ${}^2t\,{}^3t \parallel st$. Úhlem $ts\,{}^3t = \omega$ vyjádřena jest potom úhlová rychlost otáčení přímky st, jíž použijeme při stanovení pohybu přímky nd_2, kteráž procházejíc bodem n stále kolma zůstává k otáčející se přímce st.

Při pošinutí bodu a v tečně at rychlostí $\overline{a\,{}^1a}$ otáčí se bod n normály oa rychlostí $n\,{}^1n$, kterou obdržíme, jestli přímku $n\,{}^1n \perp on$ omezíme spojnicí $o\,{}^1a \equiv ov$. Z této rychlosti $n\,{}^1n$ bodu n odvodíme si rychlost $n\,{}^2n$, kterou se týž bod n jakožto průsečík normály on s osou O v této přímce šine, protnouce osu přímkou ${}^1n\,{}^2n \parallel on$.

Přímka $nd_2 \equiv ng$ se však současně — zůstávajíc stále kolma ku přímce st — otáčí nahoře stanovenou rychlostí úhlovou představenou úhlem $\omega = ts\,{}^3t$ a přijde do polohy $n\,{}^1d_2 \perp s\,{}^3t$. Délkou $\overline{d_2\,{}^1d_2} \perp nd_2$ bude vyjadřena rychlost bodu d_2 při tomto otáčení. Tato rychlost $d_2\,{}^1d_2$ druží se ku dříve stanovené rychlosti $n\,{}^2n$ bodu n v ose O, kterou tedy připojíme k této rychlosti tím, že vedeme ${}^2n\,{}^3n \# d_2\,{}^1d_2$. Spojnice $n\,{}^3n$ jest potom výslední rychlost bodu n.

Vedeme-li nyní bodem ${}^1a$ rovnoběžku ke K_2 stotožňující se s přímkou ov a bodem ${}^3n$ rovnoběžku k nd_2, protínají se tyto přímky v bodu b, který s bodem d_2 stanoví rychlost $\overline{d_2 b}$ bodu d_2, jakožto tečnu k 2. průmětu křivky vlastního stínu.

Správnost této konstrukce lze odůvodniti tím, že vzdálenost pomocného bodu b od bodu g, v němž přímka ov přímku nd_2

*) Rozpravy České Akademie. Ročn. III. Třída II. čís. 19.: Kinetický způsob sestrojování tečen a středu křivosti křivek 2. stupně.

protíná, jest právě taková, jaká konstrukcí *Wienerovou* *) dosažena byla.

Označíme-li poloměr křivosti meridiánu M v bodu a $\overline{oa} = r$, vzdálenost $\overline{sh}$ bodu s od osy O písmenem l, $\overline{ov} = m$, $ea = vc = x$ **), $\sphericalangle voa = \varphi$ a $\sphericalangle sth = \lambda$, potom plyne z pravoúhlého trojúhelníka aet:

$$\overline{at} = \frac{x}{sin\,\varphi}; \tag{1}$$

z konstrukce bodů ${}^1t$ a ${}^2t$ a z pravoúhlého trojúhelníka atn patrno, že

$$\overline{t^2t} = \overline{a^1t} = \overline{nt} = \frac{\overline{at}}{cos\,\varphi}$$

a po dosazení hodnoty za $\overline{at}$ z rovnice (1)

$$\overline{t^2t} = \frac{x}{sin\,\varphi\,cos\,\varphi}. \tag{2}$$

Z pravoúhlého trojúhelníka t^2t^3t plyne se zřetelem k rovnici (2)

$$\overline{t^3t} = \overline{t^2t}\,sin\,\lambda = \frac{x\,sin\,\lambda}{sin\,\varphi\,cos\,\varphi}. \tag{3}$$

Úhel ω, jímž vyjádřena rychlost otáčení přímky at, určíme si z pravoúhlého trojúhelníka st^3t po dosazení hodnoty za $\overline{t^3t}$ z rovnice předcházející a hodnoty za $\overline{st}$ z pravoúhlého trojúhelníka sth . . . $st = -\frac{l}{sin\,\lambda}$ ***)

$$tg\,\omega = \frac{\overline{t^3t}}{\overline{st}} = -\frac{x\,sin\,\lambda^2}{l\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi}. \tag{4}$$

V trojúhelníku pravoúhlém nvo jest

$$\overline{no} = \frac{m}{cos\,\varphi}, \tag{5}$$

---

*) Dr. Ch. Wiener, Lehrb. d. darst. Geometrie. II. sv., str. 188.

**) Bod e jest středem kružnice K.

***) Délka l béře se za negativnou vzhledem k délce x na opačné straně osy O se nalézající.

a proto, jak zřejmo z pravoúhlého trojúhelníka $n v^1 n$,

$$\overline{n^1 n} = \overline{no}\, tg\, \varphi = \frac{m\, tg\, \varphi}{cos\, \varphi}$$

a z pravoúhlého trojúhelníka $n^1 n^2 n$

$$\overline{n^2 n} = \frac{\overline{n^1 n}}{cos\, \varphi} = \frac{m\, tg\, \varphi}{cos\, ^2\varphi}. \tag{6}$$

Se zřetelem k tomu, že v pravoúhlém trojúhelníku $n d_2 {}^1d_2$ jest $\sphericalangle\, d_2 n^1 d_2 = \omega$ a že $\overline{nd_2} = \frac{\overline{ne}}{sin\, \lambda}$ a že vzhledem k trojúhelníku nae jest $ne = x\, tg\, \varphi$ a tudíž $nd_2 = \frac{x\, tg\, \varphi}{sin\, \lambda}$, plyne:

$$\overline{d^1 d_2} = \overline{nd_2}\, tg\, \omega = \frac{x\, tg\, \varphi}{sin\, \lambda}\, tg\, \omega,$$

a po dosazení hodnoty za $tg\, \omega$ z rovnice (4)

$$\overline{d^1 d_2} = -\frac{x\, tg\, \varphi}{sin\, \lambda} \cdot \frac{x\, sin\, \lambda^2}{l\, sin\, \varphi\, cos\, \varphi} = -\frac{x^2\, sin\, \lambda}{l\, cos^2\, \varphi}. \tag{7}$$

Vedeme-li bodem ${}^2n$ přímku ${}^2nq \,||\, ng$, můžeme pokládati délku bg za klinogonálný průmět lomené čáry $n^2 n^3 n$. Délka $\overline{bg}$ skládá se potom z délky $\overline{qg}$ jakožto průmětu délky $\overline{n^2 n}$ a délky $\overline{bq}$ jakožto průmětu délky $\overline{{}^3n^2 n} = \overline{{}^1d_2 d_2}$, tedy

$$\overline{bg} = \overline{qg} = \overline{bq}.$$

Z konstrukce této patrno, že vzhledem k rovnicím (6) a (7)

$$\overline{qg} = \frac{\overline{n^2 n}}{tg\, \lambda} = \frac{m\, tg\, \varphi}{cos^2\, \varphi\, tg\, \lambda}$$

a

$$\overline{bq} = \frac{\overline{{}^2n^3 n}}{sin\, \lambda} = \frac{\overline{d_2 {}^1d_2}}{sin\, \lambda} = -\frac{x^2\, sin\, \lambda}{l\, cos^2\, \varphi\, sin\, \lambda} = -\frac{x^2}{l\, cos\, ^2\varphi}$$

a tudíž

$$\overline{bg} = \overline{qg} + \overline{bq} = \frac{m\, tg\, \varphi}{cos^2\, \varphi\, tg\, \lambda} - \frac{x^2}{l\, cos^2\, \varphi} = \frac{1}{cos^2\, \varphi}\left(\frac{m\, tg\, \varphi}{tg\, \lambda} - \frac{x^2}{l}\right).$$

Obdrželi jsme tedy pro $\overline{bg}$ týž výraz, který docílil *Wiener* na dříve citovaném místě pro touž délku na základě své konstrukce tečny ku 2. průmětu křivky vlastního stínu.

Z toho vyplývá, že sestrojíme tečnu pomocí geometrie kinematické následní konstrukcí:

Učiníme na ose O délku $\overline{t^2t} = \overline{nt}$; bodem ${}^2t$ vedenou přímkou ${}^2t^3t \parallel st$ omezíme ve přímce $t^3t \perp st$ úsečku $\overline{t^3t}$. Přímkou $n^1n \perp no$ protne se přímka ov v bodě ${}^1n$, kterým se sestrojí přímka ${}^1n^2n \parallel no$, protínající osu O v bodu ${}^2n$. Bodem d_2 vedenou přímkou $d_2{}^1d_2 \perp ng$ omezíme přímku $n^1d \perp s^3t$, a na přímce ${}^2n^3n \parallel d_2{}^1d_2$ naneseme úsečku $\overline{{}^2n^3n} = \overline{d_2{}^1d_2}$ a konečně vedeme obdrženým bodem ${}^3n$ přímku ${}^3nb \parallel ng$ protínající přímku ov v bodě g, který určuje s bodem d_2 tečnu k 2. průmětu křivky vlastního stínu plochy rotační.

Konstrukce této do jisté míry zjednodušené lze použíti i když bod d leží na meridiánu hlavním anebo když jeho průmět d_2 padá do osy O.

3. Konstrukce tato však, jak snadno lze se přesvědčiti, nepovede nás k cíli ani při sestrojení d_2 ani jeho tečny v tom případě, když bod d leží na nejmenší nebo největší kružnici plochy rotační.

V tomto případě poslouží nám konstrukce *de la Gournerieova* *) bodu d_2, jíž můžeme s pomocí geometrie kinematické i k sestrojení průmětu tečny použíti.

Konstrukce tato záleží v tom, že bod s spojíme s bodem a přímkou protínající osu O v bodu f. Průsečík k tečny ta s přímkou $sh \perp O$ spojíme s bodem f přímkou kf průmět K_2 v bodu d_2 protínající. **)

Také této konstrukce můžeme použíti k sestrojení 2. průmětu tečny ke křivce vlastního stínu ploch rotačních s pomocí zásad geometrie kinematické.

Myslíme-li opět, že se bod a nekonečně málo v meridiánu M pošine, pohybuje se zároveň i průmět K_2, tečna at a přímka sa se nekonečně málo otočí, tím také body k a f (v nichž tečna at přímku sh, respekt. osu O protíná), na jejichž pošinutí pohyb přímky kf závisí. Stanovíce pohyb přímek K_2 a kf budeme moci

---

*) *Jules de la Gournerie:* Traité de géométrie descriptive. 2e edit., IIe partie, p. 14.

**) Shoda této konstrukce s konstrukcí *Wienerovou* odůvodněna ve spise téhož autora: Lehrbuch d. darst. Geometrie, II. sv., str. 185.

stanoviti i rychlost jejich bodu průsečného d_2, jakožto hledané tečny k 2. průmětu křivky vlastního stínu.

Zvolme si rychlost $\overline{a^1a}$ bodu a v tečně at k meridiánu v tomto bodu sestrojené. Při tomto pohybu šine se rovnoběžně zároveň s bodem a průmět K_2 s touže rychlostí $\overline{a^1a}$ a tečna $\overline{at}$ se určitou rychlostí otáčí. Rychlost otáčení této přímky vyjadříme rychlostí otáčení $\overline{k^1k}$ jejího bodu k tím, že s bodu a spustíme kolmici a^1k ku přímce o^1a, kteráž přímku k^1k v bodu ^1k omezuje. *) Z rychlosti té odvodíme rychlost $\overline{k^2k}$, kterou se pohybuje bod k jakožto průsečík tečny at s přímkou kh v této přímce, vedouce $^1k^2k \parallel at$. Jelikož tímto bodem k zároveň prochází přímka kf, o jejíž pohyb nám jde, odvodíme rychlost $\overline{k^3k}$, kterou se pohybuje bod k jakožto bod této přímky při otáčení svém, omezíce $k^3k \perp kf$ přímkou $^2k^3k \parallel kf$.

K úplnému stanovení pohybu přímky kf třeba ještě stanoviti rychlost pohybu bodu f, jakožto průsečíku přímky sa kol bodu s se otáčející s osou O. Proto z rychlosti $\overline{a^1a}$ bodu a odvodíme si rychlost $\overline{a^2a}$, kterou se bod a při tomto otáčení pohybuje, omezíme-li $a^2a \perp sa$ přímkou $^1a^2a \parallel sa$. Z rychlosti té odvodíme rychlost otáčení $\overline{f^1f}$ bodu f, omezíme-li $f^1f \perp sf$ přímkou s^2a. Na rychlosti té závisí rychlost $\overline{f^2f}$, kterou se bod f jakožto průsečík přímky sf s osou O po této šine, a obdržíme ji, vedeme-li přímku $^1f^2f \parallel$ s přímkou sf. Z této rychlosti bodu f odvoďme rychlost $\overline{f^3f}$ téhož bodu, avšak onu, která mu náleží při otáčení přímky kf, tím že $f^3f \perp kf$ omezíme přímkou $^2f^3f \parallel kf$. Bodu d_2 přímky kf náleží potom při otáčení přímky kf rychlost $\overline{d_2{}^1d_2}$, kterou obdržíme omezením přímky $d_2{}^1d_2 \perp kf$ přímkou $^3k^3f$. Vedeme-li konečně bodem ^1a přímku $^1K_2 \parallel K_2$ a bodem $^1d_2$ přímku $^1d_2{}^2d_2 \parallel kf$, obdržíme v průsečíku $^2d_2$ bod určující s bodem $^1d_2$ rychlost bodu $^1d_2$ co do směru i velikosti jakožto hledanou tečnu k 2. průmětu křivky vlastního stínu plochy rotační.

Užijeme-li této konstrukce tečny pro případ, kdy bod d se nalézá na největší nebo nejmenší kružnici plochy rotační, přijdeme k následnímu zjednodušení konstrukce:

Zvolivše tentokráte za rychlost a^1a bodu a v tečně at k meridiánu M v tomto bodu sestrojené délku vymezenou v tečně

*) Rozpravy Č. A. Ročn. III. Třída II., čís. 19. Kin. zp. sestroj. tečen a středu křiv. kř. 2. st.

přímkou $o\,{}^1a \perp sa$, dospějeme k bodu ${}^2d$, který se bude, jak lze snadno dokázati stotožňovati s bodem ${}^1a$.

Vzhledem k tomu, že tečna $\overline{at} \,||\, {}^1O$, bude bod ${}^2f$ dle konstrukce právě předcházející ležeti s bodem ${}^1a$ na přímce procházející bodem s; mimo to patrno, že body ${}^1k$ a ${}^2k$ se stotožňují s bodem s. K bodu ${}^2d_2$ jsme však také mohli dospěti tím, že bychom stanovili rychlost bodu f v přímce $f{}^4f \,||\, K_2$ omezením přímky této přímkou ${}^2f{}^4f \,||\, fk$. Potom představuje úsečka $\overline{d_2{}^1d_2} \,||\, K_2$ a omezená spojnicí $s{}^4f$ rychlost bodu d_2 při otáčení přímky fk. Přímka ${}^1d_2{}^2d_2 \,||\, fk$ protíná ${}^1K_2$ v bodu ${}^2d_2$ určujícím s bodem d_2 2. průmět tečny sestrojené ke křivce vlastního stínu. Jelikož však ze vzniknuvších podobných trojúhelníků $sa{}^1a$, $sf{}^2f$ a $f{}^4fs$, $a{}^1d_2s$ plyne, že

$$\frac{\overline{a^1a}}{\overline{f^2f}} = \frac{\overline{sa}}{\overline{sf}} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{a^1d_2}}{\overline{f^4f}} = \frac{\overline{sa}}{\overline{sf}}$$

a tudíž i

$$\frac{\overline{a^1a}}{\overline{f^2f}} = \frac{\overline{a^1d_2}}{\overline{f^4f}}$$

a proto také pravoúhlé trojúhelníky $a{}^1a{}^1d_2$, $f{}^2f{}^4f$ sobě podobny. Poněvadž zároveň dva páry stejnolehlých stran jsou spolu rovnoběžny, jsou i třetí strany ${}^1d_2{}^1a \,||\, {}^4f{}^2f$. Jest tedy přímka ${}^1d_2{}^1a$ také rovnoběžna s přímkou fk, a tudíž stotožněna s onou přímkou ${}^1d_2{}^1d_2$ a proto i bod ${}^2d_2$ se skutečně s bodem a stotožňuje.

Vyplývá z toho následní zjednodušení konstrukce tečny pro bod d ležící na největší nebo nejmenší kružnici. Bodem o sestrojíme $o{}^2d_2 \perp sa$ protínající tečnu at v bodu ${}^2d_2$, kterýž s d_2 hledanou tečnu určuje. *)

4. Konstrukce křivky vlastního stínu plochy rotační zjednoduší se valně *pro parallelní osvětlení* a lze pomocí zásad geometrie kinematické i při sestrojování jejich tečen značné zjednodušení docíliti.

---

*) *Dr. Ch. Wiener*, L. d. darst. Geom., II. sv., str. 189.