Antonín Pleskot

O jisté úloze, která řeší přibližnou rektifikaci oblouku kruhového

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 305--313

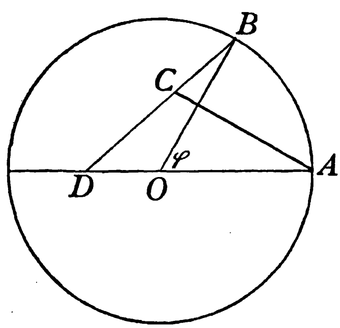
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109247

O jisté úloze, která řeší přibližnou rektifikaci oblouku kruhového.

Dr. Ant. Pleskot, professor v Plzni.

V článku tomto uvedeme nejprve řešení jisté úlohy, která vede ku přibližné rektifikaci oblouku kruhového. Přibližná hodnota, ku které dospějeme, jest táž, kterou udává rovnice Cusanova a dle níž ve spise Huygensově: „De circuli magnitudine inventa“ provedena známá rektifikace oblouku kruhového. Konstrukce naše, která též jednoduchou jest, liší se úplně od konstrukce Huygensovy.

(obr. 1.)



V dalším udáme jistou přibližnou rektifikaci oblouku quadrantu kruhového, která kombinováním s prvou konstrukcí stanoví jisté dvě meze, mezi kterými pravá hodnota oblouku kruhového jest obsažena. V závěrku upravíme konstrukci naši tak, že vede k hodnotám přesnějším než konstrukce Huygensova a při tom jednoduchou zůstává.

Budiž dána kružnice o poloměru r a v ní libovolný úhel středový φ, jehož ramena nechť protínají kružnici v bodech A a B (obr. 1.).

Střed kružnice budiž O.

Z bodu A veďme kolmici na OB a nanesme na ni od bodu A délku oblouku AB, t. j. délku $r\varphi$. Koncový bod C této délky spojme s bodem B; spojnice BC protne přímku OA v bodě D. Jest vyšetřiti mez, ku které blíží se průsečík D, jestli oblouk AB blíží se k nulle.

Volíme-li přímku OA za osu X, kolmici na ní v bodě O za osu Y, pak souřadnice bodu B jsou:

$$x = r \cos \varphi,$$
$$y = r \sin \varphi,$$

a souřadnice bodu C:

$$x = r - r\varphi \sin \varphi,$$
$$y = r\varphi \cos \varphi.$$

Rovnice přímky BC pak zní:

$$Y - r \sin \varphi = \frac{r \sin \varphi - r\varphi \cos \varphi}{r \cos \varphi - r + r\varphi \sin \varphi}(X - r \cos \varphi).$$

Položíme-li $Y = 0$, dostáváme pro délku OD hodnotu:

$$OD = r \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{\cos \varphi - 1 + \varphi \sin \varphi}{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi};$$

pro $\varphi = 0$ nabývá zlomek na pravé straně předchozí rovnice formy neurčité a hodnotu jeho limity pro $\lim \varphi = 0$ určíme známým postupem:

$$\lim_{\varphi = 0} \frac{\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi + \varphi \sin^2 \varphi}{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}$$
$$= \lim_{\varphi = 0} \frac{\frac{1}{2} \sin 2\varphi - \sin \varphi + \varphi \sin^2 \varphi}{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}.$$

Derivováním čitatele a jmenovatele obdržíme:

$$\lim_{\varphi = 0} \frac{\frac{1}{2} \sin 2\varphi - \sin \varphi + \varphi \sin^2 \varphi}{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}$$
$$= \lim_{\varphi = 0} \frac{\cos 2\varphi - \cos \varphi + \sin^2 \varphi + 2\varphi \sin \varphi . \cos \varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi + \varphi \sin \varphi}$$
$$= \lim_{\varphi = 0} \frac{\cos^2 \varphi - \cos \varphi + 2\varphi \sin \varphi \cos \varphi}{\varphi \sin \varphi} = 2 + \lim_{\varphi = 0} \frac{\cos \varphi - 1}{\varphi \sin \varphi}$$

$$= 2 - \lim_{\varphi = 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2\varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = 2 - \lim \frac{tg \frac{\varphi}{2}}{2 \frac{\varphi}{2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Proto:

$$OD = r - \frac{3}{2} r = -\frac{r}{2}.$$

Je-li úhel φ malý, možno poznatku toho užíti ku rektifikaci oblouku AB. Konstrukce jest tedy tato: S bodu A spusťme kolmici na poloměr OB; kolmice tato protne spojnici bodu B s bodem D $\left(OD = -\frac{r}{2}\right)$ v bodě C a délka AC jest přibližně rovna délce oblouku AB.

Stanovme tuto délku; poněvadž v dalším bude nutno znáti délku AC, ať bod D jest kdekoli na ose záporné, položme tedy absolutní hodnotu délky OD rovnou a.

Vedeme-li bodem B rovnoběžku ku přímce AC, až protne průměr OA, tu délka této úsečky jest $r\ tg\ \varphi$ a pak možno psáti úměru:

$$r\ tg\ \varphi : AC = \left(\frac{r}{cos\ \varphi} + a\right) : (r + a),$$

t. j.

$$AC = \frac{(r + a)\ r\ sin\ \varphi}{r + a\ cos\ \varphi}; \tag{1}$$

položíme-li

$$a = \frac{r}{2},$$

pak oblouk AB jest určen přibližně délkou d,

$$d = \frac{3r\ sin\ \varphi}{2 + cos\ \varphi}. \tag{2}$$

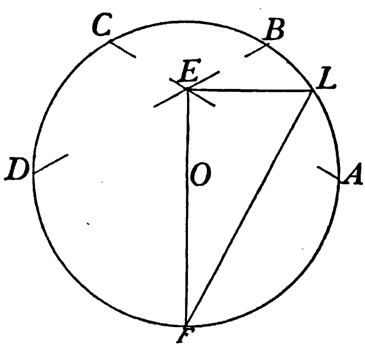
Délka d, ku kteréž jsme dospěli, jest táž, jako podává známá konstrukce Huygensova, která uvedena jest i ve knize „Encyklopädie der elem. Mathematik von Weber und Wellstein“ (I. vyd. II. sv. strana 274.), kdež i stanoven rozdíl mezi pravou hodnotou $r\varphi$ a délkou d a ukázáno, že délka d jest menší než oblouk příslušný. Snadno lze i dokázati, že s rostoucím úhlem rozdíl mezi pravou a přibližnou hodnotou roste.

Ke konstrukci naší podejme ještě některé dodatky; z té příčiny zmiňme se o jisté úsečce v kružnici, která přibližně stanoví délku čtvrtkružnice.

Je-li dána kružnice svým středem O (obr. 2.), pak od libovolného bodu A nanesme třikráte poloměr kruhu jako tětivu na obvod kružnice. Tak obdržíme body A, B, C, D.

Průsečík spojnic AC a DB budiž E; prodloužíme-li úsečku EO, až protne kružnici v bodě F, pak délka EF udává velmi přibližně délku čtvrtkružnice.

(Obr. 2.)



Délka EO jest totiž $\frac{2}{3}$ výšky trojúhelníka rovnostranného o straně r a proto:

$$EF = r\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1{\cdot}57735\ldots r,$$

a poněvadž:
$$\frac{\pi r}{2} = 1{\cdot}57079\ldots r,$$

jest proto úsečka EF větší než délka quadrantu a chyba přitom jest menší než $0{\cdot}0066\, r$.

Mimochodem budiž poznamenáno, že i plocha kružnice dá se z této konstrukce přibližně vyjádřiti plochou čtverce, jehož stranu lze též snadno narýsovati. Vztyčíme-li totiž v bodě E kolmici na EF, až protne kružnici v bodě L, pak délka FL jest strana čtverce, jenž přibližně rovná se ploše kruhu; neboť

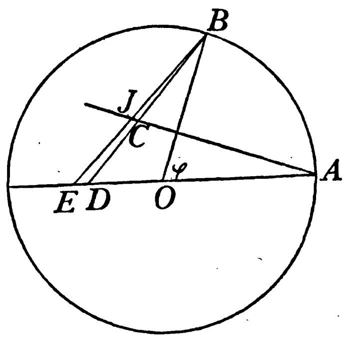
$$\overline{LF}^2 = 2r\left(r + \frac{r\sqrt{3}}{3}\right) = 3{\cdot}15\ldots r^2.$$

Volme v naší konstrukci udávající přibližnou délku oblouku $r\varphi$ mimo bod D ještě bod E na průměru OA tak, že

$$OE = -\frac{r\sqrt{3}}{3};$$

sestrojíme jej ku př. tak (obr. 3.), že v O vztyčíme kolmici na OA, která protne kružnici nahoře v bodě M, dole v bodě N. Přeneseme-li tětivu $MK = r$ od bodu M na levo, pak spojnice bodu K s bodem N protne přímku OA v bodě E. Spojíme-li bod E s bodem B a spustíme-li z A kolmici na OB, pak tato protne přímku EB v bodě J.

(obr. 3)



Délka AJ udává pak délku, která větší jest než AC, ale i větší než oblouk AB. Jest tedy pravá délka oblouku patřícího k úhlu φ obsažena mezi AC a AJ.

Že délka $AJ > r\varphi$, lze snadno dokázati.

Jest totiž dle rovnice (1)

$$AJ = \frac{r \sin\varphi \left(r + \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)}{r + \frac{r}{3}\sqrt{3}\cos\varphi} = \frac{r \sin\varphi\,(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+\cos\varphi}.$$

Rozdíl u této délky a oblouku $r\varphi$ jest pak

$$u = \frac{r \sin\varphi\,(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+\cos\varphi} - r\varphi.$$

Derivováním obdržíme:

$$\frac{du}{d\varphi} = r\,\frac{(1-\cos\varphi)(\cos\varphi - 2 + \sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\cos\varphi)^2}.$$

Pro $\varphi = 0$ jest $u = 0$. Roste-li φ od nully, jest nejprve

$\frac{du}{d\varphi}$ kladné až do hodnoty φ, pro niž

$$\cos \varphi = 2 - \sqrt{3},$$

t. j. až do

$$\varphi = 74^0 27',$$

a od této hodnoty jest pak $\frac{du}{d\varphi}$ záporným; při tom ovšem omezujeme se na úhly, které menší jsou než 90^0.

Jest tedy u z počátku kladné a roste až do $74^0 27'$, odkudž klesá a poněvadž ještě při $\varphi = 90^0$ jest kladným, neboť v tomto případě výraz

$$\frac{r \sin \varphi (1 + \sqrt{3})}{\sqrt{3} + \cos \varphi}$$

nabývá hodnoty

$$r\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

kterouž jsme uvedli jako přibližnou délku oblouku quadrantu, o níž jsme dokázali, že větší jest než skutečná délka, jest proto délka AJ v mezích $0 \ldots 90^0$ vždy větší než $r\varphi$.

Že délka $AC < r\varphi$ jest, zmínili jsme se již ze začátku, což ostatně lze dokázati stejnou úvahou jako předešle; pro úhly menší jest ovšem AC bližší k $r\varphi$ než AJ.

Konstrukce uvedená podává pro úhly menší než 60^0 dostatečnou přesnost v praktickém rýsování. Jsou-li však úhly větší, objevují se již značnější rozdíly; abychom i pro větší úhly udali hodnoty přesnější, možno rektifikovati oblouk poloviční a pak tento zdvojnásobiti, tedy použíti přibližné hodnoty

$$d = \frac{6r \sin \frac{\varphi}{2}}{2 + \cos \frac{\varphi}{2}}. \tag{3}$$

Výraz:

$$\frac{6r \sin \frac{\varphi}{2}}{2 + \cos \frac{\varphi}{2}}$$

bude vždy podávati hodnotu přesnější než výraz:

$$\frac{3r \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}.$$

Jest totiž hodnota zlomku

$$\frac{6r \sin \frac{\varphi}{2}}{2 + \cos \frac{\varphi}{2}}$$

menší než $r\varphi$, poněvadž

$$r\varphi - \frac{6r \sin \frac{\varphi}{2}}{2 + \cos \frac{\varphi}{2}} = 2\left(\frac{\varphi r}{2} - \frac{3r \sin \frac{\varphi}{2}}{2 + \cos \frac{\varphi}{2}}\right)$$

a výraz v závorce jest záporným; hodnota zlomku

$$\frac{6r \sin \frac{\varphi}{2}}{2 + \cos \frac{\varphi}{2}}$$

jest ale bližší ku $r\varphi$ než hodnota zlomku

$$\frac{3r \sin \varphi}{2 + \cos \varphi},$$

ježto rozdíl:

$$\frac{6r \sin \frac{\varphi}{2}}{2 + \cos \frac{\varphi}{2}} - \frac{3r \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}$$

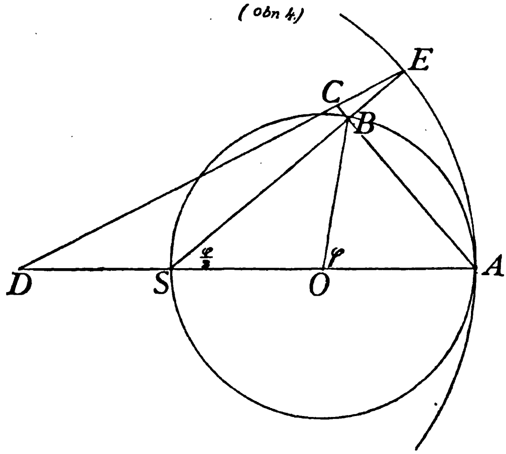
$$= 6r \sin \frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{2 + \cos \frac{\varphi}{2}} - \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 + \cos \varphi}\right)$$

$$= \frac{6r \sin \frac{\varphi}{2}\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2}{\left(2 + \cos \frac{\varphi}{2}\right)(2 + \cos \varphi)}$$

jest kladným.

Rektifikujeme-li tedy dle rovnice (3), jest třeba jen konstrukci upraviti tak, aby nestala se složitější a této úpravy jest naše konstrukce skutečně schopna. Podáme dvě konstrukce. Prvá nevyžaduje ani dělení oblouku ani zdvojnásobení oblouku. Druhá, již složitější, vyžaduje půlení jistého oblouku, nikoli zdvojnásobení.

(obr. 4.)



Je-li vzpřímiti oblouk AB (obr. 4.) kružnice o středu O, patřící k úhlu středovému φ, pak opišme z bodu S, protějšího to bodu k bodu A, kruhový oblouk poloměrem $SA = 2r$; kružnici tuto protne spojnice SB v bodě E. Na prodlouženém průměru AS narýsujme bod D tak, že $SD = r$, a tento bod spojme s bodem E; tětiva AB protne spojnici DE v bodě C a pak délka AC jest přibližná hodnota oblouku AB.

Důkaz plyne přímo. AC jest dle dřívější základní konstrukce přibližná délka oblouku AE patřícího k úhlu středovému $\frac{\varphi}{2}$ v kruhu o poloměru $2r$, t. j. délka

$$AC = \frac{6r \sin \frac{\varphi}{2}}{2 + \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Tato konstrukce dává i pro úhel 90° velmi přibližnou hodnotu. Jest totiž v tomto případě:

$$d = 1{\cdot}56722\ldots r,$$

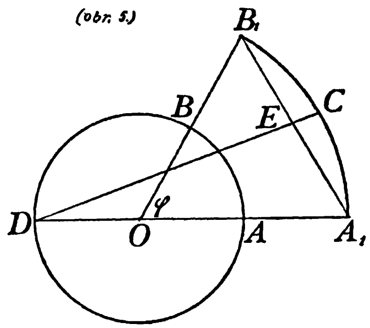
$$\frac{r\pi}{2} = 1{\cdot}57079\ldots r,$$

a tedy chyba menší než $0{\cdot}0036\,r$; poněvadž pro úhly $< 90^0$ jest chyba menší, možno v praktickém rýsování konstrukce této použíti pro každý úhel ostrý.

Druhá konstrukce o téže přesnosti, však již poněkud složitější, jest tato:

Je-li rektifikovati oblouk AB (obr. 5.), opišme ze středu O kružnici poloměrem $OA_1 = 2\,OA = 2r$. Ramena úhlu středo-

(obr. 5.)



vého φ protnou tuto kružnici v bodech A_1 a B_1. Střed C oblouku A_1B_1 spojme s bodem D, protějším to bodem k bodu A na dané kružnici. Spojnice DC protne tětivu A_1B_1 v bodě E a délka A_1E jest přibližně rovna oblouku AB. Důkaz jest opět bezprostřední. Délka A_1E jest dle základní konstrukce rovna přibližně oblouku A_1C, tedy oblouku AB. Že není nutno při této konstrukci rýsovati kruh o poloměru $2r$, jest samozřejmo. Bod C nalezneme též tak, že z bodu O vedeme kolmici na A_1B_1 a na ni od jejího průsečíku s danou kružnicí přeneseme délku r. Koncový bod této úsečky jest bod C.