Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Kounovský
O projektivnosti involutorní

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 433--439

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109245

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O projektivnosti involutorní.

Studujícím středních škol podává dr. Jos. Kounovský.

1. Dva stejnorodé *vzájemně projektivní útvary jsou soumístné*, vyskytují-li se na témže nositeli, tedy dvě bodové řady na téže ose, dva paprskové svazky o témž středu. Možnost takového vztahu vysvitne ihned řetězovým tvořením zorů a řezů, jak snadno lze se přesvědčiti. Ostatně lze tímto způsobem i odůvodniti větu: Projektivnost útvarů neruší se jich přemístěním.

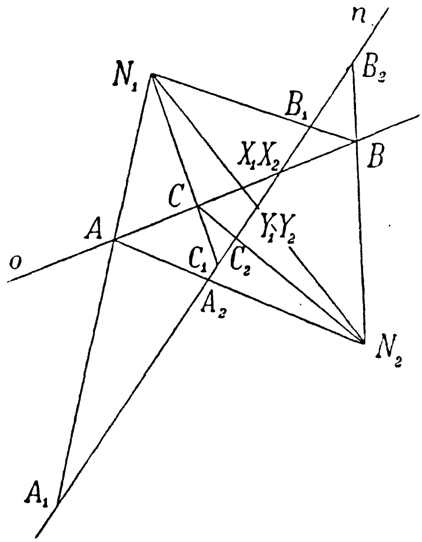
V soumístných útvarech projektivních vyskytuje se možnost, že dva sdružené prvky se stotožňují; takové prvky zovou se *samodružné.*

Dva soumístné útvary projektivní mohou míti dva prvky samodružné. Ukážeme tuto možnost na dvou soumístných projektivních řadách $A_1B_1C_1 \ldots \barwedge A_2B_2C_2 \ldots$ ($\barwedge$ jest znak projektivnosti), které utvoříme řezem dvou perspektivních svazků paprskových osou n; oba svazky o vrcholech N_1 a N_2 jsou zorem bodové řady $ABC\ldots$ na ose o (obr. 1.).

Patrně jsou samodružnými prvky v uvažovaných řadách průsečík $X_1 \equiv X_2$ osy n s osou o a průsečík její $Y_1 \equiv Y_2$ se spojnicí N_1N_2.

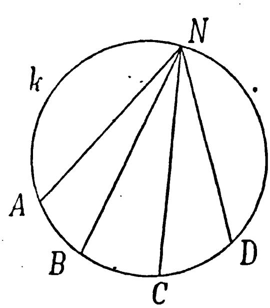
Uvažujeme-li dva soumístné projektivní svazky paprskové, stačí utvořiti jich řez libovolnou osou, čímž obdržíme soumístné bodové řady se svazky perspektivní a tedy vzájemně projektivní.

Vzhledem k skutečnosti, že ve dvou projektivních útvarech mají sdružené čtveřiny prvků týž dvojpoměr — a specielně harmonické čtveřině sdružena opět čtveřina harmonická —, patrno, že *dva soumístné útvary projektivní nemohou míti více* *nežli dva prvky samodružné.* Mají-li tři prvky samodružné, jsou nutně veskrz identické.



Obr. 1.

2. Ježto zorem bodové řady na kružnici z libovolných jejích bodů jsou paprskové svazky shodné a tedy vzájemně pro-

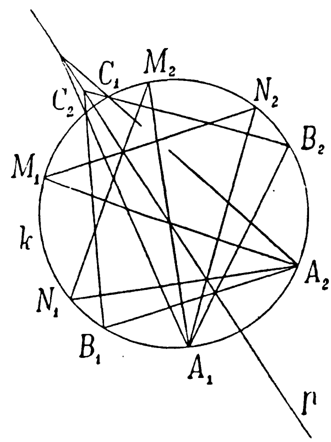


Obr. 2.

jektivní, má zor určité čtveřiny bodové na kružnici z libovolného dalšího jejího bodu vždy týž dvojpoměr (obr. 2.). Stejně platí i pro kuželosečku, kterou možno vždy pokládati za středový průmět kružnice. Proto jsou přípustné definice:

1. *Dvojpoměrem čtveřiny bodové na kuželosečce (křivé bodové řadě) nazývá se dvojpoměr čtveřiny paprskové, která je zorem čtveřiny bodové z libovolného bodu kuželosečky.*

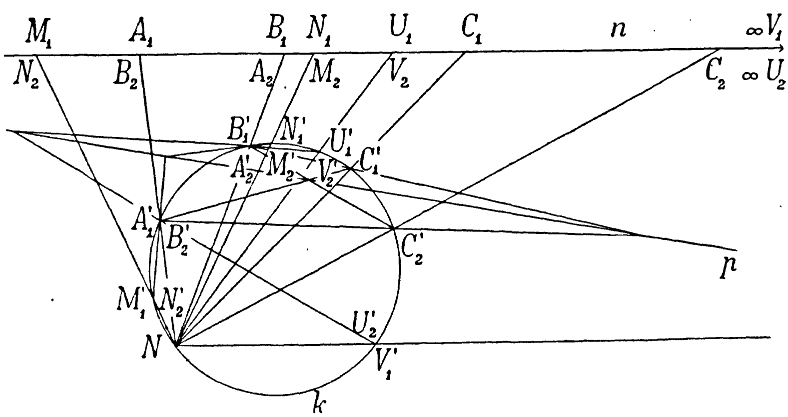
2. *Křivá bodová řada (na kuželosečce) jest projektivní s nějakým útvarem, je-li s ním projektivní zor řady z libovolného bodu kuželosečky.*



Obr. 3.

Nyní možno na kuželosečce zvoliti *dvě soumístné projektivní křivé bodové řady* třemi dvojinami sdružených prvků (družinami prvků) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (obr. 3.), což opět symbolicky vyjadřujeme $A_1B_1C_1 \ldots \barwedge A_2B_2C_2 \ldots$ Průsečíky $A_1B_2 . A_2B_1$ a $B_1C_2 . B_2C_1$ určí přímku p, na které nachází se i průsečík $A_1C_2 . A_2C_1$, což plyne ze šestiúhelníka $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ křivce vepsaného, v němž p jest přímka Pascalova. Obě projektivní křivé řady možno rýsovati pomocí projektivních svazků paprskových, zorů řad z libovolných dvou bodů křivky. Zvolíme-li za středy obou svazků specielně družinu A_2A_1, jsou oba svazky A_2 $(A_1, B_1, C_1, \ldots M_1, N_1, \ldots)$ a A_1 $(A_2, B_2, C_2, \ldots M_2, N_2, \ldots)$ vzájemně perspektivní (společný paprsek jest samodružný) o perspektivní ose p, i nachází se na p též průsečíky $A_1M_2 . A_2M_1$, $A_1N_2 . A_2N_1$, ... a ze šestiúhelníka $A_1M_2N_1A_2M_1N_2$, v němž tedy p jest přímkou Pascalovou, plyne, že i *obecně průsečík* $M_1N_2 . M_2N_1$ *nachází se na přímce* p, *která zove se direkční osa projektivních křivých řad na kuželosečce.*

3. Uvažujme dvě soumístné projektivní bodové řady. Libovolný bod jich osy n možno počítati do každé řady, tedy dvojmo $(A_1 \equiv B_2)$, a sestrojiti k němu sdružený bod v druhé řadě (A_2 resp. B_1). Tím obdržíme dva body různých řad obecně různé, $A_2 \gtrless B_1$. Může se však státi, že tyto sdružené body



Obr. 4.

k témuž dvojmo počítanému bodu také se stotožňují, t. j. že v obou řadách existuje táž družina, ať jeden bod její počítáme do jedné nebo druhé řady, t. j. je-li $A_1 \equiv B_2$, jest i $A_2 \equiv B_1$. Taková *družina zove se vratná.* Obdobně v soumístných projektivních svazcích, které možno utvořiti jako zor těch řad ze středu N.

Je-li jedna taková družina vratná, jest pak každá družina vratná a vztah ten zove se *involutorní projektivnost nebo involuce.*

Involuce jest projektivnost dvou soumístných útvarů s družinami vratnými.

Ukážeme involutorní projektivnost tak, že v obr. 4. zvolíme soumístné projektivní bodové řady na ose n třemi družinami A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, při čemž první dvě dvojiny představují jednu vratnou družinu; utvoříme zor obou řad ze středu N, čímž obdržíme dva soumístné projektivní paprskové svazky s družinou vratnou, a protneme je kružnicí k, procházející středem N; řezem jsou dvě soumístné křivé řady $A'_1B'_1C'_1 \ldots \barwedge A'_2B'_2C'_2 \ldots$ s vratnou družinou $A'_1 \equiv B'_2$, $A'_2 \equiv B'_1$. Sestrojujeme-li pomocí direkční osy p obou řad dle obr. 3. další družiny, seznáme, že libovolná družina jest vratná, na př. $M'_1 \equiv N'_2$, $M'_2 \equiv N'_1$, což patrno z toho, že průsečík $M'_1B'_2 \,.\, M'_2B'_1$ jest totožný s průsečíkem $N'_2A'_1 \,.\, N'_1 \,.\, A'_2$ na direkční ose p. I jsou vratné všechny družiny v křivých řadách, v soumístných svazcích i v soumístných řadách na n. Z toho ihned patrno, že *involuce jest určena dvěma družinami prvků.*

Specielně sestrojena v obrazci družina

$$U_1 \equiv V_2, \quad \infty U_2 \equiv \infty V_1,$$

jejíž jedním prvkem jest úběžný bod řad. Bod U_1 zove se *střed* bodové involuce.

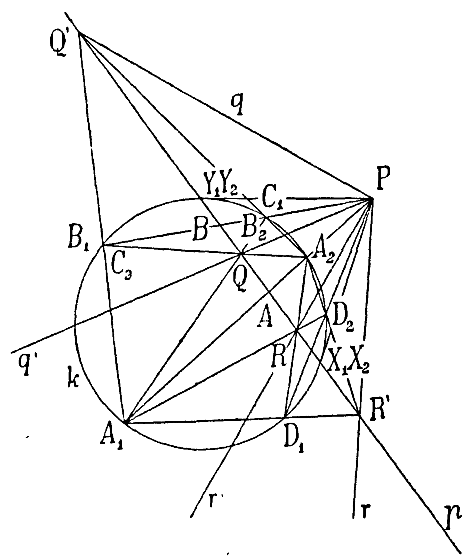
4. Všimněme si blíže bodové involuce na kuželosečce, určené dvěma družinami A_1A_2, B_1B_2 (obr. 5.). Přepišme družinu B_1B_2 na C_2C_1 a sestrojme direkční osu p osou projektivních řad. Patrno, že i průsečík $A_1B_1 \,.\, A_2B_2$ (a obecně $M_1N_1 \,.\, M_2N_2$) nachází se na p.

Označme P průsečík spojnic daných družin A_1A_2, B_1B_2. V čtyrrohu $A_1A_2B_1B_2$ do kuželosečky vepsaném sestrojeny tak všechny tři dvojiny protějších stran, jichž průsečíky P, Q a Q' určují diagonální trojúhelník čtyrrohu. Ježto $p \equiv QQ'$ jest diagonální strana, rozdělují její průsečíky A, B se stranami A_1A_2 resp. B_1B_2 spolu s diagonálním rohem P tyto strany harmonicky, t. j. $(A_1A_2AP) = -1$, $(B_1B_2BP) = -1$.

Sestrojme další družinu D_1D_2 uvažované involuce, na př. pomocí průsečíku $A_1D_2 \,.\, A_2D_1 \equiv R$ (nebo $A_1D_1 \,.\, A_2D_2 \equiv R'$) na p. Ježto $p \equiv RR'$ jest diagonální strana i v čtyrrohu $A_1A_2D_1D_2$, jest bod P jako čtvrtý harmonický bod k bodu A

vzhledem k základním A_1 A_2 též diagonálním rohem tohoto čtyrrohu, t. j. spojnice D_1D_2 prochází bodem P; a obecně procházejí jím spojnice M_1M_2, N_1N_2, . . ., t. j.:

Spojnice družin bodové involuce na kuželosečce procházejí týmž bodem — pólem involuce. Tečny procházející pólem involuce na kuželosečku určují svými dotyčnými body ($X_1 \equiv X_2$, $Y_1 \equiv Y_2$) *samodružné prvky involuce, kteréž jsou nutně průsečíky kuželosečky s direkční osou involuce.*



Obr. 5.

Na poloze pólu involuce ku křivce závisí existence skutečných jejích bodů samodružných.

Užitím involuce na pomocné kružnici možno dle obr. 4. sestrojiti i samodružné paprsky v involuci paprskové o středu N nebo samodružné body v involuci bodové na ose n.

5. *Direkční osa bodové involuce na kuželosečce zove se polárou jejího pólu.*

Pól a sdružená polára oddělují kuželosečku harmonicky. Jest to diagonální roh a protější diagonální strana v kterémkoli čtyrrohu vytčeném na kuželosečce dvěma libovolnými sečnami pólem procházejícími.

Probíhá-li pól Q přímku p, prochází jeho polára q pólem P, ježto Q a P jsou odděleny kuželosečkou harmonicky.

Budiž $Q' \equiv A_1B_1 \,.\, A_2B_2$ třetí diagonální roh v čtyrrohu $A_1A_2B_1B_2$. Patrně jeho polára $q' \equiv PQ$ a tedy i polára q bodu Q prochází bodem Q'. Obdobný vztah platí pro póly R resp. R' a jich poláry r resp. r'.

Dvojiny QQ', RR', . . . zovou se *sdružené body* nebo *harmonické póly* na přímce p, obdobně dvojiny qq', rr', . . . *sdružené přímky* nebo *harmonické poláry* ve vrcholu P vzhledem k uvažované kuželosečce k.

Řezem svazku P $(q', r', \ldots)$ jest řada p $(Q, R, \ldots)$, jejím zorem svazek A_1 $(A_1Q, A_1R, \ldots)$, toho řezem křivá řada k $(B_2, D_2, \ldots)$, jejím zorem svazek A_2 $(B_2, D_2, \ldots)$, řezem tohoto svazku řada p $(Q', R', \ldots)$ a jejím zorem svazek P $(q, r, \ldots)$. Z tohoto řetězu útvarů perspektivních patrna projektivnost, kterou vzhledem k patrné involutornosti možno vyjádřiti:

Bodová řada pólů jest projektivní se svazkem jich polár vzhledem ke kuželosečce.

Sdružené body na přímce a sdružené přímky v bodě (vzhledem ke kuželosečce) jsou involutorně projektivní. O těchto involucích díme, že jsou na přímce resp. v bodě kuželosečkou indukovány.

Trojúhelník (na př. PQQ'), jehož každá strana jest polárou protějšího rohu vzhledem ke kuželosečce, zove se jejím trojúhelníkem polárným.