Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Kinematika theorie relativnosti. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 411--424

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109240`

Kinematika theorie relativnosti.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Transformací Lorentzovou mění se také *tvar* tělesa. Mějme na př. těleso, jehož tvar jest v soustavě čárkované koule (elektron); rovnice jejího povrchu jest

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2.$$

Vložíme-li do této rovnice za x', y', z' hodnoty plynoucí ze vzorců (2c) pro $t = 0$, obdržíme

$$\beta^2 x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \tag{7}$$

což jest rovnice ellipsoidu o osách $\frac{r}{\beta}$, r, r.

Tudíž těleso, jehož tvar ve stavu klidu (vzhledem k pozorovateli v soustavě S') jest koule, má ve stavu pohybu (vzhledem k pozorovateli v soustavě S) tvar rotačního ellipsoidu. Ellipsoid ten zove se někdy *Heavisideovým*.

Podobně pozorovateli, který jest v klidu, jeví se každé těleso, jež se vzhledem k němu pohybuje, ve tvaru sploštělém ve směru pohybu, a to tím více, čím rychlejší jest pohyb jeho. Největší jsou rozměry tělesa pro pozorovatele, vzhledem k němuž se nepohybuje. Pro $v = c$ nabývá těleso tvaru deskového.

S kontrakcí délky souvisí také změna *objemu* tělesa. Musíme opět rozeznávati mezi objemem geometrickým V_g (v soustavě čárkované) a objemem kinematickým V_k (v soustavě nečárkované). Je-li elementární prvek prvního

$$d V_g = dx' \, dy' \, dz',$$

jest na pravé straně této rovnice dle druhé rovnice (6)

$$dx' = dx_g = \beta dx_k,$$

kdežto

$$dy' = dy_g, \; dz' = dz_g.$$

Substitucí těchto hodnot vychází

$$d V_g = \beta \, dx_k \, dy_g \, dz_g = \beta \, d V_k.$$

Podobně platí pro celé objemy

$$V_g = \beta \, V_k,$$

z čehož

$$V_k = 1/\beta \; V_g\text{*)}, \tag{8}$$

t. j. kinematický objem jest menší než geometrický.

Druhá změna, která jest následkem transformace Lorentzovy, týká se *času*. Kdežto totiž v transformaci Galileiově platí $t = t'$, nastupuje místo této jednoduché relace složitější

$$t = \beta\left(t' + \frac{v}{c^2}\,x'\right).$$

Tedy čas není veličinou nezávisle proměnnou, za jakou bývá pokládán v mechanice klassické, nýbrž jest podobně jako délka závislý na pohybu útvaru.

Pro totéž x' jest tudíž interval časový mezi t_2 a t_1 dán rovnicí

$$t_2 - t_1 = \beta\,(t'_2 - t'_1);$$

píšeme-li $t_2 - t_1 = T$, $t'_2 - t'_1 = T'$, jest dle toho

$$T = \beta T',$$

z čehož

$$T' = \frac{1}{\beta}\,T. \tag{9}$$

---

*) Naskýtá se ovšem otázka, jaká jest příčina těchto změn; *Lorentz* v § 91 svého výše uvedeného pojednání „Versuch einer Theorie atd.“ vykládá je touto domněnkou: „Jakkoli tato hypothesa (totiž kontrakční) se zdá býti na první pohled podivnou, musíme přece připustiti, že není tak nepochopitelná, předpokládáme-li, že zprostředkovatelem působení sil molekulárních jest ether, obdobně jako to můžeme nyní určitě tvrditi o silách elektrických a magnetických. Je-li tomu tak, mění translace velmi pravděpodobně působení mezi dvěma molekuly neb atomy podobným způsobem, jako přitažlivost neb odpudivost mezi nabitými částicemi. Poněvadž pak tvar a rozměry pevného tělesa v poslední instanci podmíněny jsou intensitou molekulárního působení, může též nastati změna rozměrů.“

H. Minkowski praví o této domněnce (ve své přednášce „Raum und Zeit“, vyd. Teubnerovo, pag. 6), že zní nejvýš fantasticky. „Neboť kontrakci není si mysliti při tom jako následek odporů v etheru, nýbrž jako dar shůry, jako okolnost provázející pohyb.“ Jeho výklad této kontrakce uvedeme níže.

Dle *A. Einsteina* jde tu o změnu dimensí, kterou můžeme označiti jako zdánlivou a která úzce souvisí s tím, jak měříme čas na základě čtvrté rovnice (2*c*).

Chwolson přijímá (ve své »Fysice«, IV. díl, 2. polov., 1. odd., německý překlad pag. 425) změnu tu za fakt, který nelze ani vysvětliti, ani znamenati, jako vlastnost světa, ve kterém žijeme.

Pro rozdíl $T' - T$ obdržíme podobně jako pro $l_g - l_k$ (vzorec 6a) přibližně

$$\frac{T - T'}{T} = \tfrac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}. \qquad (9a)$$

Mysleme si v soustavě klidné (S) na ose X-ové dvě místa A a B; v každém jsou vhodně upravené časoměry $\mathbf{H}_A$ a $\mathbf{H}_B$ (úplně stejně a správně jdoucí), oba v klidu*). Jiný časoměr, jejž označíme $\mathbf{H}'$, pohybuje se se soustavou (S') z místa $A' \equiv A$ směrem k B rychlostí na př. 30 *km/sec*; v soustavě této časoměr $\mathbf{H}'$ nemění svého místa (jest totiž úsečka x' jeho místa stálá). Kdyby vzdálenost AB rovnala se 94,670.790 . . *km*, dospěl by z A za jeden rok tropický ($=$ 365·242242 . . dní) do místa $B' \equiv B$.

Časoměr $\mathbf{H}'$ jest tak zřízen, že při počátku pohybu (v $A' \equiv A$) ukazuje s časoměrem v klidu jsoucím $\mathbf{H}_A$ týž čas. Časoměr $\mathbf{H}_B$ bude pak ukazovati v okamžiku, kdy pohyblivý časoměr $\mathbf{H}'$ dojde zmíněnou rychlostí do místa B', čas o 31,556.930 . . *sec* pozdější; klidný pozorovatel soustavy nečárkované v B neodečte však dle našich vývodů na časoměru $\mathbf{H}'$ tento čas, nýbrž asi o $^1/_6$ *sec.* méně. Pro něj časoměr $\mathbf{H}'$ jde pomaleji, čili zůstává o tuto malou dobu pozadu.

Jest tedy nejen délka, ale i čas pojmem relativním; k tomu musíme míti zření, mluvíme-li o *současnosti* dvou zjevů. Mysleme si v nehybné soustavě (S) v ose X-ové délku $OA = l$ (obr. 2.), která nemění své polohy; v koncových bodech této délky buďtež pozorovatelé s časoměry, na nichž stanoví dobu t. Směrem X', rovnoběžným s X, pohybuje se délka $O'A' = OA$, jejíž konce nesou též časoměry stanovící dobu t'.

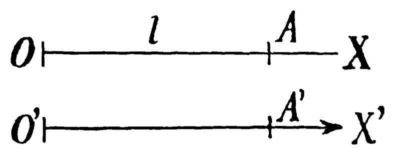
Při tomto pohybu přijdou v jistém okamžiku body O a O' přesně naproti sobě; dejme tomu, že se tak stane, když $t = t' = 0$. Tu by měly také časoměry v A a A' ukazovati

*) Sluší tu zmíniti se o mínění *Chwolsonově* („Fysika" IV. díl, 2. polov., 1. odd., německý překlad pag. 443), že není na prospěch výkladu principu relativnosti upotřebiti k němu pojmu hodin (Einstein, Cohn a j.), neboť pojem ten jest element podstatě věci úplně cizí. Hodiny jsou fysikálním přístrojem, o němž nelze říci, jaký vliv naň bude míti pohyb relativní. Bylo by třeba provésti kritický rozbor této otázky, což se dosud nestalo.

týž čas; ale tomu tak nebude, časy ty budou rozdílné. Neboť dle poslední rovnice ($2c$) obdržíme pro $t = 0$ (v bodu A) hodnotu (pro A'):

$$t' = -\beta \frac{v}{c^2} l.$$

Pročež zjev, který jest současný pro O a A, není současný pro O' a A'. Pojem současnosti nemá významu absolutního; dvě události, které jsou současny, pozorujeme-li je z jedné soustavy souřadnic, nelze bráti za současné, pozorujeme-li je z jiné soustavy, jež se vzhledem k první pohybuje.



Obr. 2.

Princip relativnosti vyskytuje se již v mechanice klassické. *Newton* vyslovuje jej v V. dodatku ke svým Axiomata sive leges motus ve „Philosophiae naturalis principia mathematica“ takto: „Tělesa v daném prostoru uzavřená mají týž pohyb mezi sebou, ať se již prostor ten nalézá v klidu, aneb ať se pohybuje stejnoměrně a v přímce, nikoli však v kruhu.“ Klid nebo pohyb daného prostoru vztahuje se tu patrně k prostoru absolutnímu; postrádáme však vysvětlení toho, co jest rozuměti rčením: „těleso nalézá se (absolutně) v klidu“.

Později *Euler* pronáší princip relativnosti určitěji; praví totiž ve své „Mechanice“, cap. I., propositio 10: „Jestliže prostor, vzhledem k němuž stanovíme pohyb relativní, jest buď v absolutním klidu nebo se pohybuje rovnoměrně v přímce, platí zákony, vyslovené o klidu a pohybu, též pro relativní stav těles.“ *Euler* nahrazuje tedy v této větě pojem absolutního prostoru pojmem prostoru, vzhledem k němuž pohyb určujeme.

V novější době princip ten vysloven byl ještě přesněji; tak dí *Einstein**): „Zákony fysikální jsou nezávislé na stavu

*) „Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen“ v časopise „Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik“, IV. svazek, pag. 416.

pohybu soustavy souřadnicové, k níž polohy těles vztahujeme. aspoň potud, pokud pohyb ten není urychlený.“

Podobně *M. Laue* (dle *Minkowského*) *): „Ze souboru zjevů přírodních lze rostoucí approximací určiti vždy přesněji soustavu souřadnic x, y, z, t, v níž pro zákony přírodní platí určité, mathematicky jednoduché formy. Soustava ta není však zjevy jednoznačně určena, nýbrž jest ∞^3 stejně oprávněných soustav, které se navzájem rovnoměrně pohybují.“

Dle tohoto principu všechna pozorování, která může konati na hmotné soustavě, jež se pohybuje rovnoměrně v přímce, pozorovatel spolu se pohybující, ničím se nerozeznávají od pozorování, jež by konal klidný pozorovatel v soustavě nalézající se v klidu. Jinak řečeno: pozorovatel, který by byl úplně uzavřen ve skříni, nemůže rozhodnouti o tom, je-li skříň v klidu nebo pohybuje-li se rovnoměrně a přímočárně. Nelze tudíž mluviti o absolutním pohybu tělesa; rychlost takového pohybu nemůžeme ustanoviti, neboť pozorování našemu přístupny jsou toliko změny ve velikosti a směru rychlosti.

„Podstata Einsteinovy theorie,“ praví *Chwolson* (ve své „Fysice“, IV. díl, pag. 420), „záleží v tom, že nahrazuje slova „nepodařilo se“ (totiž zjistiti pokusy přímočarý stejnoměrný pohyb země v etheru) slovy „nemůže se podařiti“. Touto substitucí mění se úplně smysl a karakter uvedených slov. „Nepodařilo se“ značí historický fakt, neočekávaný výsledek rozmanitých experimentálních badání. Lze se pokusiti o to, fakt tento vysvětliti, zavedou-li se na př. nové hypothesy, jako učinili Fitzgerald a Lorentz. „Nemůže se podařiti“ jest a priori vyslovený axiom, postulát, na němž se buduje nový názor světový. Nemůže býti samozřejmě o tom řeči, abychom chtěli dokázati tento postulát nebo pokusili se o jeho vysvětlení. Přijmeme-li jej za pravý, musíme na tomto základě zbudovati fysiku; musíme se snažiti, abychom odvodili z něho všechny možné důsledky, a možno-li zkoušeli správnost obdržených výsledků experimenty.“

V moderním principu relativnosti, v němž neplatí Newtonovy zákony pohybu, pojmy času a prostoru přestávají býti na sobě nezávislé; na dále jest jich upotřebiti jen v bezprostředním

*) „Das Relativitätsprinzip“, II. vyd., pag. 34.

spojení. „Prostor o sobě a čas o sobě mají úplně zaniknouti jako stín a jen ještě jakýsi druh sjednocení obou má podržeti svou samostatnost.“ Těmito slovy počíná *H. Minkowski* svou proslulou přednášku „Raum und Zeit“, kterou konal dne 21. září 1908 na sjezdu přírodozpytců v Kolíně n. R.

Mathematickým výrazem nového principu relativnosti jest právě transformace Lorentzova. Sluší připomenouti, že principem tím modifikují se ještě jiné základní pojmy fysikální, zvláště pojem hmoty; absolutní hodnotu má jen málo veličin, jako na př. rychlost světla ve vzduchoprázdnu c, množství elektřiny e; většina jich jsou funkcemi rychlosti.

Bude nás ještě zajímati otázka: Spočívá-li theorie relativnosti na jistých a bezpečných základech? Odpovídám k ní slovy, kterými *M. Laue* končí svůj spis „Das Relativitätsprinzip“ (II. vyd., pag. 253): „Jakkoli theorií relativnosti jsme nuceni k tomu, zavésti ve fysikálním obraze světovém dalekosáhlé změny, přece tato theorie neobsahuje nikde logických nemožností. Všechna paradoxa, na něž se příležitostně přišlo, dala se vždy zevrubnějšími úvahami bez námitek vysvětliti a lze určitě předpověděti, že to bude i budoucně možno. Co se týče shody theorie se zkušeností, můžeme říci, že nová theorie té doby není v žádném odporu ani s jediným pozorováním, naopak potvrzuje se jí dosti značný počet zkušeností, mezi nimi též takové, jež staršími theoriemi nebylo lze vysvětliti. Přece však zdá se mnohým, že empirický důkaz její pravosti není ještě dostatečně podán; každým způsobem jest si velice přáti dalších zkoušek. Co těmito zkouškami na jevo přijde, ukáže budoucnost.“

A podobně vyslovuje se o tom *D. O. Chwolson* ve IV. dílu své „Fysiky“, pag. 443; i on očekává od budoucnosti řešení sporných otázek a objasnění pravého fysikálního významu principu relativnosti.

Jiné tvary rovnic základních. I. Rovnice (2c) nemají dosti souměrného tvaru; na tvar vhodnější upravíme je takto: Především zaveďme v nich místo 1 sekundy novou jednotku časovou, totiž dobu, za kterou světlo proběhne (ve vzduchoprázdnu) dráhu 1 *cm*. I jest tato nová jednotka rovna $\frac{1}{c}$ *sec*; době 1 *sec* přísluší pak $c = 3 \,.\, 10^{10}$ nových jednotek. Dobu vyjádřenou v těchto jednotkách označíme u. Ku přeměně doby t (v *sec*) na u $\left(\text{v } \frac{1}{c} \; sec\right)$ platí rovnice

z čehož
$$u = ct, \qquad t = \frac{u}{c}. \tag{10}$$

Zavedouce za t a t' do rovnic (2c) hodnoty $\frac{u}{c}$, $\frac{u'}{c}$ nabudeme transformačních vzorců

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\beta}{c}\,(cx - vu), \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ u' &= \frac{\beta}{c}\,(-\,vx + cu), \end{aligned} \tag{2d}$$

jež jsou tvaru souměrnějšího.

Pro přechod ze soustavy nečárkované v čárkovanou máme pak vzorce

$$\begin{aligned} x &= \beta/c\,(cx' + vu'), \\ y &= y', \quad x = z', \\ u &= \beta/c\,(vx' + cu'). \end{aligned} \tag{3d}$$

II. Zaveďme v těchto rovnicích pomocný úhel φ, daný rovnicí

$$tg\,\varphi = v/c, \tag{11}$$

z čehož plyne

$$cos^2\,\varphi = \frac{c^2}{c^2 + v^2}, \quad sin^2\,\varphi = \frac{v^2}{c^2 + v^2},$$

dále

$$\frac{1}{sec\,2\varphi} = cos\,2\varphi = cos^2\varphi - sin^2\varphi = \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2}.$$

Pročež obdržíme pro

$$\beta^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2}{c^2 + v^2}\,\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}$$

hodnotu

$$\beta^2 = cos^2\varphi\; sec\,2\varphi,$$

čili

$$\beta = cos\,\varphi\,\sqrt{sec\,2\varphi}. \tag{5a}$$

První a poslední rovnice (2*d*) nabývají pak tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{sec\, 2\varphi}\,(x \cos\varphi - u \sin\varphi) \\ u' &= \sqrt{sec\, 2\varphi}\,(-x \sin\varphi + u \cos\varphi), \end{aligned} \tag{2e}$$

a naopak

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{sec\, 2\varphi}\,(x' \cos\varphi + u' \sin\varphi) \\ u &= \sqrt{sec\, 2\varphi}\,(x' \sin\varphi + u' \cos\varphi). \end{aligned} \tag{3e}$$

III. Rovnice ty lze ještě zjednodušiti; za tou příčinou zavedeme další nové jednotky pro měření délky a času. Jednotky ty budou však platiti jen pro soustavu čárkovanou a budou závislé na rychlosti v. Místo 1 *cm* volme za jednotku délky $\frac{1}{\sqrt{sec\, 2\varphi}} = \sqrt{cos\, 2\varphi}$ *cm* a místo výše již zavedené jednotky časové $\frac{1}{c}$ sekundy novou jednotku $\frac{1}{c\sqrt{sec\, 2\varphi}} = \frac{1}{c}\sqrt{cos\, 2\varphi}$ sek. Danému v příslušejí určité hodnoty těchto jednotek; je-li na př.

$$v = \sqrt{3} \times 10^{10}\ cm/sec = 173205\ldots km/sec,$$

bude $\sphericalangle\, \varphi = 30^0$ a novou jednotkou délky v soustavě čárkované $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *cm* a novou jednotkou času $\frac{\sqrt{2}}{2\,.\,3\,.\,10^{10}}$ *sec.*

Označíme-li pak souřadnici x' a dobu u' vyjádřené v těchto jednotkách ξ' a τ', budou platiti pro přechod od jedněch souřadnic ke druhým rovnice

$$\begin{aligned} &\xi' = x' \sqrt{sec\, 2\varphi}, \quad \tau' = u' \sqrt{sec\, 2\varphi} = ct' \sqrt{sec\, 2\varphi}, \\ &x' = \xi' \sqrt{cos\, 2\varphi}, \quad u' = \tau' \sqrt{cos\, 2\varphi}, \quad t' = \frac{\tau'}{c} \sqrt{cos\, 2\varphi}. \end{aligned} \tag{12}$$

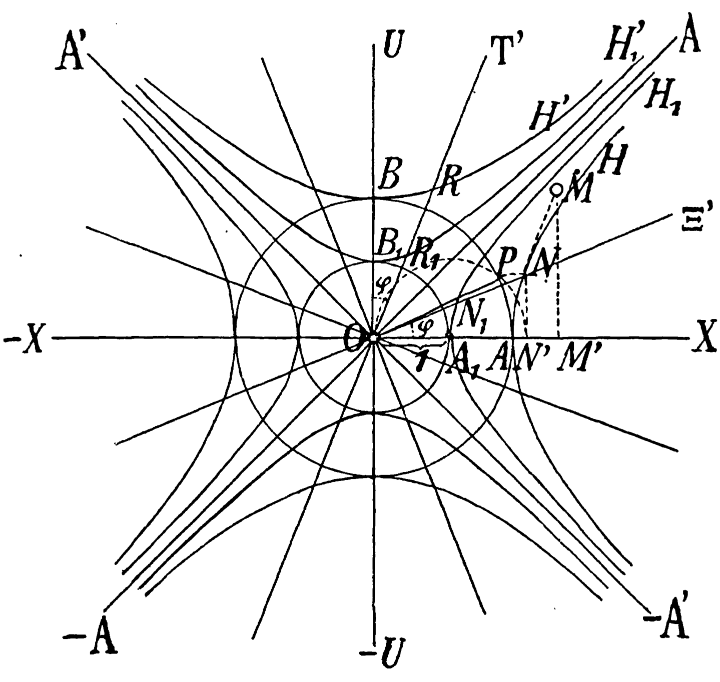
Substitucí těchto hodnot do rovnic (2*e*) obdržíme

$$\begin{aligned} \xi' &= sec\, 2\varphi\,(x \cos\varphi - u \sin\varphi), \\ \tau' &= sec\, 2\varphi\,(-x \sin\varphi + u \cos\varphi); \end{aligned} \tag{2f}$$

a z rovnic (3*e*)

$$\begin{aligned} x &= \xi' \cos\varphi + \tau' \sin\varphi, \\ u &= \xi' \sin\varphi + \tau' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{3f}$$

Vzorce tyto jsou známé vzorce pro transformaci souřadnic pravoúhlých v kosoúhlé o společném počátku. Buďtež X a U (obr. 3.) osy souřadnic soustavy nečárkované a Ξ', T' osy soustavy kosoúhlé, určené úhly $\widehat{X\Xi'} = \varphi$ a $\widehat{\Xi'T'} = \pi/2 - 2\varphi$, jež lze sestrojiti na základě rovnice (11). I poznáme snadno, že platí mezi souřadnicemi x, u libovolného bodu M v soustavě (XU) a souřadnicemi ξ', τ' téhož bodu v soustavě $(\Xi'T')$ relace (3*f*).



Obr. 3.

Je-li tedy dán bod M souřadnicemi $x = OM'$ a $u = M'M$, sestrojíme snadno jeho souřadnice $\xi' = ON$ a $\tau' = NM$. Známe-li pak ξ', ustanovíme jednoduchou konstrukcí souřadnici x'. Spustíme totiž s bodu N kolmici NN' na osu X-ovou, sestrojíme nad průměrem $ON' = \xi' \cos\varphi$ polokružnici a přetneme ji ze středu N' obloukem o poloměru $N'N = \xi' \sin\varphi$ v bodě P, tak že $N'P = N'N$; i jest $OP = x'$. Neboť v pravoúhlém trojúhelníku $ON'P$ jest

$$\overline{OP}^2 = \overline{ON'}^2 - \overline{N'P}^2 = \overline{ON'}^2 - \overline{N'N}^2$$

aneb

$$\overline{OP}^2 = \xi'^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \xi'^2 \cos 2\varphi,$$

tudíž

$$\overline{OP'} = \xi' \sqrt{\cos 2\varphi} = x'.$$

A podobně sestrojíme u', známe-li τ', a z u' určíme snadno dobu t'.

Jest třeba zmíniti se na tomto místě o geometrické interpretaci Lorentzovy transformace *H. Minkowským.* Dle něho předmětem všeho vnímání jsou vždy jen místa spojená s časem; nikdo nepozoroval jakéhokoli místa jinak než v nějaké době a doby jinak než na nějakém místě. Jsme tedy oprávněni připojiti k souřadnicím x, y, z, kterými stanovíme polohu bodu v prostoru, čtvrtou souřadnici, totiž dobu t (aneb lépe u). Soustava hodnot x, y, z, u určuje *bod světový*; souhrn všech takových bodů tvoří prostor čtyřrozměrný, zvaný *světem Minkowského.* V našem případě zůstávají souřadnice y a z stálé; stačí tedy k zobrazení tohoto prostoru rovina.

Pohybuje-li se bod, mění se poloha jeho i čas, tedy obecně všechny souřadnice x, y, z, u; obrazem této nepřetržité změny jest křivka, kterou *Minkowski* nazývá *čarou světovou.* Rovnice její, vyjádřené parametrem t, jsou

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad u = ct.$$

Je-li ve zvláštním případě bod v klidu, jsou x, y, z stálé a jen u jest proměnlivé; čarou světovou jest pak přímka rovnoběžná s osou U-ovou.

Pohybuje-li se bod rovnoměrně v přímce, jest jeho čarou světovou přímka procházející počátkem, jež jest nakloněna k ose U-ové v úhlu φ', daném rovnicí

$$tg\, \varphi' = \frac{v}{c}.$$

Pro $v < c$ jest $\sphericalangle \varphi'$ menší než 45^0; pro $v = c$ jest $\sphericalangle \varphi' = 45^0$, tudíž čarou světovou přímka A (obr. 3.), rozpolující úhel XU.

Všechny přímky světové bodů, různými rychlostmi $v < c$ rovnoměrně se pohybujících, jsou tedy (přihlížíme-li také k záporným hodnotám souřadnic x a u) položeny v části roviny mezi přímkami A a A' $\perp$ A, obsahující osu U*).

Pohybuje-li se bod stálou rychlostí v v kružnici, jest jeho čarou světovou šroubovice; úhel α, v němž tato křivka vystupuje, jest dán rovnicí $cotg\ \alpha = v$.

Je-li pohyb bodu obecný, jest příslušná čára světová křivka třikrát zakřivená; všechny tečny její mají však směry přímek vycházejících z počátku v části roviny [A, U, A'].

Také osa T' jest čarou světovou bodu pohybujícího se rovnoměrně jistou rychlostí v přímce; ale v soustavě $(\Xi' T')$ jest bod ten v klidu (jelikož $\xi' = 0$). Můžeme tudíž vždy zavésti soustavu souřadnic $(\Xi' T')$, aby v ní kterýkoli bod položený v částech roviny [A, U, A'] a [— A, — U, — A'], tedy v částech vektorů časových, byl v klidu. Je-li R takovým bodem, jest jen třeba voliti za osu T' přímku OR. Pravíme pak, že transformujeme bod R na „klid".

Podobně lze transformovati body, položené v částech roviny [A, X, — A'] a [— A, — X, A'] na „současnost"; stačí voliti na př. pro bod N přímku ON osou Ξ'.

Další úvahy založíme na rovnici (4), jíž se vyjadřuje invariance kvadratického výrazu

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - u^2.$$

Položíme-li v rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2$$

opět $y = y'$, $z = z'$, obdržíme

$$x^2 - u^2 = x'^2 - u'^2.$$

Nazveme-li společnou hodnotu těchto rozdílů b^2, vyjde

$$x^2 - u^2 = b^2, \tag{13}$$

což jest rovnice rovnoosé hyperboly, jejíž poloosa $= b$.

Rovnice této křivky v soustavě $(\Xi' T')$ bude dle předešlého

$$\xi'^2 - \tau'^2 = b^2 \sec 2\varphi. \tag{13a}$$

---

*) Vektory těchto směrů zovou se *časovými*; vektory, jichž směry spadají do části roviny, omezené přímkami A, A' a obsahující osu X, slovou *prostorovými*.

Budiž N (obr. 3.) průsečík této hyperboly H s osou Ξ'; pro tento bod jest (poněvadž $\tau'_N = 0$)

$$\xi'_N = ON = b\sqrt{sec\, 2\varphi}; \tag{14}$$

ale dle první rovnice (12) jest příslušné

$$x'_N = OP = \frac{\xi'_N}{\sqrt{sec\, 2\varphi}} = b,$$

tedy rovno poloose hyperboly. Pročež $OP = OA$, z čehož plyne:

Úsečky x' příslušející všem bodům hyperboly H jsou stejně veliké (jako poloosa hyperboly).

Tudíž geometrické místo bodů P pro všechny tyto body jest kružnice opsaná z počátku souřadnic poloměrem OA.

Podobný význam má hyperbola H', jejíž rovnice jest

$$u^2 - x^2 = b^2;$$

všechny body její mají stejnou dobu $u' = OB$ (v jednotkách výše zavedených).

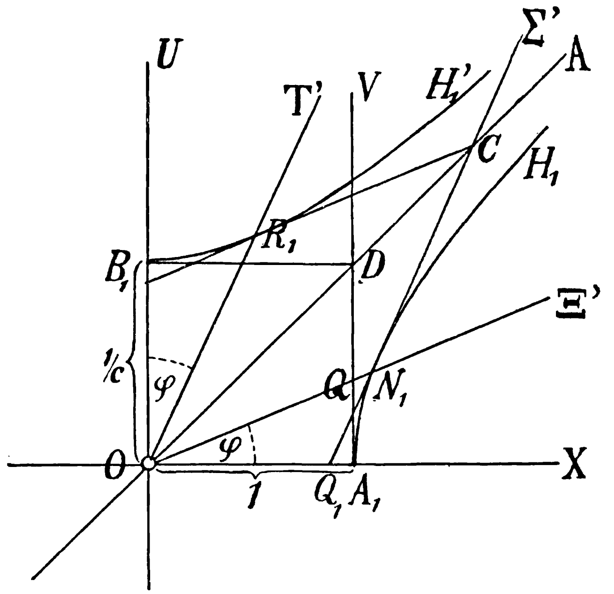
Připojme k tomu ještě, že osy Ξ' a T' mají směry sdružených průměrů hyperboly H; z toho jde, že pořadnice $NM \parallel T'$ jest tečnou této křivky. Pročež zavedením kosoúhlých souřadnic, jejichž osa T' jest rovnoběžna s tečnou v kterémkoli bodu hyperboly H, lze transformovati tento bod na klid.

Každé hodnotě úsečky x' přísluší jedna hyperbola H; pro $x' = 0$ degeneruje tato hyperbola ve dvé přímek A a A', jež jsou společnými asymptotami všech hyperbol. Mezi nimi jest jedna zvlášť důležitá; jest to hyperbola H_1 pro $x' = 1$, kterou můžeme zváti hyperbolou *jednotkovou*.

Je-li průsečík této hyperboly s osou Ξ' bod N_1, jest patrně délka ON_1 jednotkou, jíž jest na této ose měřiti úsečky ξ', abychom obdrželi bezprostředně délky úseček x'.

Obdobně každé pořadnici u' náleží rovnoosá hyperbola H', jejíž osa jest U a asymptoty A a A'; mezi všemi těmi hyperbolami jedna H'_1 přísluší hodnotě $u' = 1$. Měříme-li délkou OR_1 od počátku souřadnic k průsečíku této jednotkové hyperboly s osou T' pořadnice τ', obdržíme poměrná čísla dob u'. Kdybychom poloosu OB_1 volili $\frac{1}{c}$ *sec*, mohli bychom takto přímo stanoviti doby t'.

Na základě těchto vývodů lze říci, že transformace Lorentzova záleží v tom, že místo os X a U zavádíme osy Ξ' a T' a na těch místo jednotek OA a OB nové jednotky ON_1 a OR_1



Obr. 4.

Nyní můžeme také vyložiti dle Minkowského výše uvedené zkracování délek, jež jest následkem transformace Lorentzovy.

Mysleme si dvě měřítka, obě na př. 1 *m* dlouhá; jedno jest v klidu v soustavě nečárkované, druhé jest sice v klidu v soustavě čárkované, ale pohybuje se s touto soustavou rychlostí v vzhledem k měřítku prvnímu. Toto jest zobrazeno v době $t = 0$ délkou OA_1 (obr. 4); čáry světové všech jeho bodů jsou kolmé k ose X-ové a soubor jich tvoří rovinný pás mezi rovnoběžkami U a V. Druhé měřítko jest v době $t' = 0$ zobrazeno délkou ON_1, která se dle (14) rovná $OA_1 \sqrt{sec\,2\varphi}$; jemu příslušející pás světový jest dán rovnoběžkami T' a Σ'.

Měří-li toto měřítko klidný pozorovatel na ose X-ové v době $t = 0$, jeví se mu jeho délka rovnou OQ_1, jež jest kratší než délka prvního měřítka OA_1. Poměr těchto délek vyšetříme z $\triangle\, OQ_1N_1$; v něm jest

$$OQ_1 : ON_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

čili

$$OQ_1 : OA_1\sqrt{\sec 2\varphi} = \cos 2\varphi : \cos \varphi,$$

z čehož

$$OQ_1 : O\,A_1 = 1 : \cos\varphi\sqrt{\sec 2\varphi}.$$

Ale dle (5a) jest

$$1 : \cos\varphi\,\sqrt{\sec 2\varphi} = 1 : \beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} : 1,$$

pročež

$$OQ_1 : OA_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} : 1,$$

jak toho Lorentzova hypothesa o kontrakci délky při pohybu vyžaduje.

Pozorovateli v soustavě čárkované bude se zdáti, že měřítko první (v klidné soustavě) se vzhledem k němu pohybuje rychlostí $-v$; měří-li je v době $t' = 0$ na ose Ξ' (též X'), jest jeho délka OQ, tedy kratší než délka ON_1 pohybujícího se měřítka. V pravoúhlém trojúhelníku OA_1Q jest

$$OQ = \frac{OA_1}{\cos\varphi};$$

ježto

$$OA_1 = \frac{ON_1}{\sqrt{\sec 2\varphi}},$$

jest také

$$OQ : ON_1 = 1 : \cos\varphi\,\sqrt{\sec 2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} : 1,$$

tedy opět ve shodě s Lorentzovou transformací.

(Dokončení.)