O rychlém odvození dvou vzorců goniometrických.

Napsal

dr. F. J. Studnička.

Kdyby vzorce, jež hodláme zde krátkým spůsobem odvoditi, nebyly ještě známé, platilo by o cestě, jakou tu k nim přijdeme, plným právem, co *Tannery* o podobných methodách praví slovy: „Même en Mathématique c'est souvent par des chemins peu sûrs que l'on va à la découverte.“

Úkol, jejž tu máme na zřeteli, hledá napřed vyjádření hyperbolického kosinusu K a sinusu S argumentu n-násobného pomocí mocnin kosinusu argumentu jednoduchého, žádá tedy, aby vyšetřen byl vzorec tvaru

$$\mathrm{\begin{matrix}K\\S\end{matrix}}(nx) = \begin{matrix}f\\ \mathrm{F}\end{matrix}(n, \mathrm{K}^m(x)),$$

načež se známým spůsobem přejde k sinusu a kosinusu kyklickému, symbolem *sin* a *cos* značenému.

I.

Poněvadž tu platí, jakož povědomo,

$$\mathrm{K}(nx) = \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}, \tag{1}$$

$$\mathrm{K}^n(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^n}{2^n}, \tag{2}$$

obdržíme především, položíme-li, na zřeteli majíce jakosť hyperbolické funkce K,

$$\mathrm{K}(nx) = A_0\mathrm{K}^n(x) - A_2\mathrm{K}^{n-2}(x) + A_4\mathrm{K}^{n-4}(x) - \ldots,$$

kdež n jest číslo celistvé a positivní, součinitelové pak

$$A_0, \quad A_2, \quad A_4, \ldots$$

představují neurčité dosud hodnoty, jež se zřetelem ke vzorci (2) nahraditi možná jinými pomocí relac

$$A_0 = 2^{n-1},$$

$$A_{2k} = 2^{n-2k-1} B_{2k}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Podlé vzorce (1) a (2) vznikne tu tedy

$$e^{nx} + e^{-nx} = (e^x + e^{-x})^n - B_2(e^x + e^{-x})^{n-2} + B_4(e^x + e^{-x})^{n-4} - \ldots,$$

z čehož plyne, rozvineme-li jednotlivé členy na pravé straně podlé binomické poučky *), napřed

$$\begin{aligned} & e^{nx} + e^{-nx} \\ = {} & e^{nx} + n_1 e^{(n-2)x} + n_2 e^{(n-4)x} + n_3 e^{(n-6)x} + \ldots \\ & - B_2[e^{(n-2)x} + (n-2)_1 e^{(n-4)x} + (n-2)_2 e^{(n-6)x} + \ldots] \\ & + B_4[e^{(n-4)x} + (n-4)_1 e^{(n-6)x} + \ldots] \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Porovnáme-li pak součinitele stejných funkcí exponenciálních, obdržíme řadu rekurrentních vzorců

$$\begin{aligned} & n_1 - B_2 = 0, \\ & n_2 - (n-2)_1 B_2 + B_4 = 0, \\ & n_3 - (n-2)_2 B_2 + (n-4)_1 B_4 - B_6 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & n_k - (n-2)_{k-1} B_2 + (n-4)_{k-2} B_4 - \ldots = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

z nichž vyplyne postupným řešením

$$B_2 = \frac{n}{1},$$

$$B_4 = \frac{n}{2}(n-3)_1,$$

$$B_6 = \frac{n}{3}(n-4)_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

takže soudíme, že tu všeobecně platí

*) Zavedeno tu *nejjednodušší* označení binomických součinitelů.

$$B_{2k} = \frac{n}{k}(n-k-1)_{k-1}; \tag{4}$$

přímým řešením soustavy (3) podlé B_{2k} a tedy vyloučením ostatních B zjedná se pak přímo vzorec independentní

$$B_{2k} = \begin{vmatrix} n_1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ n_2, & (n-2)_1 & 1, & \ldots, & 0 \\ n_3, & (n-2)_2, & (n-4)_1, & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_k, & (n-2)_{k-1}, & (n-4)_{k-2}, & \ldots, & (n-2k+2)_1 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

z čehož se taktéž postupně obdrží hodnoty součinitelů

$$B_2, \ B_4, \ B_6, \ldots$$

způsobem arci čím dále tím obtížnějším.

I bude tedy, užijeme-li 2 na doplnění mocnin,

$$2K(nx) = [2K(x)]^n - \frac{n}{1}[2K(x)]^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)_1[2K(x)]^{n-4}$$
$$-\frac{n}{3}(n-4)_2[2K(x)]^{n-6} + \frac{n}{4}(n-5)_3[2K(x)]^{n-8} - \ldots, \tag{6}$$

kterýžto vzorec platí i pro *sudé* i pro *liché* n. V prvním případě, kde rozeznávati možná

$$n = 2k \text{ a } n = 4k,$$

bude míti poslední součinitel hodnotu

$$A_{2k} = -1, \quad A_{4k} = +1,$$

kdežto v případě druhém se obdrží

$$A_{4k+1} = n, \quad A_{4k+3} = -n.$$

Uvážíme-li konečně, že

$$K(ix) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x,$$

obdržíme ze vzorce (6) přímo vzorec kyklický

$$2\cos nx = (2\cos x)^n - \frac{n}{1}(2\cos x)^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)_1(2\cos x)^{n-4}$$

$$-\frac{n}{3}(n-4)_2(2\cos x)^{n-6} + \frac{n}{4}(n-5)_3(2\cos x)^{n-8} - \ldots \quad (7)$$

kterýž arci taktéž pro *sudé* i *liché* n jest platným.*)

II.

Abychom podobně vyjádřili $S(nx)$ pomocí jednotlivých mocnin $K(x)$ a podlé toho $\sin nx$ veličinami $\cos x$, užijme vzorce s neurčitými koëfficienty

$$\frac{S(nx)}{S(x)} = A_1 K^{n-1}(x) - A_3 K^{n-3}(x) + A_5 K^{n-5}(x) - \ldots,$$

a zaveďme opět označení

$$A_1 = 2^{n-1},$$

$$A_{2k+1} = 2^{n-2k-1} B_{2k+1},$$

načež obdržíme pomocí vzorce

$$S(nx) = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} \quad (8)$$

se zřetelem k výsledku algebraického dělení na straně levé a ke vzorci (2) na straně pravé napřed

---

*) Zde budiž zároveň poznamenáno, že vzorec (7) a tedy i (6) možná psáti ve formě determinantní takto:

$$\cos nx = \begin{vmatrix} \cos x, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 2\cos x & 1, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 2\cos x, & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2\cos x \end{vmatrix},$$

jakož jsem ukázal v pojednání „Eine neue Anwendung der Kettenbruchdeterminanten“ Sitzsb. d. k. b. Ges. d. Wiss. 15. Jänner 1886. Determinant jest zde stupně n-tého.

$$\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^x-e^{-x}}=e^{(n-1)x}+e^{(n-3)x}+e^{(n-5)x}+\dots$$
$$=(e^x+e^{-x})^{n-1}-B_3(e^x+e^{-x})^{n-3}+B_5(e^x+e^{-x})^{n-5}-\dots;$$

vyvineme-li pak jednotlivé členy pravé strany podlé binomické poučky, zjednáme si, porovnávajíce součinitele stejných výrazů exponenciálních, řadu rekurrentních vzorců

$$\begin{aligned}
1 &= (n-1)_1 - B_3,\\
1 &= (n-1)_2 - (n-3)_1 B_3 + B_5,\\
1 &= (n-1)_3 - (n-3)_2 B_3 + (n-5)_1 B_5 - B_7;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
1 &= (n-1)_k - (n-3)_{k-1} B_3 + (n-5)_{k-2} B_5 - \dots,
\end{aligned}$$

z nichž se obdrží postupným řešením

$$\begin{aligned}
B_3 &= (n-2)_1,\\
B_5 &= (n-3)_2,\\
B_7 &= (n-4)_3,\\
&\dots\dots
\end{aligned}\tag{9}$$

načež pak se soudí, že platí všeobecně

$$B_{2k+1}=(n-k-1)_k;$$

přímým pak řešením podlé B_{2k+1}, při čemž předcházející B nutno vyloučiti, se zjedná konečný vzorec independentní

$$B_{2k+1}=\begin{vmatrix}
(n-1)_1-1, & 1, & 0, & \dots, & 0\\
(n-1)_2-1, & (n-3)_1, & 1, & \dots, & 0\\
(n-1)_3-1, & (n-3)_2, & (n-5)_1, & \dots, & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
(n-1)_k-1, & (n-3)_{k-1}, & (n-5)_{k-2}, & \dots, & (n-2k+1)_1
\end{vmatrix}, \tag{10}$$

kdež jest determinant složen podobně, jako u vzorce (5).

I bude tedy všeobecně

$$\frac{S(nx)}{S(x)}=[2K(x)]^{n-1}-(n-2)_1[2K(x)]^{n-3}+(n-3)_2[2K(x)]^{n-5}$$
$$-(n-4)_3[2K(x)]^{n-7}+(n-5)_4[2K(x)]^{n-9}-\dots \tag{11}$$

kterýžto vzorec opět i pro *sudé* i pro *liché* n platí; zároveň pak jest poslední součinitel, jako v případě předcházejícím, buď ± 1 nebo $\pm n$, podlé toho, značí-li se příslušná přípona číslem lichým nebo sudým.

Uvážíme-li konečně, že

$$S(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin x,$$

obdržíme z posledního vzorce přímo

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = (2\cos x)^{n-1} - (n-2)_1 (2\cos x)^{n-3} + (n-3)_2 (2\cos x)^{n-5}$$
$$- (n-4)_3 (2\cos x)^{n-7} + (n-5)_4 (2\cos x)^{n-9} - \ldots, \quad (12)$$

což platí i pro *sudé* i pro *liché* hodnoty čísla n.*)

---

*) I zde možná užiti formy determinantní, jelikož se přiměřeným obratem obdrží

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \begin{vmatrix} 2\cos x, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 2\cos x, & 1, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 2\cos x, & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2\cos x \end{vmatrix},$$

kdež determinant jest stupně $(n-1)$ho. Kdybychom jej rozložili v součet determinantů dvou, kladouce na prvním místě

$$2\cos x = \cos x + \cos x,$$

obdrželi bychom z něho známou relaci

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n-1)x}{\sin x} \cdot \cos x + \cos(n-1)x,$$

anebo zavedeme-li označení

$$(n-1)x = y, \quad \text{tedy } nx = x + y,$$

v obvyklejším tvaru

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

čímž i správnost obou vzorců jest dotvrzena.

Konečně budiž tu ještě poznamenáno, že přímé vyčíslení determinantu předcházejícího, užije-li se vzorce (21), uveřejněného v pojednání: *Studnička* „Příspěvek k nauce o zlomcích řetězových aneb řetězcích" Časop. pro pěstov. math. a fys. Roč. III. pag. 69. jest nanejvýš jednoduchým a poskytuje přímo vzorec (12), načež možná z poslední relace určiti taktéž

$$\cos nx = \frac{\sin(n+1)x - \cos x \sin nx}{\sin x}$$

a i s této strany přijíti ke vzorci (7), jehož koëfficienty se podlé toho skládají z koëfficientů vzorce (12), což jest obdobou podoby vzorců (5) a (10).
