Ladislav Beneš

Poznámka k asteroidickému problému tří těles

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 5, 531--539

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109215

astroidy a druhá kruhu (o, l), jest spojnice bodu r se středem přepony tq normálou křivky R, tak že lze též její tečnu v bodě r sestrojiti.

Poznámka k asteroidickému problému tří těles.

Napsal **Ladislav Beneš.**

Asteroidický problém tří těles — dvě hmoty konečné velikosti na koncích téže spojnice konstantní délky otáčejí se v kružnicích kol společného těžiště v jisté pevné rovině a přitahují nekonečně malé těleso v téže rovině se nacházející — jest zevšeobecněním problému, kdy obě konečná tělesa jsou pevná. Tento jednoduchý problém dá se převésti na kvadratury, a učinil tak nejprve Euler. Upotřebí se při tom s výhodou elliptických souřadnic, to jest soustavy konfokálních ellips a hyperbol, jejichž společnými ohnisky jsou obě konečné hmoty. Zavedl jsem také do asteroidického problému elliptické souřadnice. a doufám, že rovnice, které zde podávám, nebudou bez zajímavosti.

Nechť vzdálenost konečných hmot m_1 a m_2 $(m_1 = 1, m_2 = m_2 \leqq 1)$ jest rovna $2c = 1$, potom jsou vzdálenosti těchto hmot od společného těžiště v poměru $m_2 : 1$. Nechť jsou dále ξ a η pravoúhlé souřadnice třetí hmoty m vzhledem k osám procházejícím těžištěm obou hmot m_1 a m_2, z nichž osa ξ leží stále ve spojnici $\overline{m_1 m_2}$ a čítá se kladně od leva na pravo ve směru $\overline{m_1 m_2}$; kladná část osy η leží od kladné části osy ξ o 90^0 ve směru rotace obou konečných těles — ve směru protivném pohybu ručiček hodinových. Jsou-li x a y pravoúhlé souřadnice tělesa m vzhledem k podobným osám, avšak procházejícím půlícím bodem spojnice $\overline{m_1 m_2}$, platí potom

$$x = \xi - \frac{1}{2}\frac{1 - m_2}{1 + m_2} = \xi - \frac{1}{2} k, \; y = \eta.$$

Volíme jednotku času tak, že gravitační konstanta jest rovna 1; úhlová rychlost otáčení konečných těles jest následkem toho dána vzorcem

$$n = \sqrt{1 + m_2}.$$

Živá síla tělesa m v souřadnicích ξ a η jest:

$$T = \tfrac{1}{2} m \left[\xi'^2 + \eta'^2 + 2n(\xi\eta' - \xi'\eta) + n^2(\xi^2 + \eta^2)\right];$$

v souřadnicích x a y:

$$T = \tfrac{1}{2} m \left[x'^2 + y'^2 + 2n(xy' - x'y) + nky' + n^2(x^2 + y^2) + n^2kx + n^2k^2c^2\right],$$

a funkce silová:

$$U = \frac{m}{\sqrt{y^2 + (x+c)^2}} + \frac{mm_2}{\sqrt{y^2 + (x-c)^2}} = \frac{m}{\varrho_1} + \frac{mm_2}{\varrho_2}.$$

Konečně zavedeme elliptické souřadnice pomocí vzorců:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

kdež $\lambda = \tfrac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)$, tak že $\lambda \geqq c$ a $c^2x^2 = \lambda^2\mu^2$

$\mu = \tfrac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho_2)$ $\quad |\mu| \leqq c \quad c^2y^2 = (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2).$

Snadnými výpočty dostaneme z toho:

$$x'^2 + y'^2 = (\lambda^2 - \mu^2)\left[\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\mu'^2}{c^2 - \mu^2}\right]$$

$$xy' - x'y = \mu\lambda' \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}} - \lambda\mu' \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{c^2 - \mu^2}}$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 + \mu^2 - c^2, \quad \varrho_1 = \lambda + \mu, \quad \varrho_2 = \lambda - \mu.$$

Vyjádřena v souřadnicích λ, μ, bude potom živá síla:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} m \Bigg\{ & (\lambda^2 - \mu^2)\left[\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\mu'^2}{c^2 - \mu^2}\right] \\ & + 2n\left[\mu\lambda' \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}} - \lambda\mu' \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{c^2 - \mu^2}}\right] \\ & + 2nk\left[\lambda\lambda' \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}} - \mu\mu' \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{c^2 - \mu^2}}\right] \\ & + n^2(\lambda^2 + \mu^2 - c^2) + 2n^2k\lambda\mu + n^2k^2c^2 \Bigg\} \end{aligned}$$

a funkce silová

$$U = \frac{m}{\lambda^2 - \mu^2}\left[(1 + m_2)\lambda - (1 - m_2)\mu\right].$$

Tyto vzorce umožňují nám nyní psáti rovnice pohybové ve tvaru kanonickém. Zavedeme dle obvyklého označování

$$q_1 = \lambda, \quad q_2 = \mu, \quad p_1 = \frac{\partial T}{\partial \lambda'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \mu'}.$$

Také již nebudeme psáti faktor m, jenž představoval velmi malou hmotu, ježto jím můžeme na obou stranách rovnic pohybových krátiti.

Následkem toho jest:

$$p_1 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} \lambda' + n (\mu + k\lambda) \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}},$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} \mu' - n (\lambda + k\mu) \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{c^2 - \mu^2}}.$$

Kanonické rovnice pohybové tělesa nekonečně malého jsou proto:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}.$$

H jest tak zvaná funkce Hamiltonova, a jest $H = T_2 - T_0 - U$, kdež T_2, resp. T_0 značí členy stupně druhého, resp. nulltého vzhledem ku λ' a μ' ve výrazu pro živou sílu T. Vyjádří-li se λ' a μ' pomocí p_1 a p_2 dle nahoře udaných vzorců a dosadí do výrazu pro H, dostane se:

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{2(q_1^2 - q_2^2)} \Big\{ &(q_1^2 - c^2) \Big[p_1^2 - 2 p_1 n \sqrt{\frac{c^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2}} (q_2 + k q_1) \\
&+ n^2 \frac{c^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2} (q_2 + k q_1)^2 \Big] \\
&+ (c^2 - q_2^2) \Big[p_2^2 + 2 p_2 n \sqrt{\frac{q_1^2 - c^2}{c^2 - q_2^2}} (q_1 + k q_2) \\
&+ n^2 \frac{q_1^2 - c^2}{c^2 - q_2^2} (q_1 + k q_2)^2 \Big] \\
&- n^2 (q_1^2 - q_2^2) \Big[q_1^2 + q_2^2 - c^2 + 2 k q_1 q_2 \Big] \Big\} - U - \frac{1}{2} n^2 k^2 c^2.
\end{aligned}$$

Přesvědčíme se však snadno výpočtem, že všechny členy v tomto výrazu pro H nezávisící od p_1 a p_2 (vyjma výraz U) se značně zjednoduší; součet všech těchto členů jest roven nulle. Upravíme-li ještě výraz pro H a položíme-li

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} \quad \text{a} \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2},$$

dostaneme partiellní differenciální rovnici, jejíž řešení dle Jacobiho theorému jest equivalentní s řešením hořeního systému rovnic kanonických. Tato part. dif. rovnice má tvar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(q_1^2 - q_2^2)}\Bigg\{&(q_1^2 - c^2)\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 \\ &- 2n\sqrt{(q_1^2 - c^2)(c^2 - q_2^2)}\left[(q_2 + kq_1)\frac{\partial W}{\partial q_1} - (q_1 + kq_2)\frac{\partial W}{\partial q_2}\right] \\ &+ (c^2 - q_2^2)\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2\Bigg\} - U = h, \qquad (1)\end{aligned}$$

kdež h jest konstanta.

Položíme-li v této rovnici $n = 0$, t. j. gravitační konstanta jest rovna nulle, dostaneme známou rovnici pro problém již zmíněný, kdy obě konečná tělesa jsou pevná, kteroužto rovnici možno bezprostředně řešiti.

Pro kanonické rovnice dostaneme následující výrazy:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= \frac{1}{(q_1^2 - q_2^2)}\left[(q_1^2 - c^2)p_1 - n(q_2 + kq_1)\sqrt{(q_1^2 - c^2)(c^2 - q_2^2)}\right] \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{1}{(q_1^2 - q_2^2)}\left[(c^2 - q_2^2)p_2 + n(q_1 + kq_2)\sqrt{(q_1^2 - c^2)(c^2 - q_2^2)}\right] \\ \frac{dp_1}{dt} &= -(M_1p_1^2 + N_1p_1 + P_1p_2 - M_1p_2^2 + R_1) \\ \frac{dp_2}{dt} &= -(M_2p_1^2 + N_2p_1 + P_2p_2 - M_2p_2^2 + R_2),\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

kdež značí:

$$M_1 = \frac{c^2 - q_2^2}{q_1^2 - q_2^2}\, q_1, \qquad M_2 = \frac{q_1^2 - c^2}{q_1^2 - q_2^2}\, q_2,$$

$$N_1 = -\frac{n}{(q_1^2 - q_2^2)^2} \Big\{ (q_1^2 - q_2^2)(q_2 + kq_1)\, q_1 \sqrt{\frac{c^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2}}$$
$$+ [k(q_1^2 - q_1^2) - 2(q_2 + kq_1)\, q_1] \sqrt{(q_1^2 - c^2)(c^2 - q_2^2)} \Big\}$$

$$N_2 = +\frac{n}{(q_1^2 - q_2^2)^2} \Big\{ (q_1^2 - q_2^2)(q_2 + kq_1)\, q_2 \sqrt{\frac{q_1^2 - c^2}{c^2 - q_2^2}}$$
$$- [(q_1^2 - q_2^2) + 2(q_2 + kq_1)\, q_2] \sqrt{(q_1^2 - c^2)(c^2 - q_2^2)} \Big\}$$

$$P_1 = +\frac{n}{(q_1^2 - q_2^2)^2} \Big\{ (q_1^2 - q_2^2)(q_1 + kq_2)\, q_1 \sqrt{\frac{c^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2}}$$
$$+ [(q_1^2 - q_2^2) - 2(q_1 + kq_2)\, q_1] \sqrt{(q_1^2 - c^2)(c^2 - q_2^2)} \Big\}$$

$$P_2 = -\frac{n}{(q_1^2 - q_2^2)^2} \Big\{ (q_1^2 - q_2^2)(q_1 + kq_2)\, q_2 \sqrt{\frac{q_1^2 - c^2}{c^2 \quad y^2}}$$
$$- [k(q_1^2 - q_2^2) + 2(q_1 + kq_2)\, q_2] \sqrt{(q_1^2 - c^2)(c^2 - q_2^2)} \Big\}$$

$$R_1 = -\frac{1}{(q_1^2 - q_2^2)^2} \Big\{ (q_1^2 - q_2^2)(1 + m_2)$$
$$- 2[(1 + m_2)\, q_1 - (1 - m_2)\, q_2]\, q_1 \Big\}$$

$$R_2 = +\frac{1}{(q_1^2 - q_2^2)^2} \Big\{ (q_1^2 - q_2^2)(1 - m_2)$$
$$- 2[(1 + m_2)\, q_1 - (1 - m_2)\, q_2]\, q_2 \Big\}.$$

Z těchto kanonických rovnic možno odvoditi ještě následující kombinace, které, kdyby se podařilo rovnice řešiti, byly by kontrolou výpočtu:

$$(q_2 + kq_1)\frac{dq_2}{dt} + (q_1 + kq_2)\frac{dq_1}{dt}$$
$$= \frac{1}{q_1^2 - q_2^2}\,[(q_2 + kq_1)(c^2 - q_2^2)\, p_2 + (q_1 + kq_2)(q_1^2 - c^2)\, p_1],$$

a dále kombinaci

$$M_2 \frac{dp_1}{dt} - M_1 \frac{dp_2}{dt},$$

kteráž vypočtena dá:

$$(q_1^2 - c^2)\, q_2 \frac{dp_1}{dt} - (c^2 - q_2^2)\, q_1 \frac{dp_2}{dt}$$

$$= \frac{1}{q_1^2 - q_2^2}\, n \sqrt{(q_1^2 - c^2)(c^2 - q_2^2)} \,\{[k (q_1^2 - c^2)\, q_2$$

$$- (c^2 - q_2^2)\, q_1]\, p_1 + [k (c^2 - q_2^2)\, q_1 - (q_1^2 - c^2)\, q_2]\, p_2 \}$$

$$- \frac{1}{q_1^2 - q_2^2} [(q_1^2 + c^2)\, q_2 (1 + m_2) - (q_2^2 + c^2)\, q_1 (1 - m_2)].$$

Předpokládejme nyní, že nekonečně malé těleso své relativní polohy vzhledem k oběma konečným tělesům po veškeru dobu trvání pohybu nemění, čili že jeho relativní rychlost jest rovna nulle. Tato možnost jest známa z Lagrangeových přesných řešení problému tří těles a z Hillovy práce o křivkách relativní nullové rychlosti. V libovolném takovém bodě nullové relativní rychlosti jest tedy $q_1 = konst$, $q_2 = konst$. Dle rovnic (2) musí také $p_1 = konst$, $p_2 = konst$, a jest dle těchto rovnic

$$p_1 = n (q_2 + k q_1) \sqrt{\frac{c^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2}}, \quad p_2 = - n (q_1 + k q_2) \sqrt{\frac{q_1^2 - c^2}{c^2 - q_2^2}}.$$

Avšak p_1 a p_2 musejí současně vyhovovati rovnici (1), kdež bylo položeno

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice (1) dostane se:

$$n^2 (q_1^2 - c^2)(q_1 + k q_2)^2 + n^2 (c^2 - q_2^2)(q_2 + k q_1)^2$$
$$+ 2h (q_1^2 - q_2^2) + 2 [(1 + m_2)\, q_1 - (1 - m_2)\, q_2] = 0. \qquad (3)$$

Tato rovnice podává nový způsob, jakým možno sestrojiti Hillovy křivky relativní nullové rychlosti, je-li dána konstanta h. Při tom však nutno míti na zřeteli, že q_1 a q_2 musejí vyhovovati podmínkám

$$q_1 \geqq c, \quad | q_2 | \leqq c. \qquad (4)$$

Provedeme zde diskussi pro pět základních bodů, tak zvaných libračních center, jestliže $m_1 = m_2 = 1$. V tomto případě jest

$$k = \frac{1 - m_2}{1 + m_2} = 0, \quad n^2 = 1 + m_2 = 2.$$

Rovnice (3) jest potom:

$$(q_1^2 - c^2)\, q_1^2 + (c^2 - q_2^2)\, q_2^2 + 2q_1 + h\,(q_1^2 - q_2^2) = 0. \qquad (5)$$

Dle podmínek (4) možno vyhověti rovnici (5) jen tehdy, je-li $h < 0$; bude míti proto h jisté negativní maximum. Pokládáme-li h za funkci veličin q_1 a q_2, musí toto maximum splňovati podmínky $\frac{\partial h}{\partial q_1} = \frac{\partial h}{\partial q_2} = 0.$

Dle rovnice (5) tyto podmínky jsou:

$$(q_1^2 - q_2^2)(4q_1^3 - 2c^2 q_1 + 2) - (q_1^4 - c^2 q_1^2 + 2q_1)\, 2q_1$$
$$- (c^2 - q_2^2)\, q_2^2 \,.\, 2q_1 = 0,$$
$$(q_1^2 - q_2^2)(2c^2 q_2 - 4q_2^3) + (c^2 - q_2^2)\, q_2^2 \,.\, 2q_2$$
$$+ [(q_1^2 - c^2)\, q_1^2 + 2q_1]\, 2q_2 = 0.$$

Z druhé z těchto rovnic plyne, že $q_2 = 0$ a dosazením této hodnoty do první rovnice dostane se $q_1^3 - 1 = 0$. Z rovnice (5) potom při $q_1 = 1$, $q_2 = 0$ jest určena maximální hodnota pro $h = -\frac{11}{4}$. Ježto $q_2 = 0$ značí osu $x = 0$ a $q_1 = \lambda = 1 = 2c = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)$, jest $\varrho_1 = \varrho_2 = 2c$. Tím dostanou se dva body (nad a pod osou $y = 0$), které tvoří se základnou $m_1 m_2 = 2c$ dva rovnostranné trojúhelníky. Body tyto se nazývají librační centra.

Dle podmínek (4) soudili bychom podobně, že v rovnici (3) musí nutně $h < 0$. Poznali bychom však jako dříve, že maximální hodnota pro h dostane se pro $q_1 = 1$, $q_2 = 0$. Zavedením těchto hodnot do rovnice (3) dostane se všeobecný výraz pro h_{max} pro libovolnou hmotu $m_2 \lesseqgtr 1$. Tento výraz jest:

$$2h_{max} = -3\,(1 + m_2) + \frac{m_2}{1 + m_2}. \qquad (6)$$

Jestliže h co do absolutní hodnoty jest velmi velké, tu dle rovnice (5) buď q_1 a q_2 se málo od sebe liší, obě jsou blízké hodnotě c, nebo jest q_1 velmi velké. V prvém případě sestává křivka Hillova ze dvou uzavřených od kružnice se málo lišících křivek kol hmot m_1 a m_2, v druhém případě z podobné avšak jediné křivky, která obklopuje obě hmoty. Při vzrůstajícím h splynou konečně obě křivky v jedinou a mají na ose $y = 0$ dvojnásobný bod. Pro bod ten platí proto $q_1 = c$ a mimo to musí differenciální kvotient rovnice (5) dle q_2 rovnati se nulle. Tomu jest tak pro $q_2 = 0$ a z toho $h = -4$. Bod tento leží uprostřed mezi hmotami m_1 a m_2, jak se musilo ostatně dle symmetrie očekávati, a jest třetím libračním centrem. Rovnice oné křivky s dvojnásobným bodem v elliptických souřadnicích jest tedy

$$(q_1^2 - c^2)\, q_1^2 + (c^2 - q_2^2)\, q_2^2 + 2q_1 - 4\,(q_1^2 - q_2^2) = 0.$$

Zároveň však jest to rovnice křivky, která obklopuje obě hmoty zevně ve větší vzdálenosti od počátku souřadnic. Průsečíky těchto křivek s osou $y = 0$ dostanou se, položí-li se do hoření rovnice $q_2 = c$, tedy platí

$$q_1^4 - (c^2 + 4)\, q_1^2 + 2q_1 + 4c^2 = 0.$$

Přibližná řešení této rovnice jsou $q_1 = 0{\cdot}9$, $q_1 = \frac{3}{2}$. Průsečík zevní křivky s osou $x = 0$ dostane se, položí-li se $q_2 = 0$, to jest platí:

$$q_1^3 - (c^2 + 4)\, q_1 + 2 = 0.$$

Přibližné řešení jest $q_1 = 1{\cdot}8$.

Při dalším vzrůstu h vzniknou opět dvě od sebe oddělené křivky, které však obě tělesa současně obklopují, konečně však také přejdou jedna ve druhou, tak že mají dva dvojnásobné body na ose $y = 0$. (Viz na př.: Charlier, Die Mechanik des Himmels, II. sv. pag. 117.) Pro tyto body platí $q_2 = c$ a dif. kvotient rovnice (5) dle q_1 musí býti roven nulle. Tedy

$$q_1^4 - (c^2 - h)\, q_1^2 + 2q_1 - hc^2 = 0,\quad 2q_1^3 - (c^2 - h)\, q_1 + 1 = 0.$$

Vyloučením h z těchto rovnic dostane se rovnice

$$q_1^5 - 2c^2 q_1^3 - q_1^2 + c^4 q_1 - c^2 = 0,$$

jejíž jedině přípustný kořen se přibližně rovná $q_1 = 1{\cdot}2$. Tímto dostanou se na ose $y = 0$ dva body, které jsou dalšími dvěma libračními centry. Dosazením za $q_1 = 1{\cdot}2$ do obou hořeních rovnic dostane se pro h přibližná hodnota $h = -3{\cdot}5$. Rovnice této křivky tedy jest

$$(q_1^2 - c^2)\, q_1^2 + (c^2 - q_2^2)\, q_2^2 + 2q_1 - 3{\cdot}5\,(q_1^2 - q_2^2) = 0.$$

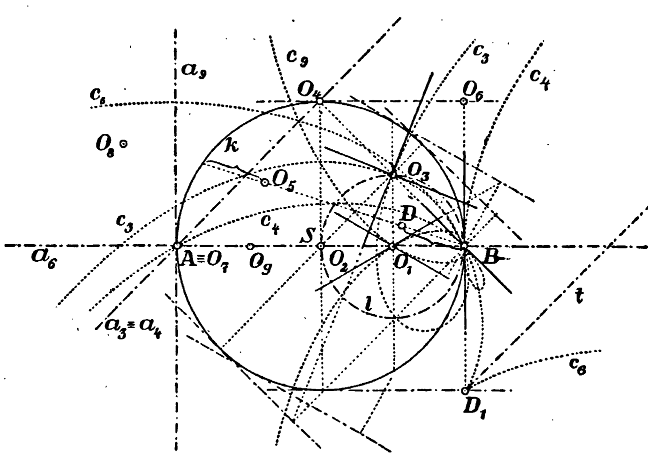
Rovnice (5) poskytuje všeobecnou rovnici Hillových křivek relativní nullové rychlosti pro $m_1 = m_2$; konstanta h nesmí však překročiti maximální hodnotu $h_{max} = -\frac{11}{4} = -2\cdot75$. Pro libovolnou hmotu $m_2 \overline{\overline{<}} 1$ platí rovnice (3) a (6). Rovnice (3) nazývá se také Jacobiho integrál asteroidického problému tří těles; pro rychlosti obecné jest jím rovnice (1), kde nutno dosaditi za p_1 a p_2 obecné hodnoty.

O ploše kardioidicko-šroubové.

Napsal **Vladimír Mašek**, assistent české techniky v Brně.

(Dokončení.)

Dospěli jsme ku konstrukci unikursálných cirkulárných křivek 3. řádu přímo z tečen i bodů dotyku. Je-li dána základní kružnice k nad průměrem $\overline{AB}$ (obr. 6.) a myslíme-li si kardi-



Obr. 6.

oidu s co úpatnici této kružnice pro pól A, můžeme rozděliti křivky, které naší konstrukcí pro různé polohy pólu O dostaneme, v následující skupiny:

a) Nachází-li se pól O uvnitř kardioidy s, dostaneme křivky s reálným dvojným bodem. Pro polohu pólu O_1 dostali jsme trisekční křivku Mac-Laurinovu. Stotožní-li se pól O se