Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav A. Hruška

Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 1, 6--16

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109204`

Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných.

Dr. techn. *Václav Hruška*, soukr. docent a asistent české vys. školy technické v Praze.

I.

Odvodím nejprve pomocnou větu:

Bud

$$(S)\quad f_\alpha(x_1, x_2, \dots x_n) = \overset{(\alpha)}{a}_{111}\, x_1^3 + \overset{(\alpha)}{a}_{112}\, x_1^2 x_2 + \dots + \overset{(\alpha)}{a}_{n,n,n}\, x_l^3$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots m)$$

systém $m \geqq 4$ kubických n- árních forem o celistvých racionálních koeficientech o NSM (největší společné míře) D a nechť je možno vybrati dvě z proměnných $x_1, x_2, \dots x_n$ tak, aby položíme-li ostatních $(n\text{-}2)$ proměnných rovno nule, mezi takto vzniklými m binárními formami byly aspoň 4 takové, že determinant utvořený z jejich koeficientů je od nuly různý. Nejsou-li splněny kongruence

$$(K)\qquad \overset{(\alpha)}{a}_{i,i,i} \quad 0,\ \ \overset{(\alpha)}{a}_{i,i,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{i,k,k} \quad 0,\ \ \overset{(\alpha)}{a}_{i,k,l} \quad 0 \quad (\text{mod } 2D)$$
$$(i, k, l = 1, 2, \dots n;\ i < k < l;\ \alpha = 1, 2, \dots m)$$

lze zvoliti za $x_1, x_2, \dots x_n$ takových n celých racionálních čísel, že m čísel $f_\alpha(x_1, x_2, \dots x)$ má za NSM D.

1. Mějme systém $m \geqq 4$ kubických mnohočlenů jedné proměnné o celých *nesoudělných* koeficientech racionálních

$$f_\alpha(x) = \overset{(\alpha)}{a_1} x^3 + \overset{(\alpha)}{a_2} x^2 + \overset{(\alpha)}{a_3} x + \overset{(\alpha)}{a_4}$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots m)$$

a buďte $p, q, r \dots$ vespolek různá prvočísla větší než 3. Vždy lze zvoliti x tak, aby m čísel $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ nemělo míry p. Musí to dokonce nastati v případě, že $x \equiv 0$ nebo $x \equiv 1$, nebo $x \equiv 2$, nebo $x \equiv 3$ (mod p). Kdyby totiž byla všechna čísla $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ ve všech těchto případech dělitelna p, bylo by:

$$\left.\begin{aligned} \overset{(\alpha)}{a_4} &\equiv 0 \\ \overset{(\alpha)}{a_1} + \overset{(\alpha)}{a_2} + \overset{(\alpha)}{a_3} + \overset{(\alpha)}{a_4} &\equiv 0 \\ 8\overset{(\alpha)}{a_1} + 4\overset{(\alpha)}{a_2} + 2\overset{(\alpha)}{a_3} + \overset{(\alpha)}{a_4} &\equiv 0 \\ 27\overset{(\alpha)}{a_1} + 9\overset{(\alpha)}{a_2} + 3\overset{(\alpha)}{a_3} + \overset{(\alpha)}{a_4} &\equiv 0 \end{aligned}\right\}\ (\text{mod } p)$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots m)$$

a odtud by proti supposici plynulo

$$\overset{(\alpha)}{a_i} \equiv 0 \ (\text{mod } p)\ (i = 1, 2, 3, 4;\ \alpha = 1, 2, \dots m).$$

Stačí tedy vyšetřiti f_α (0), f_α (1), f_α (2) a f_α (3). Nechť na př. f_α (μ_p) $(\alpha = 1, 2, \ldots m, \mu_p = 0$ neb 1, 2, 3) nemají společné míry p. Patrně též m čísel f_α (x) $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$, $x \equiv \mu_p$ (mod p) nemá společnou míru p. Stejně nebudou všechna f_α $(x) \equiv 0$ (mod q) $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$, bude-li $x \equiv \mu_q$ (mod q), kde μ_q je vhodně voleno rovno 0, 1, 2 neb 3. Atd.

Je-li tedy x_1 řešením systému kongruencí

$$x \equiv \mu_p \text{ (mod } p)$$
$$x \equiv \mu_q \text{ (mod } q)$$

jejž vždy lze řešiti, nebudou všechna f_α (x) $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$ dělitelna ani p, ani $q, \ldots$

NSM čísel f_α (x) $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$ dělí všecky determinanty

$$\nabla_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} \overset{(\alpha)}{a_1} & \overset{(\alpha)}{a_2} & \overset{(\alpha)}{a_3} & \overset{(\alpha)}{a_4} \\ \overset{(\beta)}{a_1} & \overset{(\beta)}{a_2} & \overset{(\beta)}{a_3} & \overset{(\beta)}{a_4} \\ \overset{(\gamma)}{a_1} & \overset{(\gamma)}{a_2} & \overset{(\gamma)}{a_3} & \overset{(\gamma)}{a_4} \\ \overset{(\delta)}{a_1} & \overset{(\delta)}{a_2} & \overset{(\delta)}{a_3} & \overset{(\delta)}{a_4} \end{vmatrix}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots m)$$

o nichž předpokládáme, že nejsou vesměs rovny nule.

Buď $\triangle = 2^\varrho\, 3^\sigma\, p^\lambda\, q^\mu \ldots$ $(p, q \ldots$ vespolek různá prvočísla $> 3)$ *NSM* všech $\nabla_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots m)$. Bude možno voliti $x = x_1$ tak, aby nebyla všechna f_α (x_1) $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$ dělitelna ani p, ani $q, \ldots$; každé $x \equiv x_1$ (mod $pq \ldots$) pak má tutéž vlastnost a *NSM* $(f_\alpha\, [x])$ $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$ bude tvaru $M = 2^\pi\, 3^\omega$ $(\pi, \omega$ celá kladná racionální čísla).

Aby však všechna čísla f_α (x) $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$ byla dělitelna 2, musí býti splněny kongruence

$$\overset{(\alpha)}{a_4} \equiv 0 \text{ (mod 2) když je } x \equiv 0 \text{ (mod 2)}$$

$$\overset{(\alpha)}{a_4} + \overset{(\alpha)}{a_2} + \overset{(\alpha)}{a_3} + \overset{(\alpha)}{a_4} \equiv 0 \text{ (mod 2) když je } x \equiv 1 \text{ (mod 2).}$$

Jelikož mezi řešeními kongruence $x \equiv x_1$ (mod $pq \ldots$) je nekonečně mnoho sudých a nekonečně mnoho lichých, tu aby všechna čísla f_α (x) $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$, $x \equiv x_1$ (mod $pq \ldots$) byla dělitelna 2, musí býti splněny kongruence

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} \overset{(\alpha)}{a_4} &\equiv 0 \\ \overset{(\alpha)}{a_1} + \overset{(\alpha)}{a_2} + \overset{(\alpha)}{a_3} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ (mod 2)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

Jsou-li splněny kongruence (1) tu všechna čísla f_α (x) $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$ jsou dělitelna 2, ať je x jaké chce. Nejsou-li splněny, lze zvoliti takové řešení x_2 kongruence $x \equiv x_1$ (mod pq . . .), že nejsou všechna $f_\alpha(x_2)$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ dělitelna ani 2, ani p, ani $q, \dots$ Tutéž vlastnost má každé $x \equiv x_2$ (mod $2pq \dots$).

Aby nyní všechna čísla $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ byla dělitelna 3, musí býti splněny kongruence:

$$\overset{(\alpha)}{a}_4 \equiv 0 \pmod 3 \text{ při } x \equiv 0 \pmod 3$$

$$\overset{(\alpha)}{a}_1 + \overset{(\alpha)}{a}_2 + \overset{(\alpha)}{a}_3 + \overset{(\alpha)}{a}_4 \equiv 0 \pmod 3 \text{ při } x \equiv 1 \pmod 3$$

$$8\overset{(\alpha)}{a}_1 + 4\overset{(\alpha)}{a}_2 + 2\overset{(\alpha)}{a}_3 + \overset{(\alpha)}{a}_3 \equiv 0 \pmod 3 \text{ při } x \equiv 2 \pmod 3$$

Aby tedy veškerá čísla $f_\alpha(x)$ $(\alpha - 1, 2, \dots m)$, $x \equiv x_2$ (mod $2pq \dots$) byla dělitelna 3, musely by býti splněny kongruence

$$\text{(2)} \qquad \left.\begin{array}{r} \overset{(\alpha)}{a}_4 \equiv 0 \\ \overset{(\alpha)}{a}_1 + \overset{(\alpha)}{a}_3 \equiv 0 \\ \overset{(\alpha)}{a}_2 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod 3 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

Nejsou-li splněny tyto kongruence, lze zvoliti takové řešení x_3 kongruence $x \equiv x_2$ (mod $2pq \dots$) aby nebyla všechna $f_\alpha(x_3)$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ dělitelna ani 2, ani 3, ani p, ani $q \dots$ Pak tedy $f_\alpha(x_3)$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ musí býti nesoudělná, neboť jejich NSM musí děliti $\Delta = 2^\varrho\, 3^\sigma\, p^\lambda\, q^\mu \dots$ Patrně tutéž vlastnost mají čísla $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$, $x \equiv x_3$ (mod $2 . 3 . p . q \dots$).

Nejsou-li tedy splněny kongruence (1) ani (2), lze zvoliti x tak, aby $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ nebyla nesoudělná.

2. Buď

$$f_\alpha(x_1, x_2, \dots x_n) = \overset{(\alpha)}{a}_{11}\, x_1^3 + \overset{(\alpha)}{a}_{112}\, x_1 x_2^2 + \dots + \overset{(\alpha)}{a}_{nnn}\, x_n^3$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots m)$$

systém forem vytčených vlastností a mimo to buďte koeficienty $\overset{(\alpha)}{a}_{i,k,l}$ $(i, k, l = 1, 2, \dots n;\ \alpha = 1, 2, \dots m)$ nesoudělné a nechť na příklad právě determinant

$$D_{1,2,3,4} = \begin{vmatrix} \overset{(1)}{a}_{1,1,1} & \overset{(1)}{a}_{1,1,2} & \overset{(1)}{a}_{1,2,2} & \overset{(1)}{a}_{2,2,2} \\ \overset{(2)}{a}_{1,1,1} & \overset{(2)}{a}_{1,1,2} & \overset{(2)}{a}_{1,2,2} & \overset{(2)}{a}_{2,2,2} \\ \overset{(3)}{a}_{1,1,1} & \overset{(3)}{a}_{1,1,2} & \overset{(3)}{a}_{1,2,2} & \overset{(3)}{a}_{2,2,2} \\ \overset{(4)}{a}_{1,1,1} & \overset{(4)}{a}_{1,1,2} & \overset{(4)}{a}_{1,2,2} & \overset{(4)}{a}_{2,2,2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Srovnejme formy dle mocnin x_1:

$$f_\alpha(x_1, x_2, \dots x_n) = \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1}\, x_1^3 + \overset{(\alpha)}{g}_1(x_2, \dots x_n)\, x_1^2 +$$
$$+ \overset{(\alpha)}{g}_2(x_2, \dots x_n)\, x_1 + \overset{(\alpha)}{g}_3(x_2, \dots x_n) \quad (\alpha = 1, 2, \dots m)$$

kde $\overset{(\alpha)}{g}_i\,(x_2, \dots x^n)$ jsou (n-1) -ární stupně i; pak nejsou všechny determinanty

$$\nabla_{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta} = \begin{vmatrix} \overset{(\alpha)}{a}_{1\,1\,1} & \overset{(\alpha)}{g}_1 & \overset{(\alpha)}{g}_2 & \overset{(\alpha)}{g}_3 \\ \overset{(\beta)}{a}_{1\,1\,1} & \overset{(\beta)}{g}_1 & \overset{(\beta)}{g}_2 & \overset{(\beta)}{g}_3 \\ \overset{(\gamma)}{a}_{1\,1\,1} & \overset{(\gamma)}{g}_1 & \overset{(\gamma)}{g}_2 & \overset{(\gamma)}{g}_3 \\ \overset{(\delta)}{a}_{1\,1\,1} & \overset{(\delta)}{g}_1 & \overset{(\delta)}{g}_2 & \overset{(\delta)}{g}_3 \end{vmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta - 1, 2, \dots m)$$

identicky rovny nule. Neboť tyto determinanty jsou (n-1) -árné formy 6. stupně a koeficient při $x_2^{\,6}$ v $\nabla_{1,2,3,4}$ je $D_{1,2,3,4} \neq 0$.

x_1 nebude možno zvoliti tak, aby $f_\alpha\,(x_1, x_2, \dots x_n)$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ byla nesoudělná pouze tenkráte, budou-li *pro každé* $x_2, x_3, \dots x_n$ splněny kongruence (mod 2)

$$\overset{(\alpha)}{g}_3\,(x_2, \dots x_n) = \overset{(\alpha)}{a}_{2,2,2}\,x_2^3 + \overset{(\alpha)}{a}_{2,2,3}\,x_2^2\,x_3 + \overset{(\alpha)}{a}_{2,3,3}\,x_2\,x_3^2 +$$
$$+ \overset{(\alpha)}{a}_{3,3,3}\,x_3^3 + \dots + \overset{(\alpha)}{a}_{n\,n,n}\,x_n^3 \equiv 0$$

$$(1') \qquad \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{g}_1\,(x_2, \dots x_n) + \overset{(\alpha)}{g}_2\,(x_2, \dots x_n) =$$
$$= \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,2}\,x_2 + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,3}\,x_3 + \dots + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1\,n}\,x_n + \overset{(\alpha)}{a}_{1,2,2}\,x_2^2 +$$
$$+ \overset{(\alpha)}{a}_{1,2,3}\,x_2\,x_3 + \overset{(\alpha)}{a}_{1,3,3}\,x_3^2 + \dots + \overset{(\alpha)}{a}_{1,n,n}\,x_n^3 \equiv 0$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots m)$$

nebo kongruence (mod 3)

$$\overset{(\alpha)}{g}_3\,(x_2, \dots x_n) = \overset{(\alpha)}{a}_{2,2,2}\,x_2^3 + \overset{(\alpha)}{a}_{2,2,3}\,x_2^2\,x_3 + \overset{(\alpha)}{a}_{2,3,3}\,x_2\,x_3^2 +$$
$$+ \overset{(\alpha)}{a}_{3,3,3}\,x_3^3 + \dots + \overset{(\alpha)}{a}_{n,n,n}\,x_n^3 \equiv 0$$

$$(2') \quad \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{g}_2\,(x_2, \dots x_n) = \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,2,2}\,x_2^2 + \overset{(\alpha)}{a}_{1,2,3}\,x_2\,x_3 +$$
$$+ \overset{(\alpha)}{a}_{1,3,3}\,x_3^2 + \dots + \overset{(\alpha)}{a}_{1,n,n}\,x_n^2 \equiv 0$$
$$\overset{(\alpha)}{g}_1\,(x_2, \dots x_n) = \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,2}\,x_2 + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,3}\,x_3 + \dots + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,n}\,x_n \equiv 0$$

Kongruence (2′) nejsou splněny pro každé $x_2, x_3, \dots x_n$. Opak by měl totiž za následek, že by všechny koeficienty $\overset{(\alpha)}{a}_{i,k,l}$ $(\alpha = 1, 2, \dots m;$ $i, k, l = 1, 2, \dots n)$ byly dělitelny 3. Vidíme to dosadíme-li vesměs (mod 3): $x_i \equiv 0$ $(i = 2, 3, \dots n)$ dává $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} \equiv 0$; $x_k \equiv 1$, $x_i \equiv 0$ $(i = 2, 3, \dots n,\ i \neq k)$ dává $\overset{(\alpha)}{a}_{k,k,k} \equiv 0$, $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,k} \equiv 0$, $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,k} \equiv 0$ a tedy též $\overset{(\alpha)}{a}_{1,k,k} \equiv 0$; $x_k \equiv 1$, $x_l \equiv 1$, $k \neq l$, $x_i \equiv 0$

$(i = 2, 3, \ldots n;\ i \neq k,\ i \neq l)$ dává $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,l} \equiv 0$, $\overset{(\alpha)}{a}_{k,k,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,k,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,l,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{l,l,l} \equiv 0$, $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{1\,k,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,l,l} \equiv 0$ tedy nově $\overset{(\alpha)}{a}_{1,k,l} \equiv 0$; $x_k \equiv 1$, $x_l \equiv 1$, $x_r \equiv 1$, $k \neq l \neq r$, $k \neq r$, $x_i \equiv 0$ $(i = 2,\ 3 \ldots\ n,\ i \neq k,\ i \neq l,\ i \neq r)$ dává pak $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1\,r} \equiv 0$, $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,l,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,r,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{1\,l,r} \equiv 0$, $\overset{(\alpha)}{a}_{k,k,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,k,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,l,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{l,l,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,k,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,r,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{r,r,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{l,l,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{l,r,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,l,r} \equiv 0$, tedy nově $\overset{(\alpha)}{a}_{k,\ ,r} \equiv$ **0.** Skutečně by muselo tedy býti $\overset{(\alpha)}{a}_{k,l,r} \equiv 0$ $(k, l, r = 1, 2, \ldots n$ (mod 3.)

Buďte tedy $\overset{(3)}{x}_i\ (i = 2, 3, \ldots n)$ takové hodnoty proměnných, že pro ně nejsou splněny kongruence (2′). Patrně pro každé řešení kongruencí

$$x_i \equiv \overset{(3)}{x}_i \pmod 3 \qquad (i = 2, 3, \ldots n)$$

platí totéž.

Aby nyní byly splněny kongruence (1′) pro každé $x_2, x_3, \ldots x_n$ muselo by býti (mod 2): pro $x_i \equiv 0$ $(i = 2, 3, \ldots n)$ $a_{1,1,1} \equiv 0$; pro $x_k \equiv 1$, $x_i \equiv 0$ $(i = 2, 3, \ldots n;\ i \neq k)$ $\overset{(\alpha)}{a}_{k,k,k} \equiv 0$, $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,k} \equiv 0$; pro $x_k \equiv 1$, $x_l \equiv 1$, $k \neq l$, $x_i \equiv 0$, $(i = 2, 3, \ldots n;\ i \neq k, i \neq l)$ $\overset{(\alpha)}{a}_{k,k,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,k,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,l,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{l,l,l} \equiv 0$, $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,l,l} \equiv 0$; a pro $x_k \equiv 1$, $x_l \equiv 1$, $x_r \equiv 1$, $k \neq l \neq r$, $k \neq r$, $x_i \equiv 0$ $(i = 2, 3, \ldots n;\ i \neq k,\ i \neq l,\ i \neq r)$ $\overset{(\alpha)}{a}_{k,k,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,k,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,l,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{l,l,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,k,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,r,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{r,r,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{l,l,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{l,r,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{k,l,r} \equiv 0$, $\overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1\,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,l,l} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,k,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,r,r} + \overset{(\alpha)}{a}_{1,l,r} \equiv 0$. Odtud usuzujeme, že by muselo býti

$$(3) \qquad \left.\begin{aligned} \overset{(\alpha)}{a}_{i,i,i} &\equiv 0 \\ \overset{(\alpha)}{a}_{i,i,k} + \overset{(\alpha)}{a}_{i,k,k} &\equiv 0 \\ \overset{(\alpha)}{a}_{i,k,l} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

$(i, k, l = 1, 2, \ldots n;\ i \neq k \neq l,\ i \neq l,\ \alpha = 1, 2, \ldots m)$.

Nejsou-li splněny kongruence (3), lze zvoliti $\overset{(2)}{x}_2, \overset{(2)}{x}_3, \ldots \overset{(2)}{x}_n$ tak, aby nebyly splněny kongruence (1′). Pak též pro $x_i \equiv \overset{(2)}{x_i}$ (mod 2) ($i = 2, 3, \dots n$) nebudou (1′) splněny. Jelikož lze současně vyhověti $x_i \equiv \overset{(2)}{x_i}$ (mod 2) a $x_i \equiv \overset{(3)}{x_i}$ (mod 3) ($i = 2, 3, \dots n$) — řešení buď $\overset{(1)}{x_i}$ ($i = 2, 3, \dots n$) — možno zvoliti $x_2, \dots x_n$ tak, že nejsou splněny ani (1′) ani (2′). Totéž pak platí pro řešení kongruencí $x \equiv \overset{(1)}{x_i}$ (mod 6) ($i = 2, 3, \dots n$). Tato řešení ($x_2, \dots x_n$) nehoví ani (1′) ani (2′) a tvoří diskretní množinu (n-1) — rozměrnou.

Uvažujme nyní hodnotu $\nabla_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ v bodech této množiny. Nemohou všechny $\nabla_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ ve všech bodech této (n-1) — rozměrné množiny býti rovny nule; v opáčném přídadě by totiž $\triangle_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ muselo se rovnati nule identicky, neboť to jest forma (n—1) -ární. Avšak všechny $\triangle_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ nejsou identicky rovny nule, neboť dle učiněného předpokladu nejsou rovny nule všechny determinanty $\triangle_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ při $x_2 = 1$, $x_i = 0$ ($i = 3, 4, \dots n$).

Můžeme tedy určiti x_1 tak, aby všechny

$$f_\alpha (x_1, x_2, \dots x_n) = \overset{(\alpha)}{a}_{1,1,1} x_1^3 + \overset{(\alpha)}{g_1} (x_2, \dots x_n) \, x_1^2 + \overset{(\alpha)}{g_2} (x_2, \dots x_n) \, x_i + \overset{(\alpha)}{g_3} (x_2, \dots x_n) \quad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

neměly společné míry.

Věta tvrzená na počátku pak je samozřejmá.

II.

3. Mějme bilineární *alternující* formu o celých racionálných koeficiantech

$$(4) \qquad A = \sum_{i,k=1}^{6} a_{i,k} \, x_i \, y_k$$

a formu o determinantu 1:

$$(5) \qquad E = x_1 y_4 - x_4 y_1 + x_2 y_5 - x_5 y_2 + x_3 y_6 - x_6 y_3 = \sum_{i,k=1}^{6} \varepsilon_{i,k} \, x_i \, y_k.$$

Chceme redukovati svazek $A - \lambda E$ na nejjednodušší tvar pomoci kogredientní transformace o celých racionálných elementech, transformující formu E v samu sebe. Buď

$$(6) \qquad C \left\{ \begin{aligned} x_i &= \sum_{\varrho=1}^{6} c_{i\varrho} \, \bar{x}_\varrho \\ y_k &= \sum_{\sigma=1}^{6} c_{k\sigma} \, \bar{y}_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (i, k = 1, 2, \dots 6)$$

libovolná lineární kogredientní transformace a označme pruhem nahoře útvary transformované, tedy transformovanou formu*) ,

[1]) Význam symbolů z theorie bilineárnich forem viz P. Muth, Theorie und Anwendung der Elementarheiler.

$$C' A C = \overline{A} = \sum_{\varrho, \sigma = 1}^{6} \overline{a_{\varrho, \sigma}}\, \overline{x_\varrho}\, \overline{x_\sigma};$$

jest

(7) $$\overline{a_{\varrho, \sigma}} = \sum_{i, k = 1}^{6} a_{i,k}\, c_{i\varrho}\, c_{k\sigma} \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots 6)$$

Transformuje-li C ještě E samu v sebe, $C'EC = E$, takže

(8) $$\overline{\varepsilon_{\varrho, \sigma}} = \varepsilon_{\varrho, \sigma} \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots 6)$$

tu rovněž forma

$$\sum_{i, k = 1}^{6} \overset{(1)}{a_{i,k}}\, x_i\, y_k = \overset{(1)}{A} = A - \omega E = \sum_{i, k = 1}^{6} (a_{i,k} - \omega \varepsilon_{i,k})\, x_i y_k$$

(kde ω jest libovolné číslo) se transformuje touž transformací C v

$$\sum_{\varrho, \sigma = 1}^{6} \overset{(1)}{\overline{a_{\varrho, \sigma}}}\, \overline{x_\varrho}\, \overline{y_\sigma} = \overset{(1)}{\overline{A}} = \overline{A} - \omega E$$

kde tedy je

(9) $$\overset{(1)}{\overline{a_{i,k}}} = \overline{a_{i,k}} - \omega\, \varepsilon_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots 6).$$

Označme $(i_1\, i_2 \ldots i_{2h})$ pfaffian*) o $2h$ indexech, utvořený z elementů matice A a $(123456) = K$. Označme při $r < s$ koeficient při a_{rs} v K násobený $(-1)^{r+s-1}$ stručně K_{rs}; při $r > s$ jest $K_{rs} = - K_{rs}$, $K_{rr} = o$ $(r, s = 1, 2, \ldots 6)$.

Výrazy

(10) K, $L = -(K_{14} + K_{25} + K_{36})$, $M = -(a_{14} + a_{25} + a_{36})$

jsou invarianty formy A vzhledem k transformacím, které nemění formy E**), t. j. $\overline{K} = K$, $\overline{L} = L$, $\overline{M} = M$. Dostaneme je tak, že utvoříme pfaffian

(11) $$P(\lambda) = K + L\lambda + M\lambda^2 + \lambda^3$$

z elementů pseudosymmetrické matice $A - \lambda E$.

Předpokládejme v následujícím, že $P(\lambda)$ je v oboru racionálných čísel irreducibilní.

Jelikož matice $\left\| \frac{K_{ik}}{K} \right\| = A^{-1}$, bude po transformaci

(12) $$\overline{K_{\varrho, \sigma}} = \sum_{i, k = 1}^{6} K_{i,k}\, \gamma_{i\varrho}\, \gamma^{k\sigma} \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots 6)$$

kde matice

(13) $$\| \gamma_{rs} \| = C^{-1} \quad (r, s = 1, 2, \ldots 6);$$

$\overline{K_{\varrho\sigma}}$ je utvořeno z $\overline{a_{\varrho, \sigma}}$ právě tak, jako byly $K_{i,k}$ z $a_{i,k}$.

*) Pfaffiany, jich tvoření, rozvoje a věty o nich viz E. v. Weber, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem, kap. I.

**) O systémech singul. relací... odst. 6. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. 48.

Buď dále $\overset{(1)}{K}_{i,k}$ utvořeno z $\overset{(1)}{a}_{i,k}$ právě tak, jako byly $K_{i,k}$ utvořeny z $a_{i,k}$. Bude:

$$(14)\left\{\begin{array}{llll}
\overset{(1)}{K}_{12} = K_{12} \quad \omega a_{45} & & \overset{(1)}{K}_{25} = K_{25} - \omega a_{25} & M\omega \quad \omega^2 \\
\overset{(1)}{K}_{13} = K_{13} \quad \omega a_{46} & & \overset{(1)}{K}_{26} = K_{26} - \omega a_{35} & \\
\overset{(1)}{K}_{14} = K_{14} \quad \omega a_{14} - M\omega & \omega^2 & \overset{(1)}{K}_{34} = K_{34} - \omega a_{16} & \\
\overset{(1)}{K}_{15} - K_{15} \quad \omega a_{24} & & \overset{(1)}{K}_{35} = K_{35} - \omega a_{26} & \\
\overset{(1)}{K}_{16} = K_{16} - \omega a_{34} & & \overset{(1)}{K}_{36} = K_{36} \quad \omega a_{36} & M\omega \quad \omega^2 \\
\overset{(1)}{K}_{23} = K_{23} - \omega a_{56} & & \overset{(1)}{K}_{45} = K_{45} - \omega a_{12} & \\
\overset{(1)}{K}_{24} = K_{24} \quad \omega a_{15} & & \overset{(1)}{K}_{46} = K_{46} \quad \omega a_{13} & \\
 & \overset{(1)}{K}_{56} = K_{56} \quad \omega a_{23} & &
\end{array}\right.$$

$K^{(1)}$, $L^{(1)}$, $M^{(1)}$ které jsou utvořeny z $\overset{(1)}{a}_{i,k}$ právě tak jako byly K, L, M utvořeny z $a_{i,k}$ budou rovny

$$(15)\quad K^{(1)} = K + L\omega + M\omega^2 + \omega^3, \quad L^{(1)} = L + 2M\omega + 3\omega^2$$
$$M^{(1)} = M + 3\omega.$$

Utvořme $\overset{(1)}{K}_{i,k}$ z $\overset{(1)}{a}_{i,k}$ právě tak jako $K_{i,k}$ bylo utvořeno z $a_{i,k}$; pak $\overset{(1)}{\bar{K}}_{i,k}$ bude vyjádřeno pomocí $\overline{K}_{\varrho,\sigma}$, $\overline{a}_{\varrho,\sigma}$, $\overline{M} = M$ právě tak, jako bylo $\overset{(1)}{K}_{i,k}$ vyjádřeno vzorci (*14*) pomocí $K_{\varrho,\sigma}$, $a_{\varrho,\sigma}$, M. Uvažujme matici

$$(16)\ (\mathfrak{M})\quad \left\|\begin{array}{ccccccccccccccc}
K_{45}, & K_{46}, & K_{14}, & K_{24}, & K_{34}, & K_{56}, & K_{15}, & K_{25}, & K_{35}, & K_{16}, & K_{26}, & K_{36}, & K_{12}, & K_{13}, & K_{23} \\
a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, & a_{16}, & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, & a_{26}, & a_{34}, & a_{35}, & a_{36}, & a_{45}, & a_{46}, & a_{56} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} K_{rs} \\ a_{ik} \\ \varepsilon_{ik} \end{array}\right\|$$

Matice tato je hodnosti 3. Kdyby totiž byla hodnosti 2, tu by matice $(\mathfrak{M}_1)$, která vznikne z $(\mathfrak{M})$ odečteme-li v ní sloupec K_{14}, a_{14}, 1 od sloupců K_{25}, a_{25}, 1 a K_{36}, a_{36}, 1, byla hodnosti 1 a tedy by systém rovnic lineárních

$$(17)\quad \overset{(1)}{K}_{r,s} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots 6;\ r \not\equiv s \pmod 3),$$
$$\overset{(1)}{K}_{14} - \overset{(1)}{K}_{25} = 0, \quad \overset{(1)}{K}_{14} - \overset{(1)}{K}_{36} = 0$$

měl řešení, neboť právě $(\mathfrak{M}_1)$ je jeho maticí. Pak by ovšem též $\overset{(1)}{K}_{14}$ muselo býti rovno nule, jak ukazují identity, kde na pravé straně jsou pfaffiany o dvou stejných indexech, resp. v posledních dvou rozdíl dvou stejných čísel:

$$
(18)\left\{
\begin{array}{ll}
\overset{(1)}{a}_{12}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{32}\overset{(1)}{K}_{34}+\overset{(1)}{a}_{52}\overset{(1)}{K}_{54}+\overset{(1)}{a}_{62}\overset{(1)}{K}_{64} = & (122356)=0\\
\overset{(1)}{a}_{13}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{23}\overset{(1)}{K}_{24}+\overset{(1)}{a}_{53}\overset{(1)}{K}_{54}+\overset{(1)}{a}_{63}\overset{(1)}{K}_{64} = & (132356)=0\\
\overset{(1)}{a}_{15}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{25}\overset{(1)}{K}_{24}+\overset{(1)}{a}_{35}\overset{(1)}{K}_{34}+\overset{(1)}{a}_{65}\overset{(1)}{K}_{64} = & (152356)=0\\
\overset{(1)}{a}_{16}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{26}\overset{(1)}{K}_{24}+\overset{(1)}{a}_{36}\overset{(1)}{K}_{34}+\overset{(1)}{a}_{56}\overset{(1)}{K}_{54} = & (162356)=0\\
\overset{(1)}{a}_{23}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{13}\overset{(1)}{K}_{15}+\overset{(1)}{a}_{43}\overset{(1)}{K}_{45}+\overset{(1)}{a}_{63}\overset{(1)}{K}_{65}+ & \\
+\overset{(1)}{a}_{23}(\overset{(1)}{K}_{25}-\overset{(1)}{K}_{14}) = & (132346)=0\\
\overset{(1)}{a}_{24}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{23}\overset{(1)}{K}_{13}+\overset{(1)}{a}_{25}\overset{(1)}{K}_{15}+\overset{(1)}{a}_{26}\overset{(1)}{K}_{16} = & (242356)=0\\
\overset{(1)}{a}_{26}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{16}\overset{(1)}{K}_{15}+\overset{(1)}{a}_{36}\overset{(1)}{K}_{35}+\overset{(1)}{a}_{46}\overset{(1)}{K}_{45}+ & \\
+\overset{(1)}{a}_{26}(\overset{(1)}{K}_{25}-\overset{(1)}{K}_{14}) = & (261346)=0\\
\overset{(1)}{a}_{34}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{32}\overset{(1)}{K}_{12}+\overset{(1)}{a}_{35}\overset{(1)}{K}_{15}+\overset{(1)}{a}_{36}\overset{(1)}{K}_{16} = & (342356)=0\\
\overset{(1)}{a}_{35}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{31}\overset{(1)}{K}_{21}+\overset{(1)}{a}_{34}\overset{(1)}{K}_{24}+\overset{(1)}{a}_{36}\overset{(1)}{K}_{26}+ & \\
+\overset{(1)}{a}_{35}(\overset{(1)}{K}_{25}-\overset{(1)}{K}_{14}) = & (351346)=0\\
\overset{(1)}{a}_{45}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{25}\overset{(1)}{K}_{12}+\overset{(1)}{a}_{35}\overset{(1)}{K}_{13}+\overset{(1)}{a}_{65}\overset{(1)}{K}_{16} = & (452356)=0\\
\overset{(1)}{a}_{46}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{26}\overset{(1)}{K}_{12}+\overset{(1)}{a}_{36}\overset{(1)}{K}_{13}+\overset{(1)}{a}_{56}\overset{(1)}{K}_{15} = & (462356)=0\\
\overset{(1)}{a}_{56}\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{16}\overset{(1)}{K}_{21}+\overset{(1)}{a}_{36}\overset{(1)}{K}_{23}+\overset{(1)}{a}_{46}\overset{(1)}{K}_{24}+ & \\
+\overset{(1)}{a}_{56}(\overset{(1)}{K}_{25}-\overset{(1)}{K}_{14}) = & (561346)=0\\
(\overset{(1)}{a}_{25}-\overset{(1)}{a}_{14})\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{26}(\overset{(1)}{K}_{25}-\overset{(1)}{K}_{14})- & \\
-\overset{(1)}{a}_{35}\overset{(1)}{K}_{35}+\overset{(1)}{a}_{45}\overset{(1)}{K}_{45}+\overset{(1)}{a}_{65}\overset{(1)}{K}_{65}+\overset{(1)}{a}_{15}\overset{(1)}{K}_{15}- & \\
-\overset{(1)}{a}_{24}\overset{(1)}{K}_{24}-\overset{(1)}{a}_{34}\overset{(1)}{K}_{34}-\overset{(1)}{a}_{54}\overset{(1)}{K}_{54}-\overset{(1)}{a}_{64}\overset{(1)}{K}_{64} = & (123456)-\\
- & (123456)=0\\
(\overset{(1)}{a}_{36}-\overset{(1)}{a}_{14})\overset{(1)}{K}_{14}+\overset{(1)}{a}_{36}(\overset{(1)}{K}_{36}-\overset{(1)}{K}_{14})+\overset{(1)}{a}_{16}\overset{(1)}{K}_{16}+ & \\
+\overset{(1)}{a}_{26}\overset{(1)}{K}_{26}+\overset{(1)}{a}_{46}\overset{(1)}{K}_{46}+\overset{(1)}{a}_{56}\overset{(1)}{K}_{56}-\overset{(1)}{a}_{24}\overset{(1)}{K}_{24}- & \\
-\overset{(1)}{a}_{34}\overset{(1)}{K}_{34}-\overset{(1)}{a}_{54}\overset{(1)}{K}_{54}-\overset{(1)}{a}_{64}\overset{(1)}{K}_{64} = & (123456)-\\
- & (123456)=0
\end{array}\right.
$$

Potom by ovšem $\overset{(1)}{K}=\sum^{6}\overset{(1)}{a}_{i1}\overset{(1)}{K}_{i1}=0$, což by odporovalo tomu, že $K^1 = K + L\omega + M\omega^2 + \omega^3$ je ireducibilní v oboru racionálních čísel.

Věta I. *Matice* $(\mathfrak{M})$ *je hodnosti 3.*

Označme 1, c_1, $e_1 e_2$ její elementární dělitele.*) Pak elementární dělitelé matice $(\mathfrak{m}^{(1)}) = \left|\begin{matrix} K^{(1)}_{r,s} \\ \bar{a}^{(1)}_{i,k} \\ \varepsilon_{i,k} \end{matrix}\right|$ která je rovněž hodnosti 3, jsou též 1, e_1, $e_1 e_2$, jestliže transformace C nemění formy E a má racionální celistvé elementy $c_{\varrho,\sigma}$ $(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots 6)$. Označme na okamžik elementární dělitele matice $(\mathfrak{m}^{(1)})$ 1, $\bar{e}$, $\overline{e_1 e_2}$.

Předně matice $(\mathfrak{m}^{(1)})$ vznikne z matice $(\mathfrak{m}) = \left|\begin{matrix} \bar{K}_{r,s} \\ \bar{a}_{i,k} \\ \bar{\varepsilon}_{i,k} \end{matrix}\right|$ odečtením ω nás. druhé a $(M\omega + \omega^2)$ nás. třetí řádky od první a ω nás. třetí od druhé, takže $(\mathfrak{m}^{(1)})$ a $(\mathfrak{m})$ mají stejné elementárné dělitele 1, e_1, $\overline{e_1 e_2}$ a stejnou hodnost. Dosaďme dále za**)

$$(19) \qquad \gamma_{\mu\nu} = c_{\mu+3,\nu+3}, \quad \gamma_{\mu,\nu+3} = -c_{\mu+3,\nu},$$
$$\gamma_{\mu+3,\nu} = -c_{\mu,\nu+3}, \quad \gamma_{\mu+3,\nu+3} = c_{\mu,\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3);$$

seznáme, že každý determinant utvořený z elementů $(\mathfrak{m})$ jest lineární homogenní funkcí o celých racionálných koeficientech v determinantech téhož řádu, utvořených z elementů matice $(\mathfrak{M})$. Jsou tedy $\frac{\bar{e}_1}{e_1}$, $\frac{\overline{e_1^2 e_2}}{e_1^2 e_2}$ čísla celá. Avšak naopak též $\frac{e_1}{\bar{e}_1}$ a $\frac{e_1^2 e_2}{\overline{e_1^2 e_2}}$ jsou čísla celá, neboť z $A = C'^{-1} A C^{-1}$ jde

$$(7') \qquad a_{i,k} = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{6} \overline{a_{\varrho,\sigma}}\, \gamma_{i\varrho}\, \gamma_{k\sigma}$$

$$(12') \qquad K_{i,k} = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{6} \bar{K}_{\varrho,\sigma}\, c_{i\varrho}\, c_{k\sigma} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots 6)$$

takže naopak též každý determinant z elementů matice $(\mathfrak{M})$ je lineární homogenní funkcí o celých racionálných koeficientech v determinantech téhož řádu, utvořených z elementů matice $(\mathfrak{m})$. Jest tedy $\bar{e}_1 = e_1$, $\bar{e}_2 = e_2$ a hodnost $(\mathfrak{m})$ je *3*.

Věta II. e_1, e_2 *definované pomocí elementárních dělitelů matice* $(\mathfrak{M})$ *jsou numerické invarianty svazku $A - \lambda E$ vzhledem k lineární kogredientní transformaci o celých elementech, zachovávající formu E a vzhledem k transformaci paramentru $\lambda = \omega + \lambda_1$. Rovněž hodnost matice* $(\mathfrak{M})$ *se těmito transformacemi nemění.*

4. Buď $d_1 = NSM$ $(a_{12}, a_{13}, a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{24}, a_{26}, a_{34}, a_{35}, a_{45}, a_{46}, a_{56}, a_{14}\ a_{25}, a_{14} - a_{36})$. V závorce jsou determinanty 2. řádu utvořené z elementů 2. a 3. řádky v matici $(\mathfrak{m})$, takže je

*) Elementární dělitele matice $(\mathfrak{M})$ mužeme psati v tomto tvaru, jelikož následující je dělitelný předešlým. Viz cit. Muth, Elementartheiler.

**) Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, str. 137., vzorec VI.

$\frac{d_1}{e_1}$ číslo celé. Zvolme ω_1 tak, aby byly všechny $\overset{(1)}{a}_{i,k} = a_{i,k} - \omega_1 \varepsilon_{i,k} \equiv 0 \pmod{d_1}$; to lze a stačí k tomu zvoliti ω_1 tak aby bylo

$$(20) \qquad \overset{(1)}{a}_{14} = a_{14} - \omega_1 \equiv 0 \pmod{d_1}$$

Potom budou ovšem všechny $\overset{(1)}{K}_{i,k}$ dělitelny d_1^2, takže všechny determinanty 2. řádu utvořené z elementů matice $(\mathfrak{M}^{(1)}) \begin{Vmatrix} K^{(1)}_{r,s} \\ a^{(1)}_{i,k} \\ \varepsilon_{i,k} \end{Vmatrix}$ budou dělitelny d_1, takže $\frac{e_1}{d_1}$ bude též číslo celé; jest tedy $e_1 = d_1$. Jelikož $K^{(1)}_{r,s}$ jsou dělitelny $d_1^2 = e_1^2$, jest $\frac{e_2}{e_1}$ celé číslo, neboť determinanty 3. řádu z elementů matice $(\mathfrak{M}^{(1)})$ jsou vesměs dělitelny e_1^3, kdežto jejich NSM jest $e_1^2 e_2$.

Buď ω libovolné celé racionální číslo a označme $\overset{(2)}{a}_{i,k} = \overset{(1)}{a}_{i,k} - e_1 \omega \varepsilon_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots 6)$ a utvořme $\overset{(2)}{K}_{r,s}$ $(r, s = 1, 2, \ldots 6)$ z $\overset{(1)}{a}_{i,k}$ obdobně jako jsme utvořili $\overset{(1)}{K}_{r,s}$ z $a_{i,k}$ (vzorce 14). Pak matice $(\mathfrak{M}^{(2)}) \begin{Vmatrix} K^{(2)}_{r,s} \\ a^{(2)}_{i,k} \\ \varepsilon_{i,k} \end{Vmatrix}$ která má rovněž elementární dělitele $1, e_1, e_1, e_2$ má též tu vlastnost, že $NSM\ (\overset{(2)}{a}_{i,k}) = e_1$ $(i, k, = 1, 2, \ldots 6)$.

Tvrdím, že lze zvoliti za $\omega = \omega_2$ tak, aby $NSM\ (\overset{(2)}{K}_{r,s}) = e_1, e_2$, $(r, s = 1, 2, \ldots 6)$. K tomu stačí vyhověti kongruencím

$$(21) \qquad (K^{(2)}_{r,s}) \equiv 0 \pmod{e_1, e_2} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots 6).$$

Tyto kongruence jsou equivalentní s kongruencemi (mod e_1, e_2):

$$(21')\left\{\begin{array}{ll}
\overset{(2)}{K}_{12} = \overset{(1)}{K}_{12} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{45} \equiv 0 & \overset{(2)}{K}_{34} = \overset{(1)}{K}_{34} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{16} \equiv 0 \\
\overset{(2)}{K}_{13} = \overset{(1)}{K}_{13} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{46} \equiv 0 & \overset{(2)}{K}_{35} = \overset{(1)}{K}_{35} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{26} \equiv 0 \\
\overset{(2)}{K}_{15} = \overset{(1)}{K}_{15} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{24} \equiv 0 & \overset{(2)}{K}_{45} = \overset{(1)}{K}_{45} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{12} \equiv 0 \\
\overset{(2)}{K}_{16} = \overset{(1)}{K}_{16} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{34} \equiv 0 & \overset{(2)}{K}_{46} = \overset{(1)}{K}_{46} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{13} \equiv 0 \\
\overset{(2)}{K}_{23} = \overset{(1)}{K}_{23} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{56} \equiv 0 & \overset{(2)}{K}_{56} = \overset{(1)}{K}_{56} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{23} \equiv 0 \\
\overset{(2)}{K}_{24} = \overset{(1)}{K}_{24} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{15} \equiv 0 & \overset{(2)}{K}_{14} - \overset{(2)}{K}_{25} = \overset{(1)}{K}_{14} - \overset{(1)}{K}_{25} - \\
 & \quad - e_1\,\omega\,(\overset{(1)}{a}_{14} - \overset{(1)}{a}_{25}) \equiv 0 \\
\overset{(2)}{K}_{26} = \overset{(1)}{K}_{26} - e_1\,\omega\,\overset{(1)}{a}_{35} \equiv 0 & \overset{(2)}{K}_{14} - \overset{(2)}{K}_{36} = \overset{(1)}{K}_{14} - \overset{(1)}{K}_{36} - \\
 & \quad - e_1\,\omega\,(\overset{(1)}{a}_{14} - \overset{(1)}{a}_{36}) \equiv 0
\end{array}\right.$$

(Pokračování.)