Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

O akustických spektrech

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 1, 28--37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109203

se stopou L_1 přímky p. Spustíme-li z bodu J kolmici ku $E' L_1$ musí pata její P'_1 ležeti na hledané přímce p_2, čímž jest tato stanovena, aniž bychom bod P_2 cissoidy Diokletovy vyznačovali. Odůvodnění jest patrno přímo z obrazce, uvážíme-li, že bod P_1 cissoidy Diokletovy též obdržíme, vztyčíme-li v průsečíku E přímky $B_1 P_1$ s asymptotou a kolmici k asymptotě protínající bodem vratu B_1 vedenou rovnoběžku s asymptotou v bodu S. Pak kolmice z bodu S ku $B_1 E$ spuštěná prochází bodem P_1 cissoidy Diokletovy.

O akustických spektrech.

Napsal *Bohuslav Hostinský*.

1. Představme si nějakou mechanickou soustavu, která se nachází ve stabilní rovnováze (n. př. několik tuhých těles, jež jsou určitým způsobem navzájem spojena nitmi nebo klouby a v pevných bodech zavěšena). Vychýlíme-li ji nepatrně z této polohy, vykonává kmitavý pohyb, při kterém souřadnice její bodů jsou vyjádřeny, ježto vyhovují soustavě differenciálních linearních rovnic s konstantními koëfficienty, vzorci tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos r_k t + B_k \sin r_k t \right)$$

jakožto funkce času t. Číslo n udává počet stupňů volnosti, A_k a B_k jsou konstanty a veličiny $r_1, r_2 \ldots r_n$ jsou kořeny algebraické rovnice n-tého stupně (charakteristická rovnice). Časový průběh každé souřadnice x obdržíme dle toho superposicí n harmonických pohybů, jichž 2π násobné kmitočty (frekvence) jsou $r_1, r_2 \ldots r_n$. Souhrn těchto vlastních kmitočtů soustavy můžeme nazvati jejím mechanickým spektrem.

Pružné těleso považujeme za mechanickou soustavu o nekonečně velikém počtu stupňů volnosti, neboť okamžitý stav takového (kmitajícího) tělesa je definován výchylkami všech jeho částic z příslušných rovnovážných poloh. Již *Lagrange* uvažoval o limitním přechodu od mechanického systému s konečným počtem stupňů volnosti k pružnému tělesu a odvodil tak rovnici pro pohyb struny. Ukazuje se, že u struny soustava obyčejných differenciálních rovnic přechází v jedinou rovnici parciální (v případě pružného tělesa obdržíme obecně soustavu tří rovnic parciálních); charakteristická algebraická rovnice přechází v transcendentní rovnici, která má nekonečně mnoho kořenů. Výsledek je známý: struna může vydávati nekonečně mnoho vlastních tónů; je-li N kmitočet tónu základního, jsou kmitočty všech těch tónů

$$N,\ 2\,N,\ 3\,N, \ldots$$

Obecný kmitavý pohyb struny dá se pak vyjádřiti superposicí těchto jednoduchých pohybů harmonických. Souhrn všech uvededených kmitočtů tvoří *akustické spektrum* struny. V tomto smyslu má každé pružné těleso (nebo vzduch uzavřený v nádobě) své akustické spektrum; neplatí ovšem obecně ten jednoduchý zákon, jenž má platnost v případě struny, že totiž kmitočet n tého vlastního tónu je n kráte větší než kmitočet tónu základního.

Poznamenejme, že všechny úvahy o neomezené řadě vlastních tónů opírají se podstatně o předpoklad, že hmota vyplňuje prostor spojitě; prozatím se tohoto předpokladu přidržíme.

2. V poslední době byly prostudovány některé pozoruhodné vlastnosti akustických spekter.

Počněme nástinem methody ke stanovení akustického spektra membrány, která budiž položena v rovině xy a na kraji upevněna. Značí-li

$$u\,(x,\,y).\,\sin\,(\sqrt{\lambda}\,t)$$

příčnou výchylku bodu, jenž v rovnovážné poloze má souřadnice x, y, platí, jak známo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\,u=o,$$

kde $\lambda =$ čtverci 2π násobného kmitočtu určitého vlastního tónu. Napsanou differenciální rovnici jest integrovati tak, aby všude na kraji membrány bylo $u = o$. Tato úloha je řešitelná jen tehdy, je-li λ rovno některému z význačných kladných čísel:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \ldots\ (\lambda_k \leqq \lambda_{k+1}),$$

která definují vlastní kmitočty membrány. Každému λ_k přísluší určitá význačná funkce $\varphi_k\,(x,\,y)$, která definuje rozdělení amplitud. Příslušné uzlové čáry mají rovnici

$$\varphi_k\,(x,\,y) = o.$$

Poněvadž je daná differenciální rovnice homogenní, jsou funkce jí vyhovující určeny až na multiplikativní konstantu. Abychom ji přesně určili, stanovíme obyčejně, že má býti

$$\iint_A \varphi_k^2\,(x,\,y)\,dxdy = 1,$$

kde se integrace vztahuje k části A roviny zaujaté membránou v rovnovážné poloze.

Klasický postup při výpočtu význačných čísel λ_k a funkcí φ_k lze resumovati takto: $\varphi_1\,(x_1,\,y)$ je ta ze všech funkcí u rovných nulle na kraji membrány a vyhovujících podmínce

$$\iint_A [u\,(x,\,y)]^2\,dxdy = 1,$$

která dává integrálu

$$\iint_A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy\,, \qquad (I)$$

nejmenší možnou hodnotu a λ_1 rovná se právě této nejmenší hodnotě. Obecně pak jest $\varphi_k(x, y)$ ta ze všech funkcí u rovných nulle na kraji a vyhovujících podmínkám

$$\left.\begin{array}{l} \iint_A \varphi_i(x, y) \cdot u(x, y)\, dxdy = 0 \\ \quad (i = 1, 2, \ldots k-1) \\ \iint_A [u(x, y)]^2\, dxdy = 1, \end{array}\right\}$$

která dává integrálu (I) nejmenší hodnotu u λ_k rovná se právě této nejmenší hodnotě.

Čísla λ_k a funkce φ_k určují se takto rekurrentním způsobem: známe-li $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{k-1}$, dovedeme určiti φ_k a λ_k.

*R. Courant**) pozměnil tuto methodu následujícím způsobem: Nahraďme funkce $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{k-1}$ jakýmikoliv jinými funkcemi v_1, $v_2 \ldots v_{k-1}$ a hledejme funkci $u(xy)$, která se rovná na kraji nulle, vyhovuje podmínkám

$$\left.\begin{array}{l} \iint_A v_i(x, y) \cdot u(x, y)\, dxdy = 0 \\ \quad (i = 1, 2, \ldots k-1) \\ \iint_A [u(x, y)]^2\, dxdy = 1, \end{array}\right\}$$

a dává integrálu (I) nejmenší hodnotu. Označme tuto nejmenší hodnotu takto:

$$m(v_1, v_2) \ldots v_{k-1}),$$

abychom vyjádřili její závislost na funkcích v. Hlavní vlastnost čísla m je vyjádřena vztahem

$$m(v_1, v_2 \ldots v_{k-1}) \leqq \lambda_k.$$

To znamená: Nechť měníme funkce v, jež se vyskytují v podmínkách úlohy jakkoli, nejmenší hodnota integrálu (I) nepřesáhne nikdy hodnoty λ_k.

Výsledek shrneme takto: Každá volba funkcí $v_1, v_2 \ldots v_{k-1}$ vede k určité úloze variačního počtu; minimum integrálu (I), jsou-li splněny podmínky svrchu uvedené, dosáhne své největší možné hodnoty λ_k v tom případě, že

$$v_1 = \varphi_1,\ v_2 = \varphi_2, \ldots v_{k-1} = \varphi_{k-1}.$$

Funkce $u(x, y)$, jež dává integrálu (I) tuto maximální nejmenší hodnotu, jest právě $\varphi_k(x, y)$. Nyní jest tedy číslo λ_k definováno nikoli rekurentně, jako tomu bylo v klasické definici, která předpokládá znalost čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{k-1}$, nýbrž přímo a jeví se jakožto

---

*) *R. Courant:* Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik (Mathematische Zeitschrift, VII., 1920 p. 1–57); § 3. Podobný postup nalézáme již u *H. Poincaréa* v práci Sur l'équilibre et les mouvements des mers (Journal de mathém., 5e série, II, 1896, p. 261).

maximum minimální hodnoty integrálu (I), srovnáváme-li určité nekonečné množství problémů o minimu tohoto integrálu.

Poznamenejme, že přesné odůvodnění uvedených vět vyžaduje, aby funkce, které zde přicházejí v úvahu, vyhověly určitým podmínkám obecného rázu; postačí, když předpokládáme, že všechny ty funkce mají spojité derivace 1. řádu.

3. Objasněme předešlé úvahy na problému struny, který obdržíme z problému membrány, když zavedeme předpoklad, že hledaná funkce u závisí toliko na jediné proměnné x. Differenciální rovnice parciální přejde tu v rovnici obyčejnou

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda\, u = o,$$

která se má integrovati tak, aby u na krajích struny ($x = o$ nebo $x = 1$) rovnalo se nulle. Známým a snadným výpočtem se najde, že význačná čísla jsou zde

$$\lambda_1 = \pi^2,\ \lambda_2 = 4\,\pi^2,\ \lambda_3 = 9\,\pi^2 \ldots$$

a příslušné význačné funkce

$$\varphi_1(x) = \sqrt{2}\, sin\, \pi\, x,\quad \varphi_2(x) = \sqrt{2}\, sin\, 2\pi\, x,\quad \varphi_3(x) = \sqrt{2}\, sin\, 3\pi x \ldots$$

obecně platí, že

$$\int_0^1 [\varphi_k(x)]^2\, dx = 1.$$

Integrál (I) redukuje se zde na

$$\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

a jest zjevno, že hodnota poměru

$$\frac{\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^1 u^2\, dx} \qquad (P)$$

kde u značí jakoukoli funkci, se nezmění, nahradíme-li funkci u v čitateli i ve jmenovateli funkcí $C.u$ (C je libovolná konstanta). Původní úloha variačního počtu: nalézti u (x) takovou, aby integrál jejího čtverce v intervallu (0, 1) rovnal se jedné a aby integrál (I) měl co nejmenší hodnotu — dá se tedy nahraditi úlohou: nalézti funkci u (x) takovou, aby poměr (P) měl co nejmenší hodnotu. Rozumí se, že přicházejí v úvahu jen takové funkce u (x), které se rovnají nulle pro $x = o$ a pro $x = 1$. Nejmenší hodnota poměru (P) jest $\lambda_1 = \pi^2$; obdržíme ji dosadíce do (P) na místo u funkci $\varphi_1 = \sqrt{2} . sin\, \pi\, x$.*)

*) Srv. *E. Picard:* Traité d'Analyse, 2e édit. III. p. 112. Obdobná minimová úloha v případě membrány dá se právě tak redukovati na vyhledání minima poměru dvou integralů.

Další význačná čísla λ_2, $\lambda_3 \ldots$ obdržíme dle Couranta takto: dosazujme do poměru (P) za u funkce, které vyhovují podmínkám

$$\int_0^1 v_n(x)\, u(x)\, dx = 0, \quad (n = 1, 2 \ldots k - 1),$$

při čemž $v_n(x)$ jsou dané funkce. Pro určitou funkci u nabude onen poměr nejmenší možné hodnoty. Tato nejmenší hodnota je maximální v případě, že volíme v_n funkci

$$v_n(x) = \sin n\pi x \quad (n = 1, 2 \ldots k - 1)$$

a rovná se $k^2 \pi^2$.

4. Dříve než přikročím k applikacím Courantovy methody, naznačím ještě její souvislost s problémem os u ploch druhého stupně.

Budiž dán ellipsoid, jehož střed je v počátku souřadnic, rovnicí

$$f(x, y, z) = 1,$$

kde f je kvadratická forma souřadnic x, y a z. Poloosy ellipsoidu (prozatím neznámé) označíme a, b, c a předpokládáme, že

$$a > b > c.$$

Budiž dále r délka průvodiče, jenž vychází ze středu O k určitému bodu (x, y, z) ellipsoidu a má směrové cos. u, u', u''. Poněvadž

$$x = r u, \quad y = r u', \quad z = r u'',$$

platí

$$\left[\frac{1}{r^2}\right] = f(u, u', u'').$$

Veličiny u, u', u'' vyhovují ovšem podmínce

$$u^2 + u'^2 + u''^2 = 1;$$

můžeme však tuto podmínku vypustiti, píšeme-li

$$\frac{1}{r^2} = \frac{f(u, u', u'')}{u^2 + u'^2 + u''^2}.$$

Výraz na pravé straně závisí toliko na *poměrech* $u : u' : u''$, má tedy pro každý směr určitou hodnotu rovnou čtverci reciproké hodnoty příslušného průvodiče.

Klasický způsob vyhledati poloosy ellipsoidu záleží v tom, že předně určíme směr, stanovený poměry $\varphi_1 : \varphi_1' : \varphi_1''$, jež dosaženy byvše na místo $u : u' : u''$ dávají výrazu pro r^{-2} nejmenší možnou hodnotu

$$\lambda_1 = a^{-2}.$$

Tak jsme nalezli směr a velikost nejdelší poloosy a ellipsoidu. Znajíce ji budeme hledati opět nejmenší hodnotu výrazu pro r^{-2}, tentokráte však s podmínkou, že přípustné směry (u, u', u'') jsou vázány podmínkou

$$\varphi_1 u + \varphi_1' u' + \varphi_1'' u'' = o$$

t. j. že jsou kolmy ku směru $(\varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'')$ nejdelší poloosy. Srovnáváme tedy vlastně délky průvodičů v ellipse, jež má poloosy b a c; výsledek výpočtu je ten, že hledaný směr $(\varphi_2 : \varphi_2' : \varphi_2'')$ je totožný se směrem prostřední poloosy ellipsoidu a že výraz pro r^{-2} nabývá hodnoty

$$\lambda = b^{-2},$$

zavedeme-li doň $(\varphi_2 : \varphi_2' : \varphi_2'')$ na místo $(u : u' : u'')$. Třetí poloosa je pak určena co do směru i do délky podmínkou, že má býti kolmá k oběma předešlým.

V případě, že je dán ellipsoid v prostoru n rozměrném rovnicí

$$f(x_1 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = 1,$$

kde x_i značí souřadnice a $a_{ik} = a_{ki}$, je výpočet poloos docela stejný. Označme písmenami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ převrácené hodnoty čtverců poloos, seřaděné dle stoupající velikosti, a písmenami $u, u', \ldots$ směrové cos. libovolného směru. Absolutní minimum výrazu

$$r^{-2} = \frac{f(u, u', u'' \ldots u^{(n-1)})}{u^2 + u'^2 + \ldots + u^{(n-1)2}}$$

nastává při $u = \varphi_1$, $u' = \varphi_1' \ldots$ a má hodnotu λ_1. Veličina λ^k a směrové cos. k-té osy $\varphi_k, \varphi'_k \ldots$ najdou se, známe-li směry prvních $(k-1)$ os, takto: Dosazujme do výrazu pro r^{-2} směrové cos. $u, u' \ldots$ ne všech libovolných směrů, nýbrž jen těch, které jsou kolmy ke směrům prvních $(k-1)$ os; má tedy býti

$$\varphi_i u + \varphi'_i u' + \ldots + \varphi_i^{(n-1)} u^{(n-1)} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots k-1).$$

Ze všech přípustných směrů jeden $(\varphi_k, \varphi_k' \ldots)$, totiž právě hledaný směr k-té osy, dává vyrazu r^{-2} hledanou hodnotu λ_k.

Přejděme nyní k nové methodě, která dává veličiny λ_k a jim příslušné směry přímo.

Začneme s případem obyčejného trojosého ellipsoidu. První poloosa a, resp. veličina $\lambda_1 = a^{-2}$ určí se jako dříve. Druhou poloosu určíme takto: vytkneme libovolný směr $(\nu_1 : \nu_1' : \nu_1'')$ a vyhledáme mezi všemi směry $(u : u' : u'')$, které jsou k předešlému kolmy, ten, jenž dává nejmenší hodnotu výrazu pro r^{-2}. Označme tuto nejmenší hodnotu $m(\nu_1)$. Měníce směr $(\nu_1 : \nu_1' : \nu_1'')$ dostáváme pro m různé hodnoty; největší z nich je právě $\lambda = b^{-2}$, kterou obdržíme pro

$$\nu_1 = \varphi_1, \quad \nu_1' = \varphi_1', \quad \nu_1'' = \varphi_1'' \quad \text{t. j.}$$

pro směr (ν_1, ν_1', ν_1'') totožný se směrem největší poloosy. Ze všech ellips, ve kterých je ellipsoid protínán rovinami jdoucími jeho středem, má ellipsa v rovině obsahující prostřední a nejmenší poloosu tu vlastnost, že minimum čtverce reciproké hodnoty průvodiče má v ní největší hodnotu.

Třetí poloosu najdeme pak takto: zvolíme libovolné dva směry $(\nu_1 : \nu_1' : \nu_1'')$ a $(\nu_2 : \nu_2' : \nu_2'')$ a stanovíme minimum výrazu pro r^{-2}, připouštějíce za u, u', u'' cos. směrů k oběma předešlým kolmých. Poněvadž však takový směr je jen jeden, odpadá výpočet minima. Zbývá jen stanoviti maximální hodnotu tohoto minima pro případ, že oba vytčené směry libovolně měníme. Toto maximum jest rovno $\lambda_3 = c^{-2}$ a odpovídá průvodiči ve směru nejmenší poloosy.

V případě ellipsoidu v prostoru o n rozměrech je postup úvah stejný. Reciproká hodnota λ_k čtverce k té poloosy najde se takto: ustanovíme nejprve minimum shora napsaného výrazu pro r^{-2} za předpokladu, že za $u, u', \ldots$ dosazujeme cos. směrů kolmých k určitým $(k-1)$ pevně voleným směrům, jež označíme zkrátka ν_1, $\nu_2 \ldots \nu_{k-1}$. Každé volbě těchto posledních směrů odpovídá určitá nejmenší hodnota onoho výrazu; maximum těchto hodnot jest právě λ_k a směr, ve kterém r^{-2} této hodnoty nabývá, je totožný se směrem q_k k-té poloosy.*)

Přejdeme-li od problému algebraického k problému transcendentnímu o struně nebo o membráně (počet n dimensí roste do nekonečna), přejdou rovnice vyjadřující kolmost dvou směrů, jako

$$\nu_k \cdot u + \nu_k' \cdot u' - \ldots = o$$

v rovnice vyjadřující „kolmost dvou funkcí"

$$\int_0^1 \nu_k(x) \cdot u(x)\, dx = o$$

nebo $$\int_0^1\!\!\int_0^1 \nu_k(x, y) \cdot u(x, y)\, dxdy = o.$$

Vztah mezi problémem algebraickým a transcendentním vynikne zejména zavedeme-li t. zv. Gaussův problém o maximu.**)

5. Methoda, jež nám dovoluje na základě uvedených úvah stanoviti význačná čísla $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ u membrány jakožto maxima jistých nejmenších hodnot, vede jednoduše k důkazu této věty: Předepíšeme li membráně nějakou další vazbu (n. př. vytkneme na ní určitou křivku, která má býti čarou uzlovou), zvýší se tím všechny její vlastní tóny, neb aspoň neklesají.

*) Uvedený algebraický problém o maximu nejmenší hodnoty vyskytuje se již na str. 249 práce Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten, kterou uveřejnil *E. Fischer* v Monatshefte für Math. u. Phys. (XVI., 190[illegible], p. 234—249).

**) Srv. *D. Hilbert:* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Kap. V. a Kap. VII.

Frekvenci k-tého vlastního tónu, jejíž čtverec jest úměrný číslu λ_k, dostali jsme dle Couranta tím způsobem, že jsme srovnávali řadu úloh o minimu integrálu (I); v každé úloze hověly připustné funkce u (x, y) určitým podmínkám. Předepíšeme-li membráně novou vazbu, znamená to, že funkce u podrobujeme další podmínce; toto omezení ve výběru funkcí u má za následek, že v každé úloze minimum integrálu (I) buď se zvětší aneb aspoň neklesne. Maximum všech těchto minim vazbou rovněž se zvětšuje, neb aspoň neklesá. Tím je věta dokázána; platnost její je zcela obecná, vztahujíc se k libovolným kmitajícím soustavám (Rayleighův princip).

Upevníme-li tedy na př. část struny nebo membrány a p., zvyšují se tím všechny vlastní tóny.

6. Přistupme nyní k některým úlohám o t. zv. asymptotických zákonech spekter.

Řešíme-li problém membrány: $\dfrac{d^2 u}{dx^2} + \dfrac{d^2 u}{dy^2} - \lambda u = o$, $u = o$ na kraji, za předpokladu, že membrána má tvar čtverce o plošném obsahu p, dojdeme známými methodami k tomuto výsledku:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{p\lambda_n} = \frac{1}{4\pi}.$$

Počet n těch význačných čísel, která jsou $< \lambda_n$, je tedy asymptoticky (pro velká λ) vyjádřena přibližným vzorcem $n \sim \dfrac{p\lambda_n}{4\pi}$, jenž neobsahuje nic, co by se vztahovalo ke tvaru membrány, nýbrž toliko její plošný obsah p. H. A. Lorentz vyslovil r. 1911 názor, že uvedený vzorec platí bezpochyby pro každou membránu o plošném obsahu p,*) a upozornil na její význam jakož i na některé jiné věty podobné. Mathematický důkaz rozmanitých asymptotických vět o spektrech podán byl od H. Weyla v několika pracích, jež byly z největší části resumovány a znovu zpracovány v pojednání z r. 1915.**) R. Courant pak, opíraje se o methodu vyloženou v odst. *2.* a *4.*, nahradil Weylovy výpočty úvahami daleko jednoduššími.†) Nehodlám zde vykládati důmyslné methody Weylovy a Courantovy, nýbrž uvedu toliko některé výsledky.

Zavedeme-li do počtu frekvence ν_1, ν_1, ν_2 ..... jednotlivých vlastních tónů, které souvisejí s význačnými čísly λ_k podle rovnice $\lambda_n^{\frac{1}{2}} = 2\pi \nu_n$ nabude vzorec shora uvedený tvaru $n = p \cdot \pi^2 \nu_n^2$.

*) H. A. Lorentz, Physikalische Zeitschrift XI, 1910, p. 1248.

**) *H. Weyl:* Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers (Rendiconti del Circolo matem. di Palermo, t. *39*, 1915, p. 1–50).

†) *R. Courant* l. c. § 6–9.

Podobně platí pro počet n vlastních tónů libovolného pružného tělesa o objemu V, jež jsou ν_n $n = c \, . \, V \, . \, \nu_n^3$, kdež C je číslo, jehož hodnota je závislá na elastických konstantách materiálu a nikoli na tvaru a rozměrech tělesa. Těleso může býti buď připevněno podél své plochy nebo volné.

Naprosto stejný vzorec platí pro frekvence elektromagnetických kmitů, které se vytvoří v uzavřeném prostoru (vakuu) o objemu V, jehož stěny jsou vodivé. Zase máme nekonečnou řadu frekvencí vlastních onomu uzavřenému prostoru. Obdoba s problémem o kmitech pružného tělesa jest úplná Konstanta C souvisí v elektromagnetickém problému s rychlostí světla ve vakuu a nezávisí na velikosti ani na tvaru dutiny. Jeans užil uvedené formule k theoretickému odůvodnění zákona, jenž udává rozdělení energie ve spektru tak zv. černého tělesa.

Jakožto obzvláště zajímavou a originální applikaci asymptotického zákona o spektrech pružných těles uvádím Debyeovu práci*) o theorii specifických tepel. Debye klade si za úlohu objasniti Dulong-Petitův zákon (součin ze specifického tepla nějakého prvku v tuhém skupenství a z jeho atomové váhy je konstantní pro všechny prvky), zejména však odchylky od tohoto zákona pozorované při velmi nízkých teplotách a uvažuje takto: Má-li těleso N atomů, má $3N$ stupňů volnosti (představujeme-li si pro jednoduchost atomy jakožto body). Je tedy $3N$ vlastních kmitavých pohybů s $3N$ různými frekvencemi. Nejpomalejší z těchto kmitavých pohybů jsou akustické kmity, které lze snadno pozorovati. Nejobecnější nekonečný malý pohyb, který těleso může konati, dá se sestrojiti superposicí oněch $3N$ pohybů. Tepelné pohyby, totiž ty, které určují teplotu tělesa, jsou jakožto speciální případ zahrnuty v oněch obecných pohybech. Kdyby platila věta o stejnoměrném rozdělení energie, nemusili bychom ani určovati „spektrum" tělesa. Připsal bychom jednoduše každému vlastnímu kmitu energii $k\,T$, kde T značí absolutní teplotu; úhrnné energie tělesa byla by $3\,N k\,T$. Derivujíce dle T najdeme pro specifické teplo při stálém objemu výraz $3\,N k$, což odpovídá zákonu Dulong Petitovu. Ale na místo toho učí nás Planckova formule, že energie příslušná určité frekvenci závisí také na frekvenci samotné a ne jenom na teplotě. Musíme tedy určiti nejprve všechny frekvence, jež jsou tělesu vlastní, pak vypočísti podle Plancka energii příslušnou každé frekvenci a všechny výsledky sečísti. Součet dá vnitřní energii při dané teplotě a differencujeme-li pak podle teploty, dostaneme specifické teplo. — Především určíme akustické spektrum libovolného tělesa; na tvaru nezáleží, neboť výpočet specifického tepla dopadne na konec vždy stejně. K tomuto účelu mohli bychom považovati těleso za složené z N hmotných bodů, které na sebe působí určitými silami. Kdy-

*) *P. Debye:* Zur Theorie der spezifischen Wärme. (Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. *39;* 1912, p. 789—839).

bychom tyto síly přesně znali, mohli bychom výpočet správně provésti. Ale k výpočtu specifického tepla není třeba přesně vypočítati celé spektrum, stačí, když vezmeme náležitý zřetel k jeho charakteristickým vlastnostem. To lze učiniti, aniž bychom blíže přihlíželi ke vzájemnému působení atomů jedněch na druhé, vyjdeme-li z obecných rovnic pro elastické kmity. Tyto rovnice jsou odvozeny za předpokladu, že těleso je kontinuum a vedou nás k tomu, že mu připisujeme nekonečně mnoho vlastních kmitů. Toto poslední je však na každý způsob nesprávné; těleso má N atomů a tedy jen $3N$ vlastních kmitů. Avšak v jednom ohledu je počet provedený na základě rovnic pro elastické kmity přece zajímavý. Tyto rovnice dají nám totiž určitý zákon o hustotě akustických spektrálních linií, t. j. o tom, jak jich přibývá, zvětšuje-li se frekvence. Budeme postupovati tím způsobem, že uznáme řečený zákon za přesně platný a ohled na rozpojitou strukturu hmoty vezmeme jen do té míry, že usoudíme toto: spektrum má v celku jen $3N$ čar a nikoli nekonečně mnoho. Podle toho zakončíme ono spektrum, vypočtěné z rovnic pro elastické kmity, při $3N$-té čáře; ostatní čáry pak vůbec vynecháme. S jistotou můžeme tvrditi, že spektrum skutečného tělesa souhlasí úplně s vypočítaným spektrem pro malé hodnoty frekvencí. Zrovna tak je však jisto, že pro velké frekvence, při nichž délka akustické vlny je srovnatelna se vzdáleností dvou atomů, je vypočtěné rozdělení spektrálních čar jen přibližně správné.

Debye neužívá obecných vět o asymptotickém rozdělení spektrálních čar, nýbrž vypočítává přímo akustické spektrum koule a odvozuje naznačenou cestou formuli, která dává při obyčejné teplotě zákon Dulong-Petitův a souhlasí při velmi nízkých teplotách s pokusy, jež ukázaly, že specifické teplo tuhých a kapalných látek jest úměrno třetí mocnině absolutní teploty.

Debyeovy úvahy jsou zvláště zajímavy tím, že dokazují účelnost klassických method založených na parciálních rovnicích (t. j. na předpokladu, že hmota vyplňuje prostor spojitě) i v případech, kde výslovně béřeme v úvahu nespojitou strukturu hmoty.

Poznamenávám konečně, že užitím Courantovy methody lze velmi jednoduše objasniti závislost vlastních tónů na způsobu, jakým jsou tělesa upevněna.

O úlohách sem spadajících pojednám při jiné příležitosti.