

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Příspěvky k teorii některých transcendent počtu integrálního. [VII.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 2-3, 89–93

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109186>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1921

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Príspevky k teorii některých transcendent počtu integrálního.*)

Píše **M. Lerch**.
(Pokračování.)

1.

Hodláme podati některé vztahy z teorie funkce

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

a zavedeme označení

$$\varphi(x) = \psi(x) - \psi(1) = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v+1} - \frac{1}{v+x} \right),$$

při čemž buď mimochodem poznamenáno, že $-\psi(1) = E = 0.57721566 \dots$ jest Eulerova konstanta.

Na prvním místě uvažujme funkci jednoznačnou

$$f(x) = \varphi(x+a) \varphi(x+b) = f(x | a, b),$$

kde a, b jsou konstanty, jejich rozdíl není číslem celistvým; funkce ta má póly prvního stupně na místech

$$x = -a - n \text{ s residuem } -\varphi(b - a - n),$$

a $x = -b - n$ „ $-\varphi(a - b - n)$, ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$),

takže funkce

$$G(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(b - a - n) \left(\frac{1}{x + a + n} - \frac{1}{a + n} \right) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a - b - n) \left(\frac{1}{x + b + n} - \frac{1}{b + n} \right)$$

je celistvá transcendentna.

Tu máme dále

$$f(x+1) - f(x) = \frac{\varphi(x+b)}{x+a} + \frac{\varphi(x+a)}{x+b} + \frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

a znamenáme-li řady na pravé straně výrazu $G(x)$ literami

*) Viz roč. XLVIII. a XLIX. — *Opravy* ku čl. 10 (str. 210—212, roč. XLIX): Str. 210 ř. 2 stůj v^{2v} místo v^2 , rovněž řádka 6. — Str. 211 ř. 3: spodní mez integrační má být 1. Poslední řádek v pravo v čitateli má státi $\pi \mathfrak{A}_{n-1}$. — Na str. 212 ř. 12 má pravá strana zníti 0.0^{55} .

$S_a(x)$ a $S_b(x)$, máme

$$\begin{aligned}
 S_a(x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(b-a-n) \left(\frac{1}{x+a+n+1} - \frac{1}{a+n+1} \right) \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(b-a-n) \left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{a+n} \right) \\
 &= \sum_0^{\infty} \varphi(b-a-n-1) \left(\frac{1}{x+a+n+1} - \frac{1}{a+n+1} \right) \\
 &\quad + \sum_0^{\infty} \frac{1}{b-a-n-1} \left(\frac{1}{x+a+n+1} - \frac{1}{a+n+1} \right) \\
 &\quad + \sum_0^{\infty} \varphi(b-a-n) \left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{a+n} \right) \\
 &= S_a(x) - \varphi(b-a) \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{a} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{x+b} \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{a-b+n+1} - \frac{1}{x+a+n+1} \right) + A,
 \end{aligned}$$

kde A značí veličinu na x nezávislou. Máme tak

$$\begin{aligned}
 S_a(x+1) - S_a(x) &= -\frac{\varphi(b-a)}{x+a} + \frac{\varphi(a-b+1)}{x+b} \\
 &\quad - \frac{\varphi(x+a+1)}{x+b} + A',
 \end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned}
 S_b(x+1) - S_b(x) &= -\frac{\varphi(a-b)}{x+b} + \frac{\varphi(b-a+1)}{x+a} \\
 &\quad - \frac{\varphi(x+b+1)}{x+a} + B',
 \end{aligned}$$

a sečtením máme po redukci

$$\begin{aligned}
 [S_a(x+1) + S_b(x+1)] - [S_a(x) + S_b(x)] &= -\frac{\varphi(x+a)}{x+b} \\
 &\quad - \frac{\varphi(x+b)}{x+a} - \frac{1}{(x+a)(x+b)} + C,
 \end{aligned}$$

kde C nezávisí na x . Vychází tak vztah

$$G(x+1) = G(x) + C.$$

Devivace

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= \varphi'(x+a) \varphi(x+b) + \varphi(x+a) \varphi'(x+b) \\
 &\quad - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi(b-a-n)}{(x+a+n)^2} - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi(a-b-n)}{(x+b+n)^2}
 \end{aligned}$$

je celistvá funkce s periodou 1; můžeme omeziti reálnou část $\xi(x = \xi + i\eta)$ na určitý intervall ($k \dots k + 1$); výraz ukazuje, že pro veliká η je pak $G'(x)$ malé, t. j. $|G'(x)|$ je pod stálou mezí, je konstantou, a ta musí býti nullou: $G'(x) = 0$.

Naše veličina $G(x)$ je tedy stálou, i nacházíme vztah

$$(I) \begin{cases} \varphi(x+a)\varphi(x+b) - \varphi(a)\varphi(b) \\ = \sum_0^{\infty} \varphi(b-a-n) \left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{x+a+n} \right) \\ + \sum_0^{\infty} \varphi(a-b-n) \left(\frac{1}{b+n} - \frac{1}{x+b+n} \right). \end{cases}$$

Dosadíme-li sem ještě $x = 1 - b$, $\varphi(1) = 0$, vyjde

$$\begin{aligned} \varphi(a)\varphi(b) &= \sum_0^{\infty} \varphi(a-b-n) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+b} \right) \\ &\quad - \sum_0^{\infty} \varphi(b-a-n) \left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a-b+n+1} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Pišme v (I) $a+1$ za a , $x = v-1$, a kladme $b=1$:

$$\begin{aligned} \varphi(v)\varphi(v+a) &= \sum_0^{\infty} \varphi(-a-n) \left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{v+a+n} \right) \\ &\quad + \sum_0^{\infty} \varphi(a-n) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{v+n} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

dosadíme hodnoty dle vzorce

$$\varphi(-a-n) = \varphi(a+n+1) + \pi \cotg a\pi. \text{ tedy}$$

$$\begin{aligned} \varphi(v)\varphi(v+a) &= \sum_0^{\infty} \varphi(a+n+1) \left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{v+a+n} \right) \\ &\quad + \sum_0^{\infty} \varphi(n+1-a) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{v+n} \right) \\ &\quad + \pi \cotg a\pi [\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)]. \end{aligned} \quad (2^*)$$

V druhé řadě odštěpme člen $n=0$ (stává se nekonečným pro $a=1$), a výsledek

$$\begin{aligned} \varphi(v)\varphi(v+a) &= \sum_0^{\infty} \varphi(a+n+1) \left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{v+a+n} \right) \\ &\quad + \sum_1^{\infty} \varphi(n+1-a) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{v+n} \right) \\ &\quad + \pi \cotg a\pi [\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)] \\ &\quad + \frac{v-1}{v} \varphi(1-a) \end{aligned}$$

integrujme dle a od 0 do 1; vzhledem k identitě

$$\varphi(x) = E + D_x \log \Gamma(x)$$

vyjde

$$\begin{aligned} \varphi(v)(E + \log v) &= \int_0^\infty \varphi(x+1) \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+v} \right) dx \\ &+ \sum_1^\infty (E + \log n) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{v+n} \right) \\ &+ \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \left\{ \pi \cotg a\pi [\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{v-1}{v} \varphi(1-a) \right\} da. \end{aligned}$$

Tu máme

$$\int_0^{1-\varepsilon} \varphi(1-a) da = \int_\varepsilon^1 \varphi(x) dx = E - \log \Gamma(\varepsilon) = E + \log \varepsilon + \dots,$$

takže na pravé straně přichází číslo E násobeno veličinami

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+v} \right) \text{ a } \frac{v-1}{v},$$

jichž součet je $\varphi(v)$, takže toto číslo ze vzorce vypadne.

Dále plyne integrací po částech

$$\begin{aligned} &\int_0^{1-\varepsilon} [\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)] \pi \cotg a\pi da \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} [\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)] \log \sin a\pi \\ &\quad - \int_0^{1-\varepsilon} [\varphi'(a+v) - \varphi'(a+1)] \log \sin a\pi da. \end{aligned}$$

Veličiny $[\varphi(v+a) - \varphi(v)] \log \sin a\pi$ a $\varphi(a+1) \log \sin a\pi$ vymizí pro $a=0$ a zbývá jako hodnota integrálu předešlého

$$\left(\frac{1}{v} - 1 \right) \log \sin \varepsilon\pi - \int_0^1 [\varphi'(a+v) - \varphi'(a+1)] \log \sin a\pi da,$$

s chybou nekonečně malou. Tak vychází

$$\left. \begin{aligned} q(v) \log v &= \int_0^{\sigma} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+v} \right) \varphi(x+1) dx \\ &+ \sum_1^{\infty} \log n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+v} \right) + \frac{1-v}{v} \log \pi \\ &+ \int_0^1 [\varphi'(x+1) - \varphi'(x+v)] \log \sin x\pi dx. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(Pokračování.)

O separaci kořenů rovnice algebraické dle reálných částí kořenů a o důkaze fundamen- tální věty algebry.

Napsal K. Petr.

(Dokončení.)

2. Dříve ještě než přistoupíme k vyšetření, za jakých podmínek při změně proměnné ξ se v řadě (9) mění počet změn znaménkových, vyjádříme si výrazy C_k, c_k pomocí součinitelů A_k . Nejprve lze C_k a c_k psát v důsledku již zavedeného označení (pro $k = 1, 2, \dots, m$) ve tvaru

$$C = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{k-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k-1} & S_k & \dots & S_{2k-2} \end{vmatrix},$$

$$c_k = (-1)^k \begin{vmatrix} S_{-1} & S_0 & \dots & S_{k-2} \\ S_0 & S_1 & \dots & S_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k-2} & S_{k-1} & \dots & S_{2k-3} \end{vmatrix} A_{2m}$$

Čísla S_0, S_1, \dots jsou koeficienty v rozvoji podílu $h(X) : g(X)$ dle klesajících mocnin čísla X , neboť jest

$$\begin{aligned} \frac{h(X)}{g(X)} &= \frac{\Theta_1}{X - \varepsilon_1} + \frac{\Theta_2}{X - \varepsilon_2} + \dots + \frac{\Theta_m}{X - \varepsilon_m} = \\ &= \frac{S_0}{X} + \frac{S_1}{X^2} + \frac{S_2}{X^3} + \dots + \frac{S_k}{X^{k+1}} + \dots \end{aligned}$$