Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Klíma

Sestrojení rovnoosé hyperboly ze dvou imaginárných bodů a dvou imaginárných tečen

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 2-3, 115--120

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109185`

při čemž jest obecně:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v, \tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (k+g)^2 2 + \pi i (k+g)(v+h)} \qquad (26)$$

Na počátku připomenuté vztahy $\vartheta_0 (v + \frac{1}{2}) = \vartheta_3 (v), \vartheta_1 (v + \frac{1}{2}) = \vartheta_2 (v)$ praví, že pro thetafunkce $\vartheta_3 (v)$ a $\vartheta_2 (v)$ obdržíme tytéž obrazce 4. a 5, pouze o jednu šířku pásu třeba posunouti v obr. 3.

Charakteristiky nemají tudíž na zobrazení thetafunkcí vlivu podstatného. —

Ke konci podotýkám, že thetafunkce nemajíce formule addiční, neposkytují isogonálního zobrazení obvyklým způsobem. Reálnou a imaginálnou část nelze obecně vyjádřiti funkcemi téhož druhu (thetafunkcemi).

Sestrojení rovnoosé hyperboly ze dvou imaginárných bodů a dvou imaginárných tečen.

Dr. Klíma Josef.

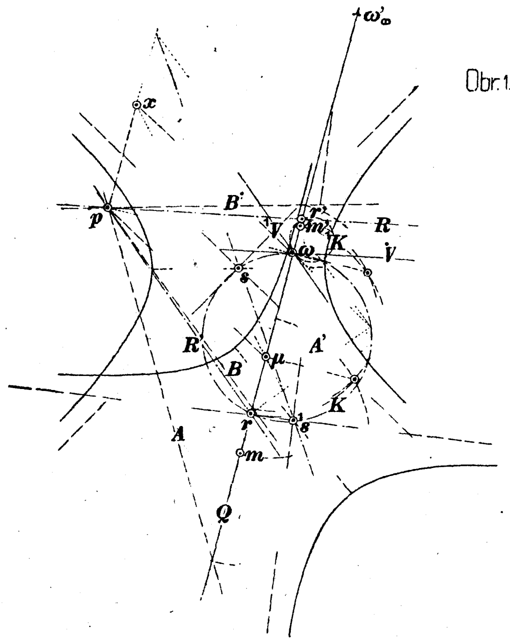
1. Buďtež dány (obr. 1) imag. tečny $^1T^i$, $^2T^i$ eliptickou involucí AA', BB' kol bodu p a imag. body $^1b^i$, $^2b^i$ eliptickou involucí mm', $\omega\omega'_\infty$ na přímce Q. Všechny kuželosečky jdoucí body $^1b^i$, $^2b^i$ a dotýkající se tečen $^1T^i$, $^2T^i$ tvoří smíšený systém kuželoseček, jichž středy jsou na dvou soustředných kuželosečkách Σ, Σ_1 *) opsaných rovnoběžníku $p\,\mu\,\omega\,x$, kde ω je střed bodové involuce $(mm', \omega\omega'_\infty)$, μ střed involuce vyťaté paprskovou involucí p $(AA'\ BB')$ na přímce Q a $\overline{px} \,\|\, \overline{\mu\omega}$. Tečny k těmto kuželosečkám středovým v bodě p jsou společným párem R, R' involuce p $(AA'\ BB')$ a involuce paprskové, jíž promítá se involuce daná na přímce Q z bodu p. Ježto obě involuce jsou eliptické je jich společný pár vždy reálný. Tím obě středové kuželosečky Σ, Σ_1 určeny. Na těchto musí býti též středy hyperbol rovnoosých dotýkajících se tečen $^1T^i$, $^2T^i$ a procháze-

---

*) Jak ukázal jsem též v pojednání: »Polárné vlastnosti soustavy kuželoseček určených dvěma body a dvěma tečnami« Rozpravy České akad. roč. 1919 čís. 5.

jící body ${}^1l^i$, ${}^2l^i$. Další geometr. místo pro středy těchto určíme následovně:

Uvažujme kuželosečky dané pólem r s příslušnou polárou R a dvěma páry sdruž. bodů $\omega\omega'$ a i ${}^1i$ a sice tak, že ω' i ${}^1i$ jsou v jediné přímce U (obr. 2.). Tím dáno ∞^1 kuželoseček a určme



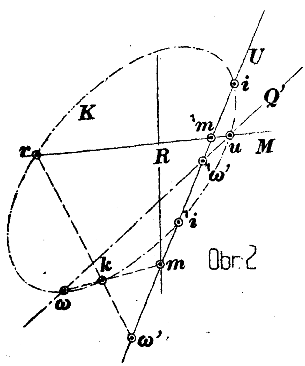
vzhledem k těmto geom. místo pólu u přímky U. Bychom jednu takou kuželosečku si vytkli, zvolme k pólu ω' za poláru přímku Q' jdoucí ovšem sdruž. bodem ω. Tato protíná přímku U v sdruž. bodě ${}^1\omega'$ k bodu ω', čímž máme na U určenu involuci sdruž. bodů (i ${}^1i$, ω' ${}^1\omega'$). Průsečíku m poláry R s přímkou U přísluší v této involuci sdruž. bodů bod ${}^1m$, který spojen s pólem r přímky R dává poláru M bodu m. Průsečík u polár M a Q' bodů m, ω' přímky U je pólem této vzhledem k vytknuté kuželosečce. Měníme-li poláru Q' snadno nahlédneme z prometnosti svazků r (M . . . .) a ω (Q' . . .), že pól u vyplňuje kuželosečku K jdoucí body r, ω, i, ${}^1i$ a průsečíkem K spojnic $\overline{\omega m}$ a $\overline{r\omega'}$.

Přejde-li přímka U v úběžnou přímku a body i ^1i v imag. body kruhové tu dostáváme větu:

Středy všech rovnoosých hyperbol daných pólem r a polárou R a středem ω involuce, jež indukují na přímce Q jsou na kružnici jdoucí body r, ω a průsečíkem k rovnoběžek vedených body r resp. ω s přímkami Q resp. R."

Výsledek tento je zvláštním případem obecnější věty, jíž lze elementárně dokázati a jež praví:

„Sestrojíme-li při hyperbole rovnoosé pólem p rovnoběžku s polárou Q pólu q a pólem q rovnoběžku s polárou P pólu p,



Obr. 2

tu jich průsečík k je s póly p, q na kružnici, jež prochází středem s hyperboly."

Jsou-li body p, q sdruž. body t. j. prochází-li Q bodem p a P bodem q dostaneme jako zvláštní případ známou větu, že kružnice opsaná trojúhelníku polárnému hyperboly rovnoosé prochází jejím středem.*)

Obraťme se nyní k řešení úlohy předložené. Pro hyperbolu naší známe pól r (průsečík to R' s Q) (obr. 1.) a poláru tohoto R jakož i střed ω involuce na Q i musí tedy dle věty shora dokázané střed hyperboly rovnoosé býti na kružnici K jdoucí body r, ω a dotýkající se v posledním tečny $V \parallel R$ středové kuželosečky Σ. Průsečíky kružnice K s kuželosečkou středovou Σ

*) Viz ku př. pojednání prof. dr. Kadeřávka „Příspěvek k teorii hyperboly rovnoosé" v XLIV. roč. tohoto časopisu str. 412.

jsou středy hledaných rovnoosých hyperbol. Ježto K dotýká se Σ v bodě ω jsou tyto průsečíky s, $'s$ jen dva a určí se snadno kolineací obou křivek. Hyperboly pak samy snadno již určíme.

Stejně uvažujeme-li pól r' s přísl. polárou R' dostaneme kružnici ^1K dotýkající se přímky $^1V \parallel k'$ v bodě ω a jdoucí bodem r' a průsečíky její s Σ_1 jsou středy dalších dvou rovnoosých hyperbol, jež v našem případě jsou imaginárné. Úloha tedy obecně *čtyřznačná.*

2. Úlohu tuto možno řešiti též *kolineací s kružnicí.* Kdyby dané dva body ^1b, ^2b byly reálné tu úloha je jednoduchá. Zvolili bychom kružnici K indukující v bodě p touž involuci jako hledaná hyperbola a ta je s touto kolineárná pro střed p. Bodům ^1b, ^2b budou odpovídati na K body $^1b_1$, $^2b_1$ a úběžnice půjde úběžníkem ω_1' spojnice $\overline{^1b_1 \, ^2b_1}$ a to tak, by tetiva vytknutá na této kružnici K spatřovala se z bodu p pod pravým úhlem. S touto pak jde osa kolineace rovnoběžně a úloha řešena. Třeba proto jen uvážiti co obalují v kružnici K tětivy, jež spatřují se z libovol. bodu p pod pravým úhlem. Veďme bodem p libovolné dvě kolmice $U \perp {}^1U$*), jež vytínají na kružnici K čtyřúhelník $mnrq$, jehož strany obalují hledané geom. místo. Ježto tento čtyřúhelník je vepsán kružnici K jsou jeho diagonálné rohy x, y (třetí je p) na poláře P bodu p vzhledem ke kružnici K. Myslíme-li si jiný takový čtyřúhelník $abcd$ vepsaný kružnici K, jehož úhlopříčky jdou bodem p a stojí k sobě kolmo, tu opět dva jeho diag. vrcholy jsou na P. Kuželosečka Σ dotýkající se stran čtyřúhelníka $mnrq$ a jedné ze stran čtyřúhelníka $abcd$, bude míti za poláru bodu p přímku P jak patrno z polárného trojstranu U^1UP a z harmoničnosti v čtyřúhelníku $abcd$ plyne, že kuželosečka Σ dotýká se též ostatních jeho stran. Ježto kolmice U^1U v bodě p tvoří pravoúhlou involuci, již indukuje též kuželosečka Σ v tomto bodě máme výsledek, který zřejmě platí pro každou kuželosečku:

„Obálkou tětiv v kuželosečce K, jež spatřují se z libovolného bodu p pod pravým úhlem je kuželosečka Σ mající v bodě p ohnisko a v poláře P bodu toho vzhledem ke kuželosečce K přímku řídící."

*) Obraz nechť si čtenář laskavě sestrojí.

Je-li kuželosečka K kružnicí o středu s, snadno se nahlédne, že kuželosečka Σ má druhé ohnisko ve středu s a vrcholy hlavní osy omezíme snadno čtyřúhelníkem, jehož úhlopříčky svírají se spojnicí $\overline{sp}$ úhly 45^0.

Výsledek ten dá se ještě zobecniti tím, že v bodě p zvolíme místo pravoúhlé involuce libovolnou paprskovou involuci a dostaneme:

„Strany čtyřúhelníků vepsaných kuželosečce K, jichž úhlopříčky jdou bodem p a tvoří tam paprskovou involuci, obalují kuželosečku Σ indukující v bodě p tutéž involuci a obě kuželosečky mají pro p tutéž poláru P.“

Některé zvláštní případy prvé věty jsou:

Je-li K rovnoosou hyperbolou, je Σ parabolou.

Kdyby p bylo na K tu Σ přejde v bod i v prvé i v druhé větě, známý to výsledek.

Jest li bod p splyne se středem kuželosečky K tu v prvé větě kuželosečka Σ je kružnicí soustřednou s K.

Obraťme se nyní k řešení naší úlohy *kolineací.* Imag. body b^i, ${}^1b^i$ buďtež jako v 1. části dány na přímce Q elipt. involucí $(\omega\omega'_\infty\ mm')$ a tečny $T^i\ {}^1T^i$ elipt. involucí (AA', BB') v bodě p. Sestrojme pravoúhlý pár X, X' poslední involuce; na X' (který je v tupém úhlu páru $A\,A'$) zvolíme střed o kružnice K, jež indukuje v p tutéž involuci jako hledaná rovnoosá hyperbola a která je kolineárná k této pro střed kolineace p. Půjde o osu kolineace O. Třeba k imag. bodům $b^i\ {}^1b^i$ na Q sestrojiti homologické body imag. na K. Tyto budou čtyři, jež jsou po dvou imag. sdružené a jsou tudíž na dvou reálných přímkách Q_1 a ${}^1Q_1$ odpovídajících spojnici Q v příslušných kolineacích. Přímky tyto jsou kolineačními osami kružnice K a zvrhlé kuželosečky L^i, jež skládá se z imag. samodružných paprsků involuce paprskové, jež z bodu p promítá involuci eliptickou určující body $b^i\ {}^1b^i$. Tyto určíme stanovením společ. trojúhelníka polárného obou kuželoseček, jehož dvěma stranami je společný pár $R\,R'$ involuce určující L^i a involuce urč. $T^i\ {}^1T^i$ a třetí stranou je polára P bodu p vzhledem ku K. Sestrojíme-li pak pár sdruž. bodů c, c' k oběma kuželosečkám K a L^i tu strany jdoucí jedním z vrcholů společného trojúhelníka polárného a spojnice vrcholu toho s body $c\,c'$ určují hyperbolickou involucí, jejímiž samodruž. paprsky jsou přímky Q_1 a $'Q_1$. Pro další pak stačí uvažovati jen jednu z těchto přímek, třeba Q_1, jejíž imag. průsečíky s kružnicí K odpovídají imag. bodům b^i $'b^i$ na přímce Q. Kdybychom vzali imag. body na $'Q_1$ dostali bychom tytéž dvě rovnoosé hyperboly. Úběžnice U_1 kolineace jde úběžníkem ω'_1 přímky Q_1 a je tečnou k elipse Σ mající ohniska v o a p a jejíž hlavní osu snadno omezíme dle hořejšího. Ježto z ω'_1 dají se k Σ sestrojiti dvě tečny dostáváme dvě úběžnice a tudíž dvě rovnoosé reálné hyperboly. Další dvě hyperboly jsou imaginárné.

O sesilovači stejnosměrného proudu.

Napsal **August Žáček.**

(Dokončení.)

II. Část experimentální.

V tomto oddílu chceme jednak ukázati, jak souhlasí formule, odvozená pro efekt sesilovače, s měřeními, jednak podati několik ukázek měření veličin S, D, R_i popsanou kompensační metodou.*)

Jednolampový sesilovač.

Nejprve studován sesilovač jednolampový, jenž jest poměrně jednoduchý, takže se dá u něho čekati daleko lepší souhlas s měřeními než u komplikovanějších sesilovačů vícelampových, u nichž formule, udávající efekt sesilovače, obsahuje větší množství veličin, jež nutno měřiti.

Uspořádání, jehož bylo při měření užito, jest schematicky znázorněno na obr. 6. Všechny veličiny byly určovány pokud možno za týchž podmínek; pomocí několika klíčů a přepínačů bylo totiž možno, spojení vhodným způsobem pro různá měření rychle měniti. Jako sesilovací lampy užito francouzské heterodynové lampy L. Poněvadž intensita nasyceného proudu roste daleko rychleji s rostoucí intensitou topného proudu než s napětím na pólech katody, bylo tohoto napětí užito k měření tepného proudu (tak zvané topení dle napětí): topný proud byl

---

*) Při měřeních pomáhal mi p. Dr. Šimůnek, asistent Masarykovy university v Brně, za což jsem mu zavázán velkým díkem.