

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Quido Vetter

Ke chronologii Archimedových geometrických objevů a spisů. [I.]

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 50 (1921), No. 2-3, 81--88

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109178>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1921

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Ke chronologii Archimedových geometrických objevů a spisů.

Quido Vetter.

Většina Archimedových spisů zabývá se otázkami geometrickými, obsahy ploch a těles a polohou těžiště v geometrických útvarech. Jsou to: „O rovnováze rovin“, „Kvadratura paraboly“, „O kouli a válci“, „O spirálách“, „O konoidech a sféroidech“, „O plovoucích tělesech“. K nim se druží r. 1906 J. V. Heibergem nalezená „Metoda“ a „Měření kruhu.“ Umístěním posledního pojednání, které nezapadá do celkového rámce ostatních prací v řadě Archimedových spisů, se nebudu v této své práci obrátit.

Každý z prvních šesti spisů obsahuje jednu nebo několik hlavních pouček. Ostatní poučky jsou jen pomocnými stavebními kameny nebo jen doplňujícími příkrasami k budově důkazů pouček hlavních. Důkazy ty jsou umělé, logicky ucelené, takže tušíme, že Archimedes při sestavování svých pevně skloubených logických pochodů předem znal výsledek svých úvah. <sup>1)</sup> Odpověď na otázku, jak Archimedes objevil zmíněné hlavní poučky, nalézáme pro většinu těchto pouček v „Metodě“ <sup>2)</sup>. Díváme-li se na Archimedovo dílo z tohoto hlediska, pak rozpadá se nám problem chronologie jeho díla na dvě speciální otázky, na chronologii jeho objevů a na chronologii jeho spisů.

Nelze ovšem jeho pojednání nefku-li jeho myšlenky přesně datovati. Můžeme však na základě zmínek a narážek v předmluvách jimiž jest většina jeho spisů opatřena jakož i na základě odvolávání se při matematických vývodech na poučky v jiných

<sup>1)</sup> Důvody pro toto tvrzení jsou sneseny v „Novém Atheneu“ I, str. 292 nn.

<sup>2)</sup> O této viz v mém článku: „Několik poznámek in margine Archimedových spisů, zvláště „Metody“ I., Čas. pro pěst. mat. a fys. roč. II., str. 224 nn.

jeho spisech stanoviti s jakousi pravděpodobností pořad jeho spisů. Rozhraním v chronologii Archimedova díla jest smrt Konona, muže, jehož jméno před zapomenutím zachránila jen velká úcta, s kterou je Archimedes uvádí ve svých předmluvách.

Před smrtí Kononovou jal se Archimedes studovati základy mechaniky, zvláště nauku o páce. Výsledky svého badání uložil asi ve ztraceném spise *Περί ζυγῶν* (o pákách). Heath<sup>3)</sup> připouští, že tento spis byl totožný se spisem *Ἴσορροπία*, či *Ἴσορροπικά* (O rovnováze), na něž se Archimedes odvolává v „Plovoucích tělesech“ a v „Metodě“<sup>4)</sup> a o němž se zmiňuje Pappos<sup>5)</sup>. Za část tohoto spisu by se podle Heatha mohl považovati i zachovaný spis *Ἐπιπέδων Ἴσορροπία*, čili „O rovnováze rovin.“

Nechť jest tomu tak či onak, jest patrné, že se ztratil důkaz dvou vět, kterých Archimedes ve svých spisech používá.

Po té byla zpracována látka obsažená v I. knize „O rovnováze rovin“. Dokazuje tu 15 vět, z nichž prvých osm se týká rovnováhy břemen na dvouramenné páce a polohy těžiště soustavy několika břemen. Věty 9. a 10. vyjadřují polohu těžiště rovnoběžníka, věty další připravují důkaz poučky 14. určující těžiště trojúhelníka. Poučka poslední konečně stanoví polohu těžiště v lichoběžníku.

Hlavní poučky této knihy jsou uvedené věty 9. 10. 14. a 15. Jich objev se nestal podle „Metody.“ Věty o těžišti rovnoběžníka jsou na to příliš jednoduché, ostatní by pak vedly ku ploše parabolické úseče. Mimo to praví Archimedes v předmluvě k „Metodě“ (výslovně<sup>6)</sup>), že svým novým způsobem nejdříve objevil vzorec pro plochu parabolické úseče, kterýžto objev předpokládá znalost polohy těžiště trojúhelníka. Důkazy hlavních pouček nutně předpokládají věty ostatní až na větu 12., která jest vsak pouhý důsledek věty 11. Některé z těchto vět Archimedes asi objevil, zabývá se naukou o páce, ostatní pak při analýsě předem známých pouček hlavních, hledaje jejich důkazy. Těžkopádný postup důkazu věty o poloze těžiště trojúhelníka

<sup>3)</sup> Heath. *Archimedes' Werke*. Deutsch von F. Kliem, 1914. 27. Toto dílo označím v dalším jen Heath.

<sup>4)</sup> *Archimedis opera omnia iterum edita* J. L. Heiberg π, 360 a 438. Toto vydání v *Bibl. class. teubn.* označím v dalším jen Arch.

<sup>5)</sup> Pappos. VIII. 1032/3. <sup>6)</sup> Arch. II. 431.

zdá se nasvědčovatí tomu, že Archimedes, nejsa si tak jist výsledkem jako u vět, objevených podle „Metody,“ postupuje s úzkostlivou opatrností, ba dokazuje jednu věc vlastně třikráte (v postulátě 5. a větě 11. a 12.). Či jsou to vady práce z počátku jeho činnosti? Zdá se mi nejpravděpodobnějším, že se přesvědčil nejdříve pokusem, zavěšováním, o poloze těžiště v průsečku těžnic. Těžnice kosodélníka a trojúhelníka mohl vyšetřiti mechanickou úvahou, při níž rozložil tyto útvary v nekonečně úzké vrstvy, v rovnoběžné úsečky podle jeho terminologie v „Metodě“. Tento postup byl by také průpravou ke způsobu v „Metodě“ vylíčenému. Věta o těžišti lichoběžníka mohla pak býti objevena již úvahou analogickou důkazu provedenému v uvažovaném spise.

Zda hledal Archimedes i těžiště jiných mnohoúhelníků, nelze dnes říci. Jest vsak pravděpodobno, že hledal také těžiště obrazců křivočarých. Na počátku metody uvádí 11 pomocných vět<sup>7)</sup>. Z těchto pouček jest prvá samozřejmá, ač není důvodu, proč by nemohla býti ve ztracené nejstarší části Archimedových mechanických spisů. Poučky 2. až 6. jsou dokázány v I. knize „O rovnováze rovin.“ Věty 7. až 10., které Archimedes nikterak od předešlých neodlišuje, pokládá za stejně platné. V nich stanoví se těžiště kruhu, válce, hranolu a kužele. Poněvadž nemáme nejmenšího podkladu, abychom se domnívali, že věty ty, zvláště těžiště kužele, byly známy před Archimedesem a poněvadž on se podobnými úvahami obíral, jest nejpravděpodobnější, že poučky ty byly v jeho ztracených spisech dokázány. To předpokládá pro pomocnou větu 10. (o těžišti kužele) také Heath<sup>8)</sup> a konstruuje z tohoto předpokladu důvod pro názor, že spis „O rovnováze rovin“ jest zkomolenou částí větších, „Základů mechaniky.“

Z jiných křivočarých obrazců víme jen o parabolické úseči, že Archimedes hledal její těžiště. Výsledky jeho badání zachovaly se ve II. knize „O rovnováze rovin.“ Kniha ta uvedena jest větou z I. knihy, aplikovanou na dvě parabolické úseče. Potom ve třech větách pomocných a 6 poučkách připravuje důkaz hlavní poučky 8., určující polohu těžiště parabolické úseče. Za tím účelem vepisuje do parabolické úseče známý obrazec složený z troj-

<sup>7)</sup> Arch. II. 430—434. <sup>8)</sup> Heath. 27.

úhelníků, jak jej ještě dnes při důkazu vzorce pro plochu parabolické úseče na střední škole užíváme. Obrazec ten nazývá Archimedes zde i ve „Kvadratuře paraboly“ „obrazec sestroyený známým způsobem“. Při objevu 8. poučky nemohl Archimedes ještě použití svého mechanického způsobu, neboť by byl došel ku ploše semikubické paraboly, kterou jistě nedovedl vypočítati. Objev provedl asi pokusem, zavěšováním destičky tvaru parabolické úseče.

Archimedes snažil se přirozeně přivésti hledané těžiště do vztahu s těžištěm známých útvarů a tu musil za nejvýhodnější považovati trojúhelník. Vlastnosti průměru paraboly a sdružených tětiv byly tehdy známy, neboť se na ně jako na známé odvolává v „Kvadratuře paraboly“.<sup>9)</sup> Tyto znalosti přivedly Archimeda ke konstrukci „obrazce sestroyeného známým způsobem,“ na němž založen důkaz poučky o těžišti parabolické úseče. Při tomto důkaze byla však věcí nejdůležitější nutnost, vyjádřiti plochu parabolické úseče. Úloha ta, na niž při hledání důkazu uvažované poučky narazil, musila vzbuditi u starořeckého učenca, který znal důmyslné pokusy svých předchůdců o kvadraturu kruhu, hluboký zájem. To jest patrné i z předmluvy „Kvadratury paraboly“,<sup>10)</sup> kde se zmiňuje o pokusech těch a o tom, že jest prvý, který se zabýval kvadraturou paraboly. O významu tohoto problému, pro životní geometrické dílo Archimedovo, zmíním se později.

Teprve když tento problém byl rozřešen, mohl Archimedes dokončiti důkaz věty o těžišti úseče a přikročiti ke druhé hlavní poučce, o poloze těžiště plochy, omezené parabolou a dvěma rovnoběžnými tětivami. Důkaz její mohl by se na prvý pohled zdáti nepřirozeně umělým. Než lze ukázati, že vyplynul zcela přirozeně ze snahy, žádaný vzorec vyvoditi z délek, které lze na dané ploše přímo odměřiti.<sup>11)</sup>

Zajímavé jest i místo, kam máme obě knihy „O rovnováze rovin“ zařaditi v pořadí uveřejněných Archimedových spisů. Jak jsem již dříve podotkl, předcházela první knihu nějaká publikace. Poslední věta této knihy uvedena jest jako známá,

<sup>9)</sup> Arch. II., 268.   <sup>10)</sup> Arch. II., 262.

<sup>11)</sup> Viz Několic poznámek a t. d., VI.

totiž bez důkazu v „Kvadratuře paraboly“, <sup>12)</sup> což by nasvědčovalo tomu, že „Kvadratura“ byla publikována po této knize. „Kvadratura paraboly“ však předcházela II. knihu rozebíraného spisu, neboť důkaz hlavní poučky 8. používá plochy paraboly jako známé. Z těchto asi důvodů řadí se „Kvadratura“ mezi obě knihy. <sup>13)</sup> Mezi objevem obsahu plochy parabolické úseče a jeho publikací minula, jak ukáží, perioda tak bohaté matematické práce, že doba ta musila být dosti dlouhá. Tyto důvody vedou mne k názoru, že Archimedes své „Základy mechaniky“, o jejichž pravděpodobnosti jsem se již zmínil, nenapsal jako jediné dílo, nýbrž že to byla spíše řada pojednání sepsaných pod zorným úhlem jediné vůdčí myšlenky a publikovaných ve volných časových lhůtách. Názor, že II. kniha „O rovnováze rovin“ byla takovým samostatným celkem, jest také podporován okolností, že tato kniha jest uvedena, jak již řečeno, větou z I. knihy, aplikovanou na parabolické úseče. Tuto okolnost vykládá Heath <sup>14)</sup> snahou větu tu zdůrazniti. Poněvadž však tato snaha by zde byla příliš ojedinělá, zdá se mi předcházející výklad pravděpodobnějším

Ukázal jsem, že Archimedes byl k problému obsahu parabolické úseče přiveden, zahloubán jsa v úvahy mechanické. Tento myšlenkový obor byl živnou půdou, na níž vzklíčil geniální nápad jeho nového objevného způsobu. A první problém, jím rozřešený, byl obsah parabolické úseče. Tu dostal Archimedes do ruky klíč k objevu skoro všech svých nových pouček. To-li pochopíme, tu nabývá teprve jiného významu tvrzení, že si Archimedes nejvíce zakládal na poučce, vyjadřující poměr obsahů rovnostranného válce, vepsané koule a vepsaného kužele, a že si prý přál, aby její znázornění zdobilo jeho náhrobek. Byl to širším kruhům nejpochopitelnější representant jeho celého geometrického díla, vytrysknuvšího z jediného pramene. Před Archimedesem otevřelo se celé pole nových poznatků, z něhož hojně čerpal. Byl si však také vědom, že je nevyčerpal, neboť praví v předmluvě k „Metodě“, <sup>15)</sup> že jiní matematikové objeví tímto způsobem řadu vět, na které si nevzpomněl.

<sup>12)</sup> Arch. II., 280.    <sup>13)</sup> Heath, I. c. 20.

<sup>14)</sup> Heath, I. c. 327.    <sup>15)</sup> Arch. II., 430.

Kdo sám prožil tvůrčí radost, ten pochopí, že Archimedes byl tak zabrán ve své studium, že neměl času je formulovati v klassických pojednáních, ač myšlénkový postup přesných exhaustivních důkazů již znal, jinak by nebyl poučky ty uveřejnil.<sup>16)</sup> Poslal aspoň jejich znění Kononovi. Nevíme, kdo byl ten muž, jehož matematického intelektu si náš ženiální vědec tak vysoko vážil.<sup>17)</sup> Byl to důvěrný přítel a vrstevník jeho, či snad byl jeho učitelem, že o něm s takovou úctou mluví? V předmluvě spisu „O spirálách“<sup>18)</sup> máme výčet pouček, jež Kononovi zaslal. Jsou to hlavní poučky všech jeho dalších geometrických spisů až na věty o rotačním elipsoidu a dvojplochem rotačním hyperboloidu a na úvahy z „Plovcích těles“. Věty o hyperboloidu a elipsoidu asi také již znal, leč nedovedl jich ještě dokázati.

Jak patrně, bylo to nesmírně plodné období Archimedova vědeckého života, kdy až na některé detaily koncipoval své celé geometrické životní dílo. Ta současnost všech těchto objevů mimoděk nám vnuká myšlénku, že Archimedes objevů těch došel pokud možno po jedné objevné cestě, kterou nám vylíčil ve své „Metodě“.

Svůj mechanický objevný způsob vymyslel při úvahách o těžišti rovinných útvarů. Potom přistoupil asi k hledání těžiště těles. Snad má Simplicios nějakou nám neznámou publikaci na mysli, když mluví o Archimedově spisu *Κεντροβαρική* (O těžištích) a o elegantních větách Archimedových, kterými se určuje těžiště těles jako bod, v němž byvší těleso zavěšeno, zůstává ve své poloze.<sup>19)</sup> Heath míní,<sup>20)</sup> že netřeba z tohoto místa usuzovati na zvláštní dílo Archimedovo pod názvem Simplikiem uvedeným. Mně se naproti tomu zdá, že tato slova Simplikiova podporují můj názor, že Archimedes své výzkumy o těžištích těles publikoval v jedné nebo několika pracích nám dnes neznámých.

Prostým zavěšováním modelů mohl se Archimedes přesvědčiti o tom, že těžiště těles podle středů souměrných, na př. válce a hranolu v pomocných již zmíněných větách na počátku

<sup>16)</sup> O léto zásadě Archimedově viz »Nové Atheneum« I. 295.

<sup>17)</sup> Arch. II., 262. a II. 2. <sup>18)</sup> Arch. II. 4. nn.

<sup>19)</sup> Simplicius: De caelo, ed. Heiberg II., 14, p. 543.

<sup>20)</sup> Heath, 26.

„Metody“, leží v tomto středu. Důkaz byl jistě jednoduchý a zakládal se na poučkách o páce v „Rovnováze rovin“. Když Archimedes studoval polohu těžiště koule, nebylo divu, že se pokusil i o vyšetření jejího obsahu. Jakou cestou se mu to podařilo, o tom svědčí „Metoda“ a důkaz ve spise „O kouli a válci“. Od koule k rotačnímu elipsoidu byl již jen krok, byť mu i důkaz, který musil jinak založiti než u koule, působil obtíže.

Potom přišel na řadu kužel a snad i jehlan. Že polohu těžiště kužele znal, ba že ji později i publikoval v nějaké nám nezachované práci, o tom svědčí uvedená 10. pomocná věta v „Metodě. Zeuthen<sup>21)</sup> míní, že Archimedes polohu těžiště obou těchto těles objevil nezávisle na novém způsobu a že uveřejnil jejich přesný exhausční důkaz. Tato poslední část Zeuthenova tvrzení se opírala o Archimedova slova po oné pomocné větě, jak je Heiberg v německém překladě<sup>22)</sup> interpoloval. V Archimedových sebraných spisech, vydaných Heibergem o 6 let později, slova ta již nejsou a lakuny na těchto místech jsou již tak nepatrné, že vylučují omyl.<sup>23)</sup> Leč tuto poslední část Zeuthenova tvrzení lze i jinak podepřítí, jak plyne z celé této úvahy. S první však částí tohoto tvrzení nemohu souhlasiti. Svou objevnou cestu vymyslel přece Archimedes ještě za života Kononova, spis „O konoidích a sféroidích“ uveřejnil dlouho po smrti Kononově. „Metodu“ pak, jak se domnívám, až po publikaci „Konoidů“. Nezdá se mi totiž pravděpodobným, že by Archimedes, který uveřejnil znění poučky jako výzvu k soutěži jiným matematikům jen tehdy, kdy znal přesný exhausční důkaz, který nepovažoval však svou metodu za důkaz, nýbrž toliko za objevnou pomůcku, že by tento Archimedes poučky o tak velkém dosahu, jako obsahy rotačních těles druhého stupně a jejich úsečí uveřejnil v „Metodě“ bez dostatečného důkazu, aniž by k tomu přičinil nejmenší poznámky. Vždyť nečiní valného rozdílu mezi větami o kouli a o rotačním paraboloidu a poučkami o ostatních tělesech, ač za života Kononova prvé dovedl dokázati, druhé nikoli. Za to však zcela jinak zachází s posledními dvěma poučkami, týkajícími se obsahů úsečí

<sup>21)</sup> Heiberg-Zeuthen: *Eure neue Schrift des Archimedes*. Bibli. math. (3) III., 346.

<sup>22)</sup> *Ibidem*, 324. <sup>23)</sup> Arch. II., 434.



rotačních válců vepsaných do krychle. Tu nejen ukazuje jak je objevil, nýbrž podává i jejich přesné exhausční důkazy. Zdá se mi proto přirozeno předpokládati, že důkazy ostatních pouček byly již uveřejněny, kdežto tyto důkazy ještě nikoli. Pripustíme-li toto stanovisko, není závady, proč by Archimedes nemohl objeviti polohu těžiště kužele svým mechanickým způsobem. Při vyšetřování obsahu koule přiveden do vztahu s touto kužel, jehož výška a poloměr základny se rovnaly průměru koule. Byla tudíž na snadě myšlénka této kombinace využití pro těžiště kužele. Pro rotační kužel obecný bylo nutno kouli nahraditi rotačním elipsoidem. Kdož ví, zda tato kombinace nepřivedla Archimeda ke studiu elipsoidu?<sup>24)</sup>

Ztratilo-li se skutečně nějaké Archimedovo dílo o těžištích tuhých těles, pak tam mohly býti přesné důkazy o poloze těžiště v polokouli, v úsečích rotačního paraboloidu, rotačního elipsoidu a rotačního dvojplachého hyperboloidu, jichž osy stojí na základně úseče kolmo. Objev těchto vět popisuje Archimedes v „Metodě“.<sup>25)</sup> Ba, Archimedes šel dále, on objevil a ve spise „O rovnováhách“, jak praví ve II. knize „O plovoucích tělesech“,<sup>26)</sup> dokázal i vzorec pro polohu těžiště úseče rotačního paraboloidu, uťaté rovinou k ose paraboloidu šikmou.

Zda všechny tyto poučky objevil v době, kdy své věty zaslal Kononovi, nelze říci. Jest však pravděpodobno, že v této době, kdy jeho objevitelský duch čile pracoval, kdy svého mechanického objevného způsobu s takovým úspěchem užíval, nebyl od nich dalek. Že jich také neposlal Kononovi, to nemusí býti důkazem, že by jich tenkrát nebyl znal. Snad neznal ještě jejich přesných důkazův. A pak, snad si právě odkládal jejich publikaci pro své systematické práce z oboru mechanické statiky. Ovšem jest pozoruhodno, že věty Kononovi zasláné nevyžadovaly ani při objevu polohy těžiště kužele, což by mohlo svědčiti o tom, že otázku tu snad ještě neovládal.

Povrch koule a tedy i vrchlíku, jak v „Metodě“ přímo praví,<sup>27)</sup> stanovil na základě obsahu, tedy zase jako důsledek objevu provedeného svým mechanickým způsobem. (Dokončení.)

<sup>24)</sup> bližší rozbor tohoto postupu viz »Několik poznámek a t. d.« II.

<sup>25)</sup> Arch. II., 458., 464., 474., 483. a 484.

<sup>26)</sup> Arch. II., 3. 0.    <sup>27)</sup> Arch. II., 417.