Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

O čtyrúhelníku dvojstředovém. [I.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 17 (1888), No. 1, 10--19

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109162`

*Nemohou tudíž roviny* $\pi_1\mu_1\nu_1$, $\pi_2\mu_2\nu_2$, $\pi_3\mu_3\nu_3$ ... *na pevných obzorech* $o_1$, $o_2$, $o_3$ ... *nehybných míst* $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ ... *státi kolmo, aniž rovnoběžnými býti se svislou rovinou* $p\mu_0 S$, což nejlépe znázorňuje rovina $\pi_n\mu_n\nu_n \equiv p\mu_0\nu_n \equiv pMN_{12}$, jež s pevným obzorem $o_n \equiv o_0$ nehybného místa $\mu_n \equiv \mu_0$ v jedinou rovinu splývá, a na svislé rovině $p\mu_0 S$ kolmo stojí.

Je-li $s_1\mu_1 \parallel S\mu_0$ a značí-li $\mu_1\sigma_1$ průsečnici roviny $s_1\mu_1\pi_1$ s pevným obzorem $o_1$ nehybného místa $\mu_1$, pak bude také $s_1\mu_1\pi_1 \parallel S\mu_0 p$, $\mu_1\sigma_1 \parallel S\mu_0 p$, nikoliv ale $\mu_1\sigma_1 \parallel \mu_0 p$, poněvadž jest $\mu_1\pi_1 \parallel \mu_0 p$. **Jsou tedy přímky $\mu_0 p$, $\mu_1\sigma_1$ mimoběžkami.**

(Pokračování.)

---

# O čtyrúhelníku dvojstředovém.

Pro žáky středních škol napsal

**A. Strnad,**

professor v Hradci Králové.

1. Že čtyrúhelníků rovinných vyznačují se zvláštními vlastnostmi čtyrúhelník kružnici vepsaný a čtyrúhelník kružnici opsaný (tětivový a tečnový čtyrúhelník); z počátků geometrie známy jsou tyto dvě věty charakterisující jmenované dva druhy čtyrúhelníků:

V čtyrúhelníku tětivovém jsou dva a dva protější úhly výplňkové.

V čtyrúhelníku tečnovém rovná se součet dvou protějších stran součtu druhých dvou stran.

Taktéž jest známo, že tyto věty obsahují v sobě podmínky právě dostatečné, dle kterých čtyrúhelník kružnici vepsaný neb opsaný poznáváme; jest však při tom zapotřebí přestati na čtyrúhelnících s úhly vesměs dutými, kteréž omezení v řádcích následujících vždy budeme předpokládati.

Zcela zvláštní druh čtyrúhelníků, zasluhující podrobnějšího vyšetření, vznikne spojením obou druhů jmenovaných; jest to čtyrúhelník, jemuž lze kružnici opsati i vepsati.

Strany jeho jsou tětivami jedné kružnice a tečnami druhé. Že čtyrúhelník takový vůbec může existovati, jest patrno; jestiť čtverec nejjednodušším toho příkladem. Také lichoběžník rovnoramenný o kružnici opsaný jest zároveň čtyrúhelníkem vepsaným.

Rovněž jest čtyrúhelníkem toho druhu souměrný deltoid, skládající se ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků o společné přeponě.

Jmenujme čtyrúhelník, jemuž může býti jedna kružnice opsána a druhá vepsána, *čtyrúhelníkem dvojstředovým* (bicentrickým).

Ve spisech slavného geometra *Steinera* *), sebraných a vydaných akademií berlínskou, na několika místech setkáváme se s čtyrúhelníkem dvojstředovým; tak nalézáme v I. svazku na str. 127. tuto úlohu: „Lze-li danému $n$-úhelníku kružnici vepsati i opsati, má se nalézti rovnice mezi poloměry $R$, $r$ těchto kružnic a vzdáleností $a$ jich středů.“

Poukázav k tomu, že pro trojúhelník odvodil již *Euler* rovnici $a^2 = R^2 - 2rR$, podává *Steiner* dále (str. 159) řešení pro $n = 4, 5, 6, 8$.

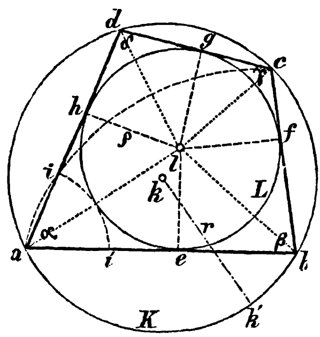
O čtyrúhelníku dvojstředovém nalézáme také kratší neb obšírnější zmínky v některých sbírkách úloh geometrických a v různých časopisech. Tak zejmena sbírka „Trigonometrische Aufgaben“, kterou vydali r. 1874 *Lieber* a *Lühmann*, obsahuje 203 úlohy „über das Sehnentangentenviereck“. V časopise Hoffmannově „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ podali *Schlömilch* (1877, 1878) a *Consentius* (1879, 1880) některé úlohy o čtyrúhelníku dvojstředovém; obšírnější pak, ač nedosti kritický článek o něm uveřejnil *Schumacher* v Grunert-Hoppeově časopise „Archiv für Mathematik und Physik“ (1885, p. 383—406).

V pojednání tomto, které jsme k užitku mladších čtenářů našeho „Časopisu“ napsali, snažili jsme se hlavní výsledky jmenovaných prací o čtyrúhelníku dvojstředovém v jednotný celek sestaviti, a je spůsobem pokud lze jednoduchým vyvoditi. Podařilo se nám dodělati se též některých vlastností zajímavých, které nám odjinud známy nebyly.

2. Předpokládejme *čtyrúhelník dvojstředový abcd* (obr. 1.), kterýž jest vepsán kružnici K středu $k$ a poloměru $r$, opsán pak kružnici L středu $l$ a poloměru $\varrho$; úhly $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ čtyrúhelníka toho buďtež vesměs duty.

---

*) *Jacob Steiner's* Gesammelte Werke, I. und II. Band.




Obr. 1.

Potom jest

(1) $$ab + cd = ad + bc,$$

(2) $$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 2R.$$

Dotýkají-li se strany čtyrúhelníka *abcd* kružnice L v bodech *e*, *f*, *g*, *h*, jest patrně

(3) $\sphericalangle flg = \alpha$, $\sphericalangle glh = \beta$, $\sphericalangle hle = \gamma$, $\sphericalangle elf = \delta$,

a poněvadž jest

$$ae = ah, \quad be = bf, \quad cf = cg, \quad dg = dh,$$

poznáváme, že jsou podobnými čtyrúhelníky

$$aelh \sim lfcg, \quad belf \sim lgdh.$$

Každý z těchto čtyř čtyrúhelníků, skládaje se ze dvou shodných trojúhelníků pravoúhlých, jest souměrný čtyrúhelník dvojstředový; lze tedy úhrnem říci:

*Kolmice spuštěné k stranám čtyrúhelníka dvojstředového se středu kružnice vepsané dělí jej ve 4 čtyrúhelníky dvojstředové souměrné, z nichž dva a dva protější jsou si podobny.*

Z podobnosti vyložené vyplývají též vztahy

(4) $$ae \cdot cg = ah \cdot cf = be \cdot dg = bf \cdot dh = \varrho^2 \text{*)}$$

a z těchto úměry

(5) $$ae : be = dg : cg = ad : bc, \quad ah : dh = bf : cf = ab : cd,$$

které lze prosloviti větami:

*Protější strany čtyrúhelníka dvojstředového děleny jsou body dotyčnými kružnice vepsané dle téhož poměru. Bod dotyčný dělí každou stranu v poměru obou stran přilehlých.*

---

*) *Steiner*, Ges. Werke, II. Bd., p. 674.

Středy $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ kružnic opsaných o čtyrúhelníky *aelh*, *bfle*, *cglf*, *dhlg* půlí délky *la*, *lb*, *lc*, *ld* a jsou tudíž vrcholy čtyrúhelníka, kterýž jest danému čtyrúhelníku dvojstředovému podoben a podobně položen. Jmenujme středy kružnic vepsaných těmto čtyrúhelníkům po řadě $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$; potom jest z důvodů velmi blízkých

$$ll_1 : le = cl_3 : cf = ll_3 : lf,$$

a jelikož $le = lf$, jest též $ll_1 = ll_3$, a dle obdoby také $ll_2 = ll_4$. Totéž stvrzuje tento jednoduchý výpočet:

$$ll_1 = \varrho \frac{\sin 45^0}{\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\varrho}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}, \tag{6}$$

$$ll_2 = \frac{\varrho}{\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}}, \quad ll_3 = \frac{\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$ll_4 = \frac{\varrho}{\sin\frac{\delta}{2} + \cos\frac{\delta}{2}};$$

vzhledem ku rovnicím (2) jest

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}, \quad \sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\delta}{2},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\frac{\delta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2},$$

a tedy

$$ll_1 = ll_3, \quad ll_2 = ll_4.$$

3. Čtyrúhelník vůbec určen jest pěti podmínkami; při čtyrúhelníku dvojstředovém jsou dvě podmínky (1), (2) napřed dány, z nichž jedna týče se stran, druhá úhlů jeho.

*Čtyrúhelník dvojstředový určen jest třemi podmínkami.* Lze tedy ku př. sestrojiti čtyrúhelník dvojstředový, dán-li poloměr vepsané kružnice a dva sousední úhly, dána-li strana a dva sousední úhly a pod. Úlohy tyto čtenář zajisté bez obtíží řešiti dovede; my pak tuto naznačíme řešení úlohy:

*Sestrojiti čtyrúhelník dvojstředový, dány-li tři vrcholy jeho.*

Buďtež dány vrcholy *a*, *b*, *c* a hledán vrchol *d*; *ab*, *bc* mají býti stranami, *ac* úhlopříčnou žádaného čtyrúhelníka. Opíšeme-li trojúhelníku *abc* kružnici K, bude tato obsahovati též vrchol čtvrtý *d*; k jeho ustanovení by tedy dostačila známosť ještě jednoho místa měřického $d$ obsahujícího. Uvážíme-li, že dle rovnice (1) jest $ab - bc = ad - cd$, poznáváme, že $d$ jest bodem hyperboly určené ohnisky $a$, $c$ a bodem $b$.

Tuto hyperbolu mohli bychom sestrojiti, a průsečík větve bod $b$ obsahující s kružnicí K byl by žádaný vrchol $d$. Hleďme však sestrojení hyperboly nějakým spůsobem obejíti. Předpokládáme-li (obr. 1.) $ab > bc$, bude též $ad > cd$, a vytkneme-li v straně $ad$ bod $i$ tak, že jest $di = dc$, bude $ai = ab - bc$ a mimo to $\sphericalangle aic = 2R - \frac{\beta}{2}$.

Z rozboru tohoto plyne následující sestrojení. Učiňme $bí = bc$ a opišme z bodu $a$ poloměrem $aí$ uvnitř kružnice K oblouk kruhový. Středem $k$ spusťme kolmici k úhlopříčně $ac$, a stanovme průsečík $k'$ této kolmice s obloukem $abc$; oblouk z bodu $k'$ poloměrem $ak'$ opsaný protíná oblouk dříve sestrojený v bodě $i$. Znajíce pak bod tento, najdeme na kružnici K a prodloužené přímce $ai$ vrchol $d$.

Sestrojení toto, které podal *Schlömilch*, jest sice jednoduché ale poněkud nepřímé a často nedosti přesné. Tato nedokonalosť objevuje se vždy, když rozdíl $ab - bc$ jest malý; pak jsou body $a$, $i$ tak blízky, že spojnici jich nelze dosti přesně rýsovati. Této vady prost jest spůsob, který nyní vyložíme.

4. Vepsán-li do kružnice K libovolný čtyrúhelník $abcd$ (obr. 2.), stanoví přímky půlící protější úhly $a$, $c$ bod $l$; hledejme geometrické místo bodu tohoto, předpokládajíce vrcholy $a$, $b$, $c$ stálé, $d$ pak proměnný.

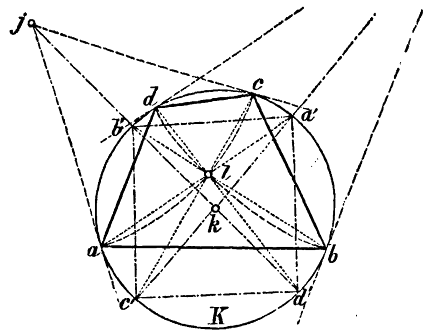
Značíme-li úhly čtyrúhelníka písmenami $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, kladouce $\sphericalangle alc = \omega$, obdržíme

$$\omega = 4R - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \delta\right) = 4R - (R + 2R - \beta) = R + \beta.$$

Odtud poznáváme, že za daných podmínek jest úhel $\omega$ stálým, a tudíž měřickým místem bodu $l$ kružnice jdoucí body $a$, $c$. Středem jejím jest průsečík $j$ tečen v bodech $a$, $c$ ke kružnici K sestrojených; jestiť

$$\sphericalangle ajc = 2R - akc = 2R - 2\beta = 2(2R - \omega).$$

Jde-li tedy o čtyrúhelník dvojstředový, známe dvě měřická místa, jimž střed $l$ náležeti musí; jedním jest kružnice J právě vyšetřená a druhým přímka půlící úhel $abc$. Sestro-




Obr. 2.

jení lze pak následovně upraviti: Vyhledejme nejprvé bod *j* a vyrýsujme mezi *a*, *c* oblouk kružnice J; ustanovme pak body *b'*, *d'*, ve kterých spojnice *jk* kružnici K protíná, a kteréž půlí oblouky *adc*, *abc*. Přímka *bb'* půlí úhel *abc*, a průsečík její s J jest hledaný střed *l*. Tento znajíce, snadně též žádaný vrchol *d* vyhledáme; jelikož totiž přímka úhel *adc* půlící bodem *l* procházeti a oblouk *abc* půliti musí, určuje spojnice *d'l* v kružnici K vrchol hledaný *d*.

Budiž připomenuto, že úloha: „sestrojiti čtyrúhelník dvojstředový, dány-li tři vrcholy jeho" má vlastně tři řešení dle toho, která ze tří spojnic bodů daných má býti úhlopříčnou. Obdrželi bychom tedy tři čtyrúhelníky dvojstředové vepsané téže kružnici K, a nebylo by nezajímavo vyšetřiti vzájemnosť těchto tří čtyrúhelníků.*) Tím bychom se však od vlastní své úlohy příliš odchýlili a protož povšimněme sobě raději některých vztahů, které při sestrojení právě vyloženém se vyskytují.

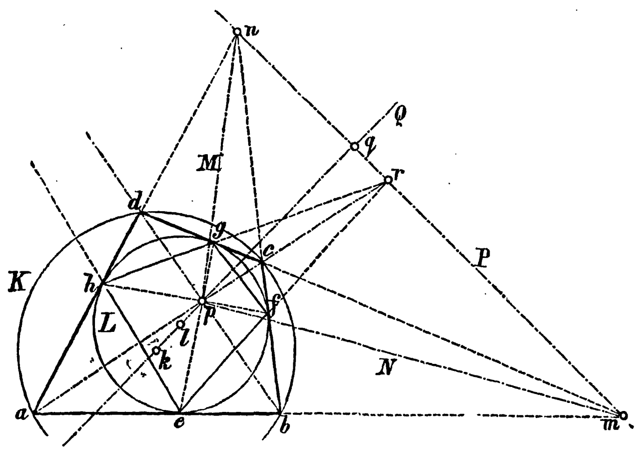
Shledali jsme, že střed *l* kružnice vepsané čtyrúhelníku dvojstředovému leží na kružnici J, která prochází dvěma protějšími vrcholy *a*, *c* a majíc střed v průsečíku tečen stanovených ke kružnici K v bodech *a*, *c* tuto kružnici kolmo protíná. Dle obdoby vyznačuje se touž vlastností kružnice J' určená body *b*, *d*, *l*; protož: *Kružnice jdoucí dvěma a dvěma protějšími vrcholy čtyrúhelníka dvojstředového kolmo ke kružnici opsané protínají se v středu kružnice vepsané.*

---

*) Viz *Hoffmann*, Zeitschrift, IX. Jahrg. p. 126.

Při sestrojení poznali jsme dále, že přímky $bl$, $dl$ stanoví body $b'$, $d'$, které jsou krajními body průměru v kružnici K. Tolikéž lze říci o bodech $a'$, $c'$ obsažených na přímkách $al$, $cl$; proto jest čtyrúhelník $a'b'c'd'$ rovnoběžníkem pravoúhlým a středem jeho bod $k$. O rovnoběžníku tom ještě později promluvíme, zatím pouze vyslovme větu z předešlého plynoucí: *Přímky spojující vrcholy čtyrúhelníka dvojstředového se středem kružnice vepsané protínají kružnici opsanou v bodech, které jsou vrcholy pravoúhlého rovnoběžníka.*

5. Body $e$, $f$, $g$, $h$, ve kterých kružnice vepsaná L dotýká se stran čtyrúhelníka dvojstředového (obr. 3.), jsou vrcholy nového čtyrúhelníka, o kterém v úvahách těchto často mluviti budeme. Jmenujme jej krátce *čtyrúhelníkem dotyčným* a vyšetřme některé jeho vlastnosti.




Obr. 3.

Úhlopříčny $ac$, $bd$ čtyrúhelníka dvojstředového protínají se v bodě $p$; tento spojme s body $e$, $g$, dvěma to protějšími vrcholy čtyrúhelníka dotyčného.

Dle dřívějšího jest

$$ae : be = dg : cg,$$

tedy také

$$ae : ab = dg : cd.$$

Ježto však za příčinou podobnosti trojúhelníků $\triangle abp \sim cdp$ jest

$$ab : ap = cd : dp,$$

plyne znásobením posledních dvou úměr

$$ae : ap = dg : dp.$$

Hledíce k této úměře a k rovnosti úhlů $\sphericalangle eap = gap$, poznáváme, že jest $\triangle aep \sim dgp$; proto jest také

$$\sphericalangle aep = dgp, \quad \sphericalangle ape = dpg. \tag{7}$$

Uvažme však, že přímka $eg$ spojující dotyčné body dvou tečen kružnice L svírá s tečnami těmito stejné úhly $\sphericalangle aeg = dge$, a odečtěme od rovnice této rovnici předcházející: tím najdeme:

$$\sphericalangle egp = gep.$$

Následkem rovnosti těchto úhlů měl by trojúhelník $egp$ býti rovnoramenným o ramenech $ep$, $gp$; délky tyto však nejsou obecně stejnými, neboť jest

$$ep : gp = ae : dg$$

a tedy také dle (5) $\quad ep : gp = ab : cd.$

Neshodě této nelze jinak uniknouti nežli tím, že klademe oba úhly $egp$ i $gep$ rovnými nulle, t. j. body $e$, $g$, $p$ leží v jedné přímce; z obdobných důvodů též body $f$, $h$, $p$ jsou body jedné přímky. Jsme tudíž oprávněni vysloviti větu:

*Úhlopříčny čtyrúhelníka dvojstředového i příslušného k němu čtyrúhelníka dotyčného protínají se v témž bodě jediném.*

Připomínáme, že věta tuto dokázaná neznačí vlastnosť náležející výhradně čtyrúhelníku dvojstředovému; jest totiž v geometrii polohy známa věta obecnější: Úhlopříčny čtyrúhelníka kuželosečce opsaného a spojnice protějších bodů dotyčných protínají se v jediném bodě.

Dle rovnice (7) jest $\sphericalangle ape = dpg$, jest však též $\sphericalangle dpg = bpe$ a proto $\sphericalangle ape = bpe$, t. j. přímka $eg$ půlí úhel $apb$ i vrcholový k němu úhel $cpd$; rovněž tak přímka $fh$ půlí úhly $apd$, $bpc$. Odtud poznáváme:

*Úhlopříčny čtyrúhelníka dotyčného půlí úhly úhlopříčen v čtyrúhelníku dvojstředovém a stojí tudíž na sobě kolmo.*

Kolmosť tuto úhlopříčen $eg \perp fh$ lze též přímo odůvodniti. Dle známé vlastnosti úhlů obvodových a dle rovnice (3) jest

$$\begin{aligned} &\sphericalangle feg = fhg = \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle geh = gfh = \frac{\beta}{2}, \\ &\sphericalangle efh = egh = \frac{\gamma}{2}, \quad \sphericalangle egf = ehf = \frac{\delta}{2}, \end{aligned} \tag{8}$$

pročež

$$\sphericalangle epf = feg + efh = R.$$

Z předešlého též patrno, že úhlopříčny obou čtyrúhelníků, dvojstředového i dotyčného, tvoří harmonickou čtveřinu paprskovou.

6. Větu posléze dokázanou lze též obrátiti a říci: *Sestrojíme-li v krajních bodech dvou kolmých tětiv tečny ke kružnici, omezují tyto čtyrúhelník dvojstředový, jehož úhlopříčny protínají se v průsečíku tětiv.*

Učiníme-li totiž (obr. 3.) v kruhu L kolmice $eg \perp fh$ a sestrojíme-li v bodech $e$, $f$, $g$, $h$ tečny omezující čtyrúhelník $abcd$, zbývá o tomto dokázati toliko, že dva jeho protější úhly jsou výplňkovými. Jest však

$$\sphericalangle feg = \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle efh = \frac{\gamma}{2}$$

a poněvadž dle sestrojení jest v trojúhelníku $efm$ při $m$ úhel pravý, jest součet ostatních dvou úhlů

$$\sphericalangle feg + efh = R;$$

z toho plyne $\alpha + \gamma = 2R$, což bylo dokázati. Větou právě vyvozenou nabyli jsme velmi jednoduchého prostředku k sestrojení čtyrúhelníka dvojstředového.

Přihledněme ještě k čtyrúhelníku dotyčnému $efgh$; tento vepsán jest kružnici L; i mohla by se namítnouti otázka, nelze-li mu též kružnici vepsati a není-li tedy čtyrúhelníkem dvojstředovým. Chtějíce o tom rozhodnouti, ustanovme délky stran jeho; patrně jest

$$(9) \qquad \begin{aligned} fg &= 2\varrho \sin\frac{\alpha}{2}, \quad eh = 2\varrho\cos\frac{\alpha}{2}, \\ gh &= 2\varrho \sin\frac{\beta}{2}, \quad ef = 2\varrho\cos\frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Měl-li by čtyrúhelník $efgh$ býti kružnici opsán, muselo by býti $fg + eh = gh + ef$ čili

$$(10) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2};$$

rovnice tato zdvojmocněním přejde ve $\sin\alpha = \sin\beta$, z čehož buď $\alpha = \beta$ aneb $\alpha + \beta = 2R$ vyplývá.

Podmínky tyto mohou býti splněny jen tehdy, když jest původní čtyrúhelník $abcd$ lichoběžníkem a to rovnoramenným.

Lichoběžník různoramenný nelze kružnici vepsati. Neprávem tudíž přisuzuje *Schumacher* v článku již citovaném (str. 394.) tutéž vlastnost dvojstředovému deltoidu. Přicházíme takto k výsledku:

*Čtyrúhelník dotyčný příslušný dvojstředovému lichoběžníku jest též čtyrúhelníkem dvojstředovým.*

*Lze-li rovnoramennému lichoběžníku vepsati kružnici, lze to též učiniti čtyrúhelníku stanovenému body dotyčnými.*

Čtyrúhelník kružnici vepsaný, ve kterém součiny protějších stran jsou si rovny, slove čtyrúhelníkem harmonickým.*) Takovým jest za podmínkou (10) čtyrúhelník $efgh$; neboť jest dle rovnic (9)

$$ef \, . \, gh = 2\varrho^2 \sin\beta, \quad eh \, . \, fg = 2\varrho^2 \sin\alpha$$

a při

$$\alpha = \beta \text{ nebo } \alpha + \beta = 2\mathrm{R}$$

jest

$$ef \, . \, gh = eh \, . \, fg.$$

*Dotyčný čtyrúhelník dvojstředového lichoběžníka jest čtyrúhelníkem harmonickým.*

Dokážeme ještě jinou zajímavou vlastnosť dvojstředového lichoběžníka. V odstavci 2. jsme poznali, že kolmice spuštěné k stranám čtyrúhelníka dvojstředového $abcd$ se středu $l$ kružnice vepsané dělí jej ve čtyři dvojstředové čtyrúhelníky; vepíšeme-li do těchto čtyrúhelníků kružnice středů $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_3$, jest vždy $ll_1 = ll_3$, $ll_2 = ll_4$. Aby bylo $ll_1 = ll_2 = ll_3 = ll_4$, k tomu jest dle rovnic (6) nutnou ale také dostatečnou podmínka (10), vyjadřující, že $abcd$ jest lichoběžník. Z toho následuje:

*Kolmice spuštěné k stranám dvojstředového lichoběžníka se středu kružnice vepsané* L *dělí jej ve čtyři dvojstředové čtyrúhelníky tak, že středy kružnic vepsaných těmto čtyrúhelníkům leží na kružnici soustředné s* L.

(Dokončení.)

---

*) *Mathesis* tome V., p. 202.

---