Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 1, 33--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109154

ac kružnici; tato protíná stranu ab (neb její prodloužení) v bodě e, prodlouženou stranu bc v bodech f, g. Jest pak

$$gb \,.\, bf = ab \,.\, be$$

čili
$$(cg + bc)(cf - bc) = ab\,(ae - ab)$$
aneb
$$(ac + bc)(ac - bc) = ab\,(2ad - ab).$$

Odtud obdržíme

$$bc^2 = ac^2 + ab^2 - 2ab \,.\, ad.$$

(Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики, II. семестръ, стр. 262.)

Křivost křivek při isogonalné transformaci. Vyšetřuje, kterak se mění křivost rovinné křivky při isogonálné transformaci, objevil *Laisant* tuto větu: Prochází-li bodem řada křivek a leží-li ich středy křivosti tomuto bodu příslušné na kuželosečce, jsou též středy křivosti křivek odvozených transformací isogonálnou položeny na kuželosečce.

Zvláštními případy obsaženými v tomto theoremu jsou dvě věty, které dříve již odvodil *Transon* (Nouv. annales, 1869):

Křivky odvozené isogonálnou transformací ze svazku přímek mají příslušné středy křivosti na určité přímce.

Jde-li bodem řada křivek majících v bodě tom stejnou křivost, leží příslušné středy křivosti křivek odvozených na kuželosečce, která má v bodě odvozeném ohnisko.

(Bulletin de la société mathématique de France. Tome XV. 1887. pag. 39).

Úlohy.

Řešení úlohy 17. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Vladimír Novák*, stud. VIII. tř. v Truhlářské ulici v Praze.)

Výslednice obou sil jest v prvém případě $2P \cos \frac{\alpha}{2}$, v druhém pak $(P + p) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) + (P - p) \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$.

Aby se břímě s nezměněnou rychlostí pohybovalo, musejí obě výslednice býti sobě rovny, tedy

$$(P+p)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+(P-p)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=2P\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Řešením této rovnice obdržíme

$$p=P\cot\frac{\alpha}{2}\,.\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Ant. Radešínský* a *Frant. Navrátil* z VIII. tř. v Litomyšli, *Lud. Novotný* a *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Miroslav Antoš*, stud. g. v Žitné ulici v Praze, *Frant. Klas* a *Jindřich Šafařovič* z VIII. tř. v Písku, *Karel Herzán* ze VI. tř. r., *Jos. Kábrle, Karel Novák* a *Josef Dvořák* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Kar. Klír* ze VI. tř. r. v Karlíně, *Frant. Zelinka* ze VI. tř. a *Fr. Janoušek* ze VII. tř. r. v Brně, *Frant. Tomášů* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Frant. Doležal* a *Svatopluk Dienel* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze a *Ferd. Steinbach* ze VI. tř. r. v Táboře.

Řešení úlohy 18. z roč. XVI.

(Podal p. *Ferd. Steinbach*, stud. VI. tř. r. v Táboře.)

Znamená-li q jednu tuto sílu a x její rameno, bude $S-q$ druhá síla a $d-x$ příslušné rameno. Podmínka rovnováhy v prvém případě jest

$$qx=(S-q)(d-x)$$

a v druhém

$$(q+p)(x-a)=(S-q-p)(d-x+a).$$

Odečteme-li první rovnici od druhé, nabudeme

$$p=\frac{a}{d}S.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Karel Petr* a *Lud. Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Frant. Doležal* a *Svatopluk Dienel* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Vladimír Novák* z VIII. tř. v Truhlářské ulici v Praze, *Karel Herzán* a *J. Petříček* ze VI. tř. r., *Josef Dvořák, Jos. Kábrle* a *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Jind. Šafařovič* a *Frant. Klas* z VIII. tř. v Písku, *Frant. Navrátil* a *Ant. Radešínský* z VIII. tř. v Litomyšli, *K. A. Klír* ze VII. tř. r. v Karlíně a *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně.

Řešení úlohy 19. z roč. XVI.

(Zaslal p. *František Klas*, stud. VIII. tř. v Písku.)

Jeli svah roviny dán úhlem α, bude $P_1 = Q \sin \alpha$, $P_2 = Q \operatorname{tg} \alpha$, a tedy $\cos \alpha = \frac{P_1}{P_2}$, tudíž $\sin \alpha = \frac{\sqrt{P_2^2 - P_1^2}}{P_2}$, pročež váha sudu

$$Q = \frac{P_1}{\sin \alpha} = \frac{P_1 P_2}{\sqrt{P_2^2 - P_1^2}}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Jan Andres, Frant. Doležal, Svatopluk Dienel* z VIII. tř. a *Karel Zikmund* ze VII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Karel Bailony* z VIII. tř., *Karel Petr* a *Ludvík Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Klír* ze VI. tř. r. v Karlíně, *Karel Herzán* a *J. Petříček* ze VI. tř. r., *Josef Kábrle*, *Karel Novák* a *Josef Dvořák* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Ant. Radešinský* a *Frant. Navrátil* z VIII. tř. v Litomyšli, *Josef Šafařovič* a *Frant. Klas* z VIII. tř. v Písku, *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně a *Ferd. Steinbach* ze VI. tř. r. v Táboře.

Řešení úlohy 20. z roč. XVI.

(Podává p. *Karel Herzán*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Trvá-li vrh k prknu po dobu t, musí býti $c = C - gt$, znamená-li g zrychlení tíží. Výška prkna jest dle volného pádu $\frac{v^2}{2g}$, a dle vrhu vzhůru $\frac{1}{2}(C + c)t$, tedy

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2}(C + c)t.$$

Vyloučíme-li z obou těchto rovnic t, obdržíme

$$C = \sqrt{c^2 + v^2}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Radešinský* a *Frant. Navrátil* z VIII. tř. v Litomyšli, *Karel Klír* ze VI. tř. r. v Karlíně, *Karel Petr* a *Lud. Novotný* ze VII. tř. g. a *Karel Bailony* z VIII. tř. v Chrudimi, *Josef Dvořák*, *Josef Kábrle* a *Karel Novák* z VIII. tř. g. a *Jan Petříček* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Frant. Doležal*, *Svatopluk Dienel* a *Jan Andres* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze a *J. Lauschmann* ze VII. tř. g. v Příbrami.

Řešení úlohy 21. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Jos. Kábrle,* stud. VIII. tř. v Hradci Králové.)

V prvním případě jest pohybující silou váha p_1, kteráž při pohybu stejnoměrně urychleném za rovné doby vždy jenom rovné práce vykonati může, nechť pohybuje při volném svém pádu pouze břímě p_1 po dráze S, neb po dráze s_1 toto břímě i odpor Q na přístroji, způsobený vahou obou misek i šňůry a otáčícím se kolečkem.

Jsou tedy vykonané práce $p_1 S = (Q + p_1)s$, a taktéž v druhem případě $p_2 S = (Q + p_2)s_2$.

Vyloučíme-li neznámou Q z obou rovnic, najdeme

$$S = \frac{(p_1 - p_2)s_1 s_2}{p_1 s_2 - p_2 s_1}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Karel Novák* a *Jos. Dvořák* z VIII. tř. g. a *Karel Herzán* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Jan Andres*, *Svatopluk Dienel* a *Frant. Doležal* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Antonín Radešinský* a *Frant. Navrátil* z VIII. tř. v Litomyšli.

Řešení úlohy 22. z roč. XVI.

(Podává *Josef Vančura,* stud. VII. tř. g. v Budějovicích.)

Nabude-li vlak za hledanou dobu t mezné rychlosti $v = z_1 t$, a způsobují-li odpory pohybu zpoždění z_2, ujede vlak, hnán jsa parou, dráhu $x = \frac{z_1 t^2}{2}$ a pak bez páry $y = \frac{v^2}{2z_2} = \frac{z_1^2 t^2}{2z_2}$. *) Že pak rychlosť $\sqrt{2s_1 z}$ na konci dráhy s_1 jest rovna rychlosti $\sqrt{2s_2 z_2}$ na počátku dráhy s_2, obdržíme pomocí $\frac{z_1}{z_2} = \frac{s_2}{s_1}$ pro druhý díl dráhy $y = \frac{s_2 z_1 t^2}{2s_1}$ a tudíž pro celou dráhu

$$S = x + y = \frac{z_1 t^2}{2}\left(1 + \frac{s_2}{s_1}\right),$$

*) Při tom pro jednoduchost předpokládáme, že záporné urychlení odpory pohybu způsobené jest stejnoměrné, což ovšem není zcela správné, jelikož jest na př. tření úkonem rychlosti.

tak že jest

$$t = \sqrt{\frac{2Ss_1}{(s_1 + s_2)z_1}}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně, *Karel Herzán* ze VI. tř. r., *Karel Novák* a *Josef Kábrle* z VIII. tř. g. v Hradci Králové a *Ant. Radešinský* z VIII. tř. v Litomyšli.

Řešení úlohy 23. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Frant. Doležal,* stud. VIII. tř. vyš. r. g. na Malé Straně v Praze.)

Do první nádoby nateklo tolik, kolik z ní vyteklo. Byla-li na počátku doby t výtoku voda vysoko V a na konci vysoko v nad otvorem velkým q, znamená-li dále k koefficient výtoku a g zrychlení tíží, pak vyteklo z první nádoby $K_1 = kqt\sqrt{2gV}$ a z druhé $K_2 = \frac{1}{2} kqt(\sqrt{V} + \sqrt{v})\sqrt{2g}$, tedy

$$D = K_1 - K_2 = \tfrac{1}{2} kqt(\sqrt{V} - \sqrt{v})\sqrt{2g}.$$

Vyloučením veličiny K_2 z rovnice $\frac{K_2}{V - v} = \frac{K}{V}$, obdržíme

$$\sqrt{V} - \sqrt{v} = \frac{Vkgt\sqrt{2g}}{2K}, \text{ tedy } D = \frac{(kgt\sqrt{2gV})^2}{4K} = \frac{K_1^2}{4K} \text{ a}$$

$$K_1 = 2\sqrt{KD}.^{*)}$$

Správné řešení zaslali pp.: *K. A. Klír* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Kábrle* a *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 24. z roč. XVI.

a) Jak povědomo, jest dvojčlen $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ dělitelen součtem $a + b$; klademe-li $a = 2$, $b = 1$, bude i $2^{2n+1} + 1$ dělitelno číslem $2 + 1 = 3$.

b) Poněvadž jest

$$2^{2n+1} + 1 = 2(2^{2n} - 1) + 3,$$

a číslo

$$2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$$

patrně jest 3mi dělitelno (neboť 2^{n-1} a 2^{n+1} jsou dvě lichá čísla

---

*) Veličiny K_1 a D jsou souřadnice bodu paraboly.

po sobě jdoucí a mezi nima číslo sudé 2^n třemi nedělitelno), proto jest i dané číslo 3mi dělitelno.

c) Výraz 2^{2n+1} můžeme psáti též

$$2 \,.\, 4^n + 1 = 2\,(3+1)^n + 1;$$

umocníme-li dle věty binomické, dostaneme

$$2[3^n + (n)_1\, 3^{n-1} + (n)_2\, 3^{n-2} + \ldots + (n)_1\, 3] + 3.$$

Výraz ten jest zřejmě dělitelen třemi.

d) Píšeme-li opět

$$2^{2n+1} + 1 = 2 \,.\, 4^n + 1$$

a užijeme-li stejniny

$$4^n = 3 \,.\, \frac{4^n - 1}{4 - 1} + 1 = 3 \,.\, 4^{n-1} + 3 \,.\, 4^{n-2} + \ldots + 3 + 1,$$

obdržíme

$$2^{2n+1} + 1 = 6[4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4 + 1] + 3,$$

čímž dělitelnost třemi dokázána.

e) Rozložme daný výraz takto

$$2^{2n+1} + 1 = 2 \,.\, 4^n + 1 = 3 \,.\, 4^n - (4^n - 1).$$

Zbývá dokázati, že $4^n - 1$ jest dělitelno třemi. Poněvadž jest

$$Z\left(\frac{4^n - 1 - (4^{n-1} - 1)}{3}\right) = Z\left(\frac{4^{n-1}(4-1)}{3}\right) = 0,$$

jest

$$Z\left(\frac{4^n - 1}{3}\right) = Z\left(\frac{4^{n-1} - 1}{3}\right) = Z\left(\frac{4^{n-2} - 1}{3}\right) = \ldots = Z\left(\frac{4-1}{3}\right) = 0,$$

čímž žádaný důkaz podán.

Správné řešení této úlohy zaslali pp.: *Ant. Vík* z VIII. tř. a *Jan Krejčí* ze VII. tř. g. v N. Bydžově, *Frant. Tomášů* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *J. Lauschmann* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Emil Meissner* z VIII. tř. v Mladé Boleslavi, *Ambrož Ludvík* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Boh. Novák* ze VI. tř. a *Alois Skalák* ze IV. tř. g. v Táboře, *K. A. Klír* ze VII. tř. a *Karel Klír* ze VI. tř. r. v Karlíně, *Josef Kábrle* a *Karel Novák* z VIII. tř. g., *Karel Herzán* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Karel Petr* a *Lud. Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Ant. Radešínský* z VIII. tř. v Litomyšli, *Frant. Doležal* a *Svatopluk Dienel* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze a *Jos. Vančura* ze VII. tř. g. v Budějovicích.

Řešení úlohy 25. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Frant. Zelinka*, stud. VI. tř. r. v Brně.)

Rozbor. Lichoběžník ABCD budiž rozdělen přímkou $MN \parallel AB \parallel DC$ na lichoběžníky L', L'' v poměru $\mu : \nu$. Doplníme-li lichoběžník na $\triangle ABE$, vzniknou podobné trojúhelníky EDC, EMN, EAB. Jest tedy

$$\triangle EMN : \triangle EDC = \overline{EM}^2 : \overline{ED}^2.$$

Sestrojíme-li nad AE polokruh a učiníme-li $EF = ED$, $EH = EM$; dále $FG \parallel HJ \perp AE$, jest $\overline{EF}^2 = \overline{AE} . \overline{GE}$, $\overline{EH}^2 = \overline{AE} . \overline{JE}$ a tedy

$$\triangle EMN : \triangle EDC = JE : GE. \qquad (\alpha)$$

Úměru tuto lze psáti

$$L' : \triangle EDC = JE : GD, \qquad (\beta)$$

a podobně jest

$$L'' : \triangle EMN = AJ : JE. \qquad (\gamma)$$

Dělením stejnolehlých členů vyjde z úměr (β), (γ) se zřetelem k úměře (α)

$$L' : L'' = JG : AJ. \qquad (\delta)$$

Sestrojení. Doplň lich. ABCD na trojúh. ABE, sestroj nad AE polokruh, učiň $EF = ED$, $FG \perp AE$, délku AG rozděl bodem J tak, aby bylo $JG : AJ = \mu : \nu$, sestroj $JH \perp AE$, $EM = EH$, i jest $MN \parallel AB$ žádaná dělicí přímka.

Důkaz. Dle (δ) jest $L' : L'' = JG : AJ$; dle sestrojení jest $JG : AJ = \mu : \nu$, tedy

$$L' : L'' = \mu : \nu.\text{*)}$$

Jiným způsobem řešili úlohu tuto pp.: *J. Lauschmann* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Karel Petr* a *Lud. Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Novák* a *Josef Kábrle* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Ant. Vík* z VIII. tř. v Novém Bydžově, *Adolf Novotný* ze VI. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze a *K. A. Klír* ze VII. tř. r. v Karlíně.

---

*) Úloha tato jinak řešena v Jandečkově Analytické geometrii, 2. vyd. str. 26.

Řešení úlohy 13. zaslal též p. *Jan Krejčí*, stud. VII. tř. g. v Novém Bydžově.

Úloha 1.

Řešiti rovnici

$$\begin{vmatrix} \sin x, & \cos x, & 1 \\ \operatorname{tg} x, & \cot x, & 1 \\ \sec x, & \operatorname{cosec} x, & 1 \end{vmatrix} = \cot 2x.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 2.

V polokruhu, jehož průměr $\overline{a_0 a_1} = d$, vedena jest tětiva $a_1 a_2$ v úhlu $a_0 a_1 a_2 = \alpha = \frac{R}{n}$ (n jest celé číslo); potom stanoveny tětivy $a_2 a_3 \| a_0 a_1$, $a_3 a_4 \| a_1 a_2$, ..., $a_{n-1} a_n \| a_{n-2} a_{n-3}$. Která jest délka lomené čáry $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$?

Týž.

Úloha 3.

Do zkomoleného kužele vepsána jest koule dotýkající se obou základen i obliny jeho, a sice této podél kružnice poloměru 24 *cm*; obsahy obou těles mají se k sobě jako 8 : 21. Ustanoviti jich rozměry.

Týž.

Úloha 4.

Vyšetřiti měřické místo vrcholu c v trojúhelníku abc, jehož půdice $\overline{ab}$ jest stálá a ve kterém příčka spojující střed půdice této s vrcholem c jest střední měřickou úměrnou ramen $\overline{ac}$, $\overline{bc}$.

Týž.

Úloha 5.

Po prkně šikmo opřeném o svisnou stěnu běžela úplně pružná koule vzhůru a, byvši stěnou odražena, dopadla na prkno ve vzdálenosti D ode stěny a hloubce V pod bodem, v němž se stěny dotkla. Udejte rychlost c, s jakou koule dorazila ku stěně a délku d i výšku v vrhu!

Prof. *Vavř. Jelínek.*

Úloha 6.

Stanovte a narýsujte dráhu, kterou opíše koule, skutálivši se s hřebenu dvojstřechy, mající výšku a nad domem o šířce $2b$!

Prof. *Vavř. Jelínek.*

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Dvacátá výroční zpráva o obecním gymnasii reálním spojeném s vyššími třídami gymn. i real. v Praze (za školní rok 1887) přináší článek:

Kterak se vypočítá povrch pásu na ploše kulové. Pro žáky středních škol napsal *Aug. Pánek.* (3 strany s 1 obrazcem).

V krátkém tomto pojednání řešena jest úloha: vyjádřiti plochu P pásu kulového takovými elementy, které na útvaru přímo odměřiti možno, totiž oběma poloměry R a r základních kruhů a výškou pásu v. Trojím způsobem odvozen vzorec

$$P = \pi\sqrt{[(R+r)^2+v^2][(R-r)^2+v^2]}$$

ve kterém obsažena také pravidla pro plochu vrchlíku a povrch koule. Zajímavo jest též, že plocha pásu kulového rovná se obsahu ellipsy, jejímiž poloosami jsou nejdelší a nejkratší spojnice vedené mezi oběma kruhy základními.

Prof. *A. Strnad.*

B. Recense knih.

Účetnictví jednoduché i složité. Pojmy národohospodářské a ustanovení zákonná pro obchodníky důležitá. Sepsal *Quido Teissler*, ředitel obchodní akademie v Chrudimi. Nákladem knihtiskárny Stanislava Pospíšila. V Chrudimi, 1886, 302 str.

V širších kruzích učenců či vědců neujal se ještě názor, že by účetnictví náleželo do řady věd. Příčinu toho sluší hledati v tom, že podstata a duch účetnictví mnohdy zaměňuje se manipulací či lépe řečeno zručnostmi nebo obratnostmi při řádném účetnictví v praksi nezbytnými. A přihlédneme-li pak ještě k literatuře o účetnictví u jiných národů více nebo méně bohaté a zdařilé, seznáváme, že tento obor vědění a umění pro společenskou třídu velmi četnou vysoce důležitý, neřku-li nevyhnutelný, ve spisech příslušných většinou probírá se spůsobem, který více má na zřeteli účetnickou obratnost potřebnou v písemném vyličování obchodních případů nějakého hospodářského podniku, než aby nesl se k tomu, vyložiti nezměnitelné zásady a axiomata účetnictví, věčně tatáž, ať již mají se přispůsobiti k hospodářskému podniku jakémukoli, buď složitému a rozsáhlému, jako