Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Kadeřávek

Příspěvek k řešení oválu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 1, D70--D73

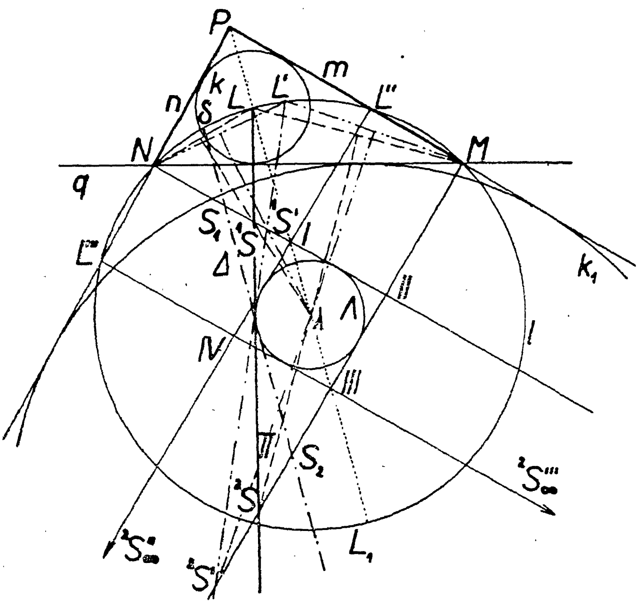
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109146

Remarque sur la théorie des roulettes. Dans cet article nous traitons du point de vue de la géometrie cinématique le probléme suivant: Étant donné un profil plan Π_1, déterminer un autre profil plan Π_2 de la manière, que la roulement de Π_1 suivant Π_2 (ou inversement) peut être réalisée par une simple translation suivant une ligne droite donnée ou bien par une simple rotation suivant un cercle donné. Nous démontrons à l'aide des équations convenablement choisies que nous appellons les conditions de position et celles du mouvement, que la résolution de tous ces problèmes est ramené à des quadratures.

PŘÍSPĚVEK K ŘEŠENÍ OVÁLU

Dr FRANTIŠEK KADEŘÁVEK, Praha.

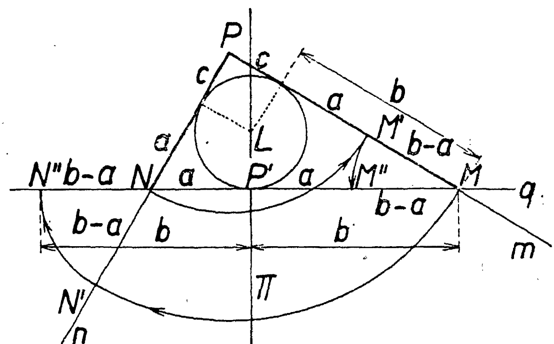
Řešení oválu, sestávajícího ze dvou kruhových oblouků, které se navzájem dotýkají a dotýkají se daných přímek m, n v bodech M, N, provedeme takto (obr. 1): Trojúhelníku MNP vepišme kružnici k o středu L.



Obr. 1.

Body M, N, L veďme další kružnici l o středu λ, kol něhož opišme kružnici Λ, která se dotýká přímky Π, jdoucí bodem L kolmo ke spojnici M, N! Kolmice $N^1S \perp NP$ a $M^2S \perp MP$ vytyčují na Π středy dvou kružnic, které jdouce bodem L se v něm dotýkají a přímek m, n se dotýkají v bodech M, N. Jest tu totiž $\lambda^2S \perp LM$ a $M^2S \perp MP$ proto je

$\triangle\ {}^2SLM$ rovnoramenný a obdobně i $\triangle\ {}^1SLN$ je rovnoramenný, vrcholy jsou v bodech ${}^2S, {}^1S$. Zvolíme-li na kružnici l další bod L' a vedeme-li z něho tečnu $L'{}^1S'{}^2S'$ ke kružnici Λ, jsou $\triangle\ {}^2S'L'M$ a $\triangle\ {}^1S'L'N$ opět rovnoramenné s vrcholy v bodech ${}^2S'$ a ${}^1S'$. Z toho je patrno, že i tato dvojina bodů jsou středy dvou kružnic, které se v L' stýkají a ovál řeší. *Jsou proto styčné body všech dvojin kruhových řešících daný ovál na kružnici l a spojnice jejich středů obalují kružnici Λ s l soustřednou*; pro L'' a L''' dostáváme jednu z kružnic dvojiny o nekonečně velkém poloměru: $\overline{L''M} = \overline{L'''N} = \overline{MP} - \overline{NP}$. Z toho je patrno, že předně $M^2S \perp MP$ a $N^1S \perp NP$ se rovněž kružnice Λ dotýkají a že průměr kružnice Λ je rovný *rozdílu* $\overline{MP} - \overline{NP}$ stran trojúhelníka MNP. Vedeme-li $\delta S_1S_2 \parallel I\ III$, tedy kolmo k směru osy souměrnosti úhlu sevřeného normálami



Obr. 2.

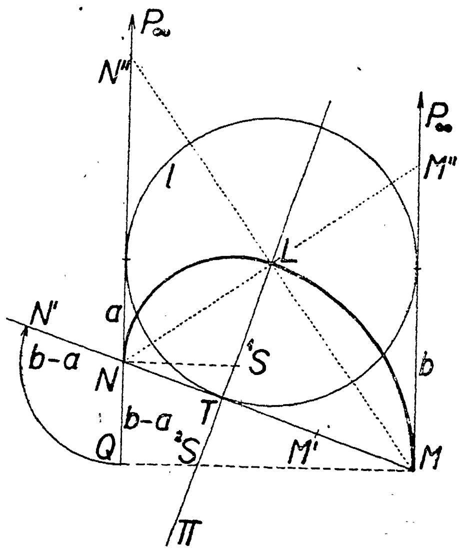
S_1N, S_2M ke stranám $\triangle\ MNP$, získáme dvojinu oblouků kruhových, řešících daný ovál, při čemž je *absolutní rozdíl* poloměrů obou použitých kružnic v rozmezí NLM kružnice l *nejmenší*. Použijeme-li dvojiny kružnic, které se stýkají v bodě L — ve středu vepsané kružnice, získáme dvojinu, která pro styčný bod v rozmezí kružnice l daném body MLN, má *poměr poloměrů* $\pi = \overline{L^2S} : \overline{L^1S}$ *nejmenší* a proto jeden oblouk nejplynuleji přechází do oblouku druhého.

Spojnici Π středů můžeme stanoviti 1. jako kolmici z L na spojnici MN, nebo 2. jako osu úsečky buď NM'', nebo úsečky MN'' (obr. 2). Označíme-li délky tečen z bodů N, M a P ke kružnici k písmenami a, b, c a učinili-li jsme $\overline{M'P} = \overline{NP}$ a $\overline{M''M} = \overline{M'M}$, je $\overline{NP'} = a$ a $\overline{MM''} = b - a$; ježto $\overline{P'M} = b$, je $\overline{P'M''} = b - b + a = a$. Obdobně, učiníme-li $\overline{PN'} = \overline{PM}$ a $\overline{N''N} = \overline{N'N}$ je $\overline{N''P'} = b - a + a = b = \overline{P'M}$. Též lze udělati $\overline{PM'} = \overline{PN}$ a úsečku $\overline{N''N} = \overline{M'M}$.

Pro stoupající oblouk (obr. 3) můžeme buď učiniti $\overline{MN} = \overline{MM''} = \overline{NN''}$. Pak L je průsečíkem MN'' s NM'' a bodem L vedená přímka

$\Pi \perp MN$ vytyčuje oba hledané středy oblouků ${}^1S$, ${}^2S$; použito tu oválu o nejmenším poměru poloměrů. Učiníme-li $\overline{QN} = \overline{NN'} = \overline{MM'}$, je T společným středem úseček $\overline{NM'}$ a $\overline{MN'}$ a jím vedená kolmice Π k MN řeší danou úlohu.

Použijeme-li místo kružnice k kružnice k_1 (viz opět obr. 1) dotýkající se m, n a přímky q vně trojúhelníka MNP, shledáme, že její střed L_1 je diametrálně protilehlým k bodu L v kružnici l; i k_1 se vztahuje k roz-



Obr. 3.

dílům $\overline{NL'''} = \overline{ML''} = \overline{MP} - \overline{NP}$. Bod L_1 vedl by k oválu z kruhových oblouků v poměru poloměrů nejmenším, ale oválu položenému vně $\triangle\, MNP$.

Učiníme-li $\overline{NP^1M} = \overline{MP^1N} = \overline{MP} + \overline{PN}$, tu kružnice ${}^1l$ vedená body NM^1N^1M a s ní soustředná o průměru rovném součtu $\overline{MP} + \overline{PN}$ mají pro kružnice k_2 a k_3 dotýkající se $\triangle\, MNP$ vně a to obě po téže straně základny MN jako kružnice k týž význam, jako kružnice l a Λ pro dvojinu kružnic k a k_1. Vedou k oválům, jejichž styčné body jsou na ${}^1l$ a jejichž spojnice středů obalují ${}^1\Lambda$. Ovály ty leží větší svou částí vně $\triangle\, MNP$ a nehodí se pro technickou praxi.

Důkaz o dvojině kružnic tvořících ovál tak, aby algebraický rozdíl poloměrů byl nejmenší, je synteticky snadný, pro podmínku, aby poměr obou poloměrů byl nejmenší, byl by synteticky obtížný a lze jej provésti počtem.

LITERATURA.

Dipl. Ing. C. Herbst: Die aesthetische Kreisbogenkurve, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910.
G. D. Sandel: Zur Geometrie der Korbbögen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1937, str. 301.
K. Strubecker: Zur Geometrie der Korbbögen. Bemerkung zur Mitteilung von G. D. Sandel, 1938, str. 148.
L. Seifert: Cyklografie. JČMF, Kruh 15.

La construction des courbes ovales. On traite la construction des lignes ovales composées de deux circonférences touchant l'une l'autre et tangeant deux droites données en deux points données sous la condition que la différence des rayons est minimale ou que le rapport des rayons est le plus convenable. Dans la solution on fait l'usage seulement des moyens de la géométrie élémentaire, on n'a pas employé du calcul.

ČTYŘMI BODY POLOŽITI KUŽELOSEČKU PODOBNOU DANÉ

Ing. Dr JOSEF LANGR, Praha

K provedení konstrukce užito je úhlové inverse v trojúhelníku, t. j. isogonální konjugace. Tato kvadratická transformace je známa z odborné literatury. V poslední době přinesla „The mathematical gazette", roč. XXXI (1947), str. 130 článek „Isogonal conjugates" (napsali H. E. PIGOTT a A. STEINER), v němž autoři podrobně probírají isogonální methodu trojúhelníkovou i důsledky její, metrických vztahů vyplývajících z polohy přímky konjugované s kuželosečkou však neuvádějí a proto také nadepsanou úlohou se nezabývají. Přímo však problém tento řeší v našem Časopise, roč. 72 (1947), str. D67 p. dr URBAN, užívaje k tomu jiné, snad složitější kvadratické transformace. — Isogonální konjugace je jednoduchá a umožňuje řešení i v případě, že všechny 4 dané body jsou imaginárné.

1. Pro orientaci probéřeme zde stručně a bez důkazu zásady této isogonální konjugace. Buď dán trojúhelník ABC (obr. 1) s osami o_1, o_2, o_3 úhlů α, β, γ a opsanou kružnicí l o středu O. Zvolme v trojúhelníku bod D, jehož spojnice s vrcholy A, B, C protínají protilehlé strany v bodech A', B', C'. K spojnicím těmto veďme příčky souměrně sdružené dle os o_1, o_2, o_3, jež protínají protilehlé strany v bodech A_0', B_0', C_0'. Prakticky možno určiti tyto příčky tak, že na př. průsečíkem A'' příčky AA' s l vedeme rovnoběžku s BC, jež protne l v A_0''. Spojnice $A_0''A$ protínajíc BC v A_0' je souměrně sdružena s AA' dle o_1. Příčky AA_0', BB_0', CC_0' procházejí společným bodem D_0, který je isogonálně přidružen bodu D a říkáme, *že je D_0 isogonálním obrazem bodu D*, nebo zkrátka jeho obrazem. Je zřejmé, že je-li bod D uvnitř trojúhelníka ABC, jest i D_0 uvnitř, je-li D na vnější straně, je i D_0 vně. Leží-li bod D na některé straně trojúhelníka, ztotož-