Vojtěch Jarník

O kružnici křivosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 1, D37--D51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109140

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 73 (1949)

ČLÁNKY A REFERÁTY

O KRUŽNICI KŘIVOSTI

VOJTĚCH JARNÍK, Praha

Tento článek byl přijat do Časopisu r. 1941; nevyšel však, ježto Časopis byl okupanty zastaven. Nepovažuji tento článek za práci naprosto původní; mnoho z toho, co zde v dalším je uvedeno, najde se porůznu v literatuře. Jde o diskusi pojmu „kružnice křivosti" ke „křivce" $y = f(x)$ v bodě $P_0 = [x_0, f(x_0)]$. Od většiny úvah, které jsem viděl v literatuře, se tento článek liší větší obecností: o funkci f se nepředpokládá nic jiného, než že je spojitá v bodě x_0. Hlavní důvod, proč tento článek publikuji, je tento: Nemáme toho času učebnice diferenciálního počtu pro pokročilejší matematiky. Zdá se mně pak, že předmět článku poskytuje velmi dobrou příležitost k procvičení pojmu „limita funkce několika proměnných", a proto jej zde podávám ve formě souvislého výkladu, v němž však většina důkazů je pouze naznačena, provedení je pak přenecháno čtenáři.[1]) Charakter článku je naprosto elementární, jde však o dosti delikátní limitní úvahy, a proto je záhodno, aby si čtenář provedl naznačené důkazy zcela podrobně a velmi obezřetně.

Oč běží, dozví se čtenář v § 2; napřed však odvodíme v § 1 několik pomocných vět, většinou (a možná vesměs) známých.

§ 1. Pomocné věty.

Všechna čísla v tomto článku jsou reálná; rovněž funkce.

Ježto budeme často mluviti o limitách funkcí několika proměnných, musíme se přesně smluviti na označení. Vedle konečných limit připouštíme též limity $+\infty$ a $-\infty$. Jsou-li $a_1, \ldots, a_n$ nějaká čísla, znamená rovnice

$$\lim_{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to [a_1, a_2, \ldots, a_n]} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A$$

při konečném A toto: ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že pro všechny systémy čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, splňující nerovnosti

[1]) Je tedy tento článek vlastně řadou úloh, spjatých společným thematem. Podotýkám: limita (derivace a pod.) konečná — nekonečná znamená totéž co vlastní — nevlastní.

$0 < \underset{i=1,2,\ldots,n}{\mathrm{Max}}(|x_i - a_i|) < \delta$,[2]) je $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definováno a splňuje nerovnost $|F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon$.[3])

Často budeme mluviti o limitách, kde proměnné jsou vázány určitými podmínkami; tyto podmínky budeme psáti pod znamení limitní. Příklad: budiž dáno číslo x_0; potom rovnice

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \geqq 0 \\ x_1 \neq x_2}} F(x_1, x_2) = A$$

značí při konečném A toto: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechny dvojice čísel x_1, x_2, vyhovujících nerovnostem

$$0 < \mathrm{Max}(|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|) < \delta,^{4)}\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \geqq 0,$$
$$x_1 \neq x_2,$$

je $F(x_1, x_2)$ definováno a splňuje nerovnost $|F(x_1, x_2) - A| < \varepsilon$.[3]) Obdobných označení budeme užívati pro limes superior a limes inferior.

Je-li funkce $f(x)$ definována aspoň v jistém intervalu $\langle \xi, \xi + \delta \rangle$ ($\delta > 0$),[5]) definujeme číslo $f^+(\xi)$, t. zv. horní derivováné číslo funkce f zprava v bodě ξ, rovnicí

$$f^+(\xi) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.^{6)}$$

Píši-li liminf místo limsup, dostávám t. zv. dolní derivované číslo zprava; píši-li $h < 0$ místo $h > 0$, dostávám horní a dolní derivované číslo zleva. Pro číslo $f^+(x)$ platí tato věta:

I. pomocná věta. *Budiž $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom existují čísla ξ_1, ξ_2 tak, že $a \leqq \xi_1 < b$, $a \leqq \xi_2 < b$,*

$$f^+(\xi_1) \leqq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqq f^+(\xi_2). \tag{1}$$

Návod k důkazu: 1. Budiž předně $f(a) = f(b)$. Snadno zjistíte, že existuje aspoň jedno číslo ξ_1 ($a \leqq \xi_1 < b$) tak, že $f(\xi_1)$ je největší ze všech hodnot funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$. Z toho plyne $f^+(\xi_1) \leqq 0$, čímž první nerovnost (1) dokázána. Obdobně se dokáže druhá. 2. Případ $f(a) \neq f(b)$ se odvodí z předešlého podobně, jako se věta o přírůstku funkce (neboli věta o střední hodnotě) odvozuje z věty Rolleovy. (Obdobná věta platí zřejmě též pro ostatní derivovaná čísla.)

---

[2]) Nerovnost $0 <$ Max ... říká, že aspoň pro jednu hodnotu i je $x_i \neq a_i$.

[3]) Pro $A = +\infty$ (po příp. $A = -\infty$) jest tuto nerovnost nahraditi nerovností $F > 1/\varepsilon$ (po příp. $F < -1/\varepsilon$).

[4]) *Jedno* z čísel x_1, x_2 může se tedy po případě rovnati číslu x_0.

[5]) Znak $\langle a, b \rangle$ značí množinu všech x, pro něž je $a \leqq x \leqq b$; znak (a, b) značí množinu všech x, pro něž je $a < x < b$ (t. zv. „uzavřený" a „otevřený" interval; předpokládám $a < b$).

[6]) Připouštím ovšem též hodnoty $+\infty$, $-\infty$.

Jsou-li si čtyři derivovaná čísla funkce f v bodě x rovna, t. j. existuje-li $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě x, znak $f'(x)$ (může míti po případě též hodnotu $+\infty$ nebo $-\infty$). Existuje-li konečná derivace $f'(x_0)$, je funkce f v bodě x_0 spojitá, jak víte; nekonečná derivace může však existovati i v bodě, v němž je f nespojitá (příklad: $f(x) = 1$ pro $x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ pro $x > 0$, $f'(0) = -\infty$). Připomínám větu o přírůstku funkce v tomto tvaru (v dalším odkazuji na tuto větu písmenem S): *Budiž $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť existuje $f'(x)$* (konečná nebo nekonečná) *v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Potom existuje aspoň jedno číslo ξ tak, že $f'(\xi)$ je konečné, $a < \xi < b$, $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.* Kdo zná tuto větu jen za předpokladu konečného $f'(x)$, ať si zkontroluje, že důkaz platí beze změny i v našem obecnějším případě (viz na př. V. Jarník, Úvod do počtu diferenciálního, věta 133).

V celém dalším průběhu článku bude dána funkce $f(x)$ a číslo x_0. Pro $u \neq v$ klademe $Q(u, v) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$, takže $Q(u, v) = Q(v, u)$.

2. pomocná věta. *Nechť existuje konečná $f'(x_0)$. Potom existuje konečná limita*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - Q(x_0, x)}{x - x_0} = \tfrac{1}{2}B \tag{2}$$

tehdy a jen tehdy, existuje-li konečná $f''(x_0) = B$.

Návod k důkazu: I. Budiž předně $B = 0$. Existuje-li předně $f''(x_0) = 0$, je $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = 0$ a z S dostanete (2) (kde $B = 0$). Platí-li za druhé (2) (kde $B = 0$), položte $\tau(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ pro $x \neq x_0$, $\tau(x_0) = f'(x_0)$. Potom (2) praví $\lim\limits_{x\to x_0} \tau'(x) = 0$, podle S pak $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\tau(x)-\tau(x_0)}{x-x_0} = 0$. Odtud a z (2) snadno $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = 0$, t. j. $f''(x_0) = 0$. II. Případ $B \neq 0$ se převede na předešlý, položíme-li $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}B(x-x_0)^2$.

3. pomocná věta. *Je-li B konečné číslo, platí rovnice*

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2]\to[x_0, x_0]\\ x_1 \neq x_2}} \frac{Q(x_1, x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = \tfrac{1}{2}B \tag{3}$$

tehdy a jen tehdy, platí-li rovnice

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2]\to[x_0, x_0]\\ x_1 \neq x_2}} \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = \tfrac{1}{2}B; \tag{4}$$

jest potom ovšem $f''(x_0) = B$, jak plyne z (4), limitujeme-li ve speciálním případě $x_1 = x_0$.

Návod k důkazu: I. Nechť platí (3); vyměňte x_1 s x_2 (symetrie) a sečtěte; dostanete (4). II. Nechť platí (4) a nechť $B = 0$.[7]) Podle S jest $Q(x_1, x_2) = f'(\xi)$ (ξ mezi x_1, x_2) a z rovnice (4) dostanete snadno (3) (pro $B = 0$).

4. pomocná věta. *Je-li B konečné číslo, platí rovnice*

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \geqq 0 \\ x_1 \neq x_2}} \frac{Q(x_1, x_2) - f'(x_0)}{\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - x_0} = B \tag{5}$$

tehdy a jen tehdy, je-li $f(x)$ *spojitá v jistém intervalu* $(x_0 - c, x_0 + c)$ $(c > 0)$ *a je-li*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^+(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = B. \tag{6}$$

Návod k důkazu: I. Nechť platí (5). Z toho plyne spojitost. Volím-li x_1 blízko x_0 a nechám x_2 konvergovati zprava k x_1, dostanu snadno (6). II. Nechť platí (6) (a spojitost) a nechť $B = 0$.[7]) Podle 1. pomocné věty existují v intervalu s krajními body x_1, x_2 čísla ξ_1, ξ_2 tak, že $f^+(\xi_1) \leqq Q(x_1, x_2) \leqq f^+(\xi_2)$. Odtud a z (6) dostanete (5).

5. pomocná věta. *Nechť existuje* $f'(x)$ (konečná nebo nekonečná) *v jistém intervalu* $(x_0 - c, x_0 + c)$ $(c > 0)$; *budiž B konečné číslo. Potom platí* (5) *tehdy a jen tehdy, je-li* $f''(x_0) = B$.

Důkaz ihned z 4. pomocné věty.

6. pomocná věta. *Platí-li* (5), *kde B je konečné, je*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Q(x_0, x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \tfrac{1}{2}B. \tag{7}$$

Důkaz: stačí provésti v (5) limitování pro speciální případ $x_1 = x_0$.

7. pomocná věta. *Existuje-li konečná* $f''(x_0) = B$, *platí* (7).

Důkaz plyne z 5. a 6. pomocné věty.

8. pomocná věta. *Nechť existuje konečná nebo nekonečná limita*

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = A; \tag{8}$$

potom je $f'(x_0) = A = \lim\limits_{x \to x_0} f^+(x)$.

Návod k důkazu: Předně proveďte limitu v (8) pro $x_1 = x_0$; za druhé volte x_1 blízko x_0 a nechte x_2 konvergovati zprava k x_1.

---

[7]) Případ $B \neq 0$ se převede na $B = 0$ jako v 2. pomocné větě.

Učiňme ještě úmluvu o slově „kružnice". Tímto slovem budeme vždy rozuměti kružnici o konečném kladném poloměru, t. j. množinu všech (reálných) bodů $[x, y]$, vyhovujících rovnici tvaru $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, kde α, β, r jsou reálná čísla, $r > 0$. Vylučujeme tedy oba krajní případy (kružnici o „nulovém" a o „nekonečném" poloměru); vyšetřování těchto krajních případů by vedlo k formálním komplikacím.

§ 2. Hlavní věta a její důsledky.

V tomto a následujícím paragrafu budeme stále předpokládati, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0; to znamená, že $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Dále zavedeme tato označení a úmluvy: je-li dáno x_i $(i = 0, 1, \ldots)$, klademe $y_i = f(x_i)$, $y_i' = f'(x_i)$ (pokud ovšem tato — konečná nebo nekonečná — derivace existuje). Znak P_i znamená bod $[x_i, y_i]$. Dále budeme říkati, že „křivka"[8] $y = f(x)$ má v bodě P_i tečnu t_i, je-li $f(x)$ *spojitá* v bodě x_i a existuje-li konečná nebo nekonečná derivace y_i'; tečna t_i je potom pro konečné y_i' přímka $y - y_i = y_i'(x - x_i)$, pro $y_i' = +\infty$ nebo $y_i' = -\infty$ přímka $x = x_i$; znakem n_i značíme pak kolmici k t_i, procházející bodem P_i („normála").[9])

Jsou-li x_1, x_2, x_3 tři různá čísla, bude $K(x_1, x_2, x_3)$ značiti kružnici, procházející body P_1, P_2, P_3 (tato kružnice existuje, neleží-li body P_1, P_2, P_3 na přímce). Jsou-li x_1, x_2 dvě různá čísla, bude $K(x_1, x_1, x_2)$ značiti kružnici, procházející bodem P_2 a dotýkající se (ve smyslu obvyklém z analytické geometrie) v bodě P_1 přímky t_1 (tato kružnice existuje, existuje-li t_1 a leží-li P_2 mimo t_1). Střed kružnice $K(x_1, x_2, x_3)$ (pro $x_1 \neq x_2$ i pro $x_1 = x_2$) budeme značiti vždy $[\xi(x_1, x_2, x_3), \eta(x_1, x_2, x_3)]$, poloměr $r(x_1, x_2, x_3)$. Konečně: jsou-li x_1, x_2 dvě různá čísla, existují-li tečny t_1, t_2, jsou-li různoběžné a neprotínají-li se normály n_1, n_2 v bodě P_0, budeme znakem $K(x_1, x_2 \mid n)$ značiti kružnici, procházející bodem P_0, jejíž střed $[\xi(x_1, x_2 \mid n), \eta(x_1, x_2 \mid n)]$ je průsečíkem normál n_1, n_2. Zavedeme nyní osm kružnic $K^1, \ldots, K^8$, odpovídajících různým pojetím „kružnice křivosti".

I. Jestliže kružnice $K(x_1, x_2, x_3)$ konvergují k jisté limitní kružnici,[10]) když čísla x_1, x_2, x_3 — zůstávajíce mezi sebou různá — konvergují k číslu x_0, budeme tuto limitní kružnici značiti znakem K^1. Přesně řečeno: kružnice K^1 existuje tehdy a jen tehdy, existují-li konečné limity[11])

[8]) Může to býti ovšem útvar, nikterak neodpovídající běžnému názoru ani obvyklým definicím „křivky"; neboť $f(x)$ může býti na př. všude nespojitá, kromě bodu x_0; množina bodů $[x, f(x)]$ je prostě graf funkce f.

[9]) Kdybychom mluvili o tečně též v bodech P_i, v nichž je $f(x)$ *nespojitá* a $y_i' = +\infty$ nebo $y_i' = -\infty$, dostali bychom nepříjemné zjevy; viz o tom § 4.

[10]) Ovšem: o poloměru konečném a kladném.

[11]) Píši-li několik limit se stejnými limitními podmínkami, vypisuji tyto podmínky pro zkrácení často jen u jedné z nich.

$$\xi_1 = \lim_{\substack{[x_1, x_2, x_3] \to [x_0, x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1}} \xi(x_1, x_2, x_3),\ \eta_1 = \lim \eta(x_1, x_2, x_3),\ r_1 = \tag{9}$$
$$= \lim r(x_1, x_2, x_3),$$

při čemž $r_1 > 0$. Potom bude $[\xi_1, \eta_1]$ střed a r_1 poloměr kružnice K^1. Snadno vidíte: existují-li první dvě konečné limity v (9) a je-li $[\xi_1, \eta_1] \neq P_0$, existuje též třetí konečná limita v (9) a je kladná; K^1 prochází pak bodem P_0. O třetí limitu v (9) se tedy nemusíme starati; totéž si rozvažte u kružnic K^2 až K^7. Názorný význam kružnice K^1 je jasný, rovněž názorný význam dalších kružnic $K^2, \ldots, K^7$.

II. Specialisujme kružnice $K(x_1, x_2, x_3)$, kladouce $x_1 = x_0$. Zavedeme K^2 takto: K^2 existuje tehdy a jen tehdy, existují-li konečné limity

$$\xi_2 = \lim_{\substack{[x_2, x_3] \to [x_0, x_0] \\ x_0 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_0}} \xi(x_0, x_2, x_3),\ \eta_2 = \lim \eta(x_0, x_2, x_3)$$

a je-li $[\xi_2, \eta_2] \neq P_0$; K^2 bude potom kružnice o středu $[\xi_2, \eta_2]$, procházející bodem P_0.

III. K^3 bude limitní polohou kružnic, procházejících bodem P_2 a majících v bodu P_1 tečnu t_1. Přesně: K^3 existuje tehdy a jen tehdy, existují-li konečné limity

$$\xi_3 = \lim_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} \xi(x_1, x_1, x_2),\ \eta_3 = \lim \eta(x_1, x_1, x_2)$$

a je-li $[\xi_3, \eta_3] \neq P_0$; K^3 bude potom kružnice o středu $[\xi_3, \eta_3]$, procházející bodem P_0.

IV, V. Specialisací $P_2 = P_0$ nebo $P_1 = P_0$ dostáváme další kružnice. Kružnice K^4 existuje tehdy a jen tehdy, existují-li konečné limity

$$\xi_4 = \lim_{x_1 \to x_0} \xi(x_1, x_1, x_0),\ \eta_4 = \lim_{x_1 \to x_0} \eta(x_1, x_1, x_0)$$

a je-li $[\xi_4, \eta_4] \neq P_0$. Kružnice K^5 existuje tehdy a jen tehdy, existují-li konečné limity

$$\xi_5 = \lim_{x_2 \to x_0} \xi(x_0, x_0, x_2),\ \eta_5 = \lim_{x_2 \to x_0} \eta(x_0, x_0, x_2)$$

a je-li $[\xi_5, \eta_5] \neq P_0$. Kružnice K^p $(p = 4, 5)$ má potom střed $[\xi_p, \eta_p]$ a prochází bodem P_0.

VI. K^6 bude znamenati limitu kružnic $K(x_1, x_2 \mid n)$, když P_1, P_2 konvergují k P_0. Přesně: K^6 existuje tehdy a jen tehdy, existují-li konečné limity

$$\xi_6 = \lim_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} \xi(x_1, x_2 \mid n),\ \eta_6 = \lim \eta(x_1, x_2 \mid n)$$

a je-li $[\xi_6, \eta_6] \neq P_0$. Potom je K^6 kružnice o středu $[\xi_6, \eta_6]$, procházející bodem P_0.

VII. Specialisujme $P_1 = P_0$: K^7 existuje tehdy a jen tehdy, existují-li konečné limity

$$\xi_7 = \lim_{x_2 \to x_0} \xi(x_0, x_2 \mid n), \ \eta_7 = \lim_{x_2 \to x_0} \eta(x_0, x_2 \mid n)$$

a je-li $[\xi_7, \eta_7] \neq P_0$. Potom je K^7 kružnice o středu $[\xi_7, \eta_7]$, procházející bodem P_0.

VIII. Budiž K libovolná kružnice $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ $(r > 0)$; rovnice její horní a dolní půlkružnice buďte $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$. Lze-li voliti i ($i = 1$ nebo $i = 2$) tak, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - h_i(x)}{(x - x_0)^2} = 0, \tag{10}$$

budeme kružnici K značiti znakem K^8 (říká se též, že K^8 má s křivkou $y = f(x)$ styk vyššího než prvního řádu). Zjistěte toto: platí-li (10), je $\alpha - r < x_0 < \alpha + r$, $h_i(x_0) = y_0$, $h_i'(x_0) = y_0'$ (takže existuje konečná y_0'). V tomto případě však bude podle 7. pomocné věty (aplikované na funkci $h_i(x)$) platiti rovnice (10) tehdy a jen tehdy, je-li

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Q(x_0, x) - y_0'}{x - x_0} = \tfrac{1}{2} h_i''(x_0).$$

Existuje-li konečná limita vlevo — označme ji $\frac{1}{2}B$ — jde o to, nalézti kružnici K tak, že $h_i(x_0) = y_0$, $h_i'(x_0) = y_0'$, $h_i''(x_0) = B$; to lze (dokažte!) tehdy a jen tehdy, je-li $B \neq 0$. Odtud snadno zjistíte: K^8 existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li konečná, od nuly různá limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Q(x_0, x) - y_0'}{x - x_0} = \tfrac{1}{2} B;$$

potom je K^8 jednoznačně stanovena; prochází bodem P_0 a souřadnice jejího středu jsou dány výrazy

$$x_0 - y_0' \frac{1 + y_0'^2}{B}, \ y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{B} \tag{11}$$

(proveďte podrobnosti důkazu). Jako jsme nyní odvodili nutnou a postačující podmínku pro existenci kružnice K^8, odvodíme v § 3 obdobné podmínky pro K^1 až K^7. Výsledek bude dán touto větou:

Hlavní věta. *Funkce f budiž spojitá v bodě x_0. Potom platí toto:*

1. *Kružnice K^1 existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li konečná, od nuly různá limita*

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = B \tag{12}$$

(potom je ovšem $f''(x_0) = B$). Totéž platí o kružnici K^3 a o kružnici K^6.

2. *Kružnice* K^4 *existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li konečná, od nuly různá* $f''(x_0) = B$. *Totéž platí o kružnici* K^7.

3. *Kružnice* K^2 *existuje tehdy a jen tehdy, je-li* f *spojitá v jistém intervalu* $(x_0 - c, x_0 + c)$, *kde* $c > 0$ *a existuje-li mimo to konečná, od nuly různá limita*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^+(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = B. \tag{13}$$

4. *Kružnice* K^5 *existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li konečná od nuly různá limita*

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{Q(x_0, x) - y_0'}{x - x_0} = \tfrac{1}{2}B. \tag{14}$$

Totéž platí o kružnici K^8.

5. *Existuje-li některá z kružnic* K^p $(p = 1, \ldots, 8)$, *prochází* K^p *bodem* P_0 *a souřadnice jejího středu jsou dány výrazy* (11), *kde ovšem* B *značí právě onu hodnotu, o kterou při příslušné hodnotě* p *běží.*[12])

Uveďme několik důsledků hlavní věty. *Existuje-li* K^1, *existuje též* K^4 *a je* $K^1 = K^4$; *existuje-li* K^4, *existuje též* K^2 *a je* $K^4 = K^2$; *existuje-li* K^2, *existuje též* K^5 *a je* $K^2 = K^5$ (dokažte!).

Ukažte nyní na příkladech, že žádný z těchto výroků nelze obrátiti. Návod:

A) Položte $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 + x^4 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$; potom existuje K^4, ale neexistuje K^1. — B) Položte $x_0 = 0$ a pro $|x| \leqq 1$ klaďte $f(x) = x^2 + g(x)$, kde $g(x) = 0$ pro $-1 \leqq x \leqq 0$; pro $x = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ budiž $g(x) = (-1)^n n^{-4}$; v každém intervalu $\left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right\rangle$ budiž $g(x)$ lineární; zde existuje K^2, ale nikoliv K^4 (rozvažte si však, že platí toto: *existuje-li v jistém intervalu* $(x_0 - c, x_0 + c)$ *konečná nebo nekonečná derivace* $f'(x)$, *existuje* K^4 *tehdy a jen tehdy, existuje-li* K^2). — C) Položte $x_0 = 0$, $f(x) = x^2 + x^3$ pro racionální x, $f(x) = x^2 - x^3$ pro iracionální x. Potom existuje K^5, ale neexistuje K^2.

Dále platí toto: *Existují-li dvě z kružnic* $K^1, \ldots, K^8$, *jsou si rovny.* Zbývá nám dokázati hlavní větu, což učiníme v § 3. Onu část, jež se týká kružnice K^8, jsme ovšem už vyřídili.

[12]) Ostatně, jak ihned uvidíme, lze číslo B definovati vždy rovnicí (14), jakmile některá kružnice K^p existuje. Případ $B = 0$ by odpovídal vyloučenému případu „kružnice o nekonečném poloměru".

§ 3. Důkaz hlavní věty.

1. Připomínám, že předpokládám v tomto §, že $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. Z definice vidíte: existuje-li K^1, existuje též K^2 a je $K^2 = K^1$; existuje-li K^3, existují též K^4, K^5 a je $K^4 = K^5 = K^3$; existuje-li K^6, existuje též K^7 a je $K^7 = K^6$.

2. Souřadnice středu kružnice $K(x_1, x_1, x_2)$ jsou dány při konečném y_1' vzorci

$$\xi(x_1, x_1, x_2) - x_1 = -y_1'(\eta(x_1, x_1, x_2) - y_1), \tag{15}$$

$$2(\eta(x_1, x_1, x_2) - y_1)\frac{y_1' - Q(x_1, x_2)}{x_2 - x_1} = -(1 + Q^2(x_1, x_2)), \tag{16}$$

kdežto pro $y_1' = \pm\infty$ jest (je-li ovšem f spojitá v bodě x_1)

$$\eta(x_1, x_1, x_2) = y_1,\ 2(\xi(x_1, x_1, x_2) - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)) = Q(x_1, x_2)(y_2 - y_1) \tag{17}$$

(kdy selžou tyto vzorce?).

3. Předpokládejme, že existuje K^4. Potom je f spojitá v jistém intervalu $(x_0 - c, x_0 + c)$ $(c > 0)$.[13]) Je-li $\liminf\limits_{x\to x_0}|f'(x)| < +\infty$, zjistíte z (15) (kde ovšem nyní místo x_2 píšete x_0), že $\eta_4 \neq y_0$; je-li však $\limsup\limits_{x\to x_0}|f'(x)| = +\infty$, zjistíte obdobně, že $\eta_4 = y_0$. Jsou tedy možny jen tyto dva případy: I. buďto $\lim\limits_{x\to x_0}|f'(x)| = +\infty$, II. nebo $\limsup\limits_{x\to x_0}|f'(x)| < \infty$. Nechť platí I, takže $\eta_4 = y_0$ a tedy $\xi_4 \neq x_0$, třeba $\xi_4 < x_0$ (jak převedete případ $\xi_4 > x_0$ na předešlý?). Z věty S dostanete $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} Q(x_0, x) = +\infty$ (nebo $-\infty$; jak převedete $-\infty$ na $+\infty$?). V libovolné blízkosti bodu x_0 najdete nyní x_2 tak, že $x_0 < x_2$ a že $Q(x_0, x) > Q(x_0, x_2) > 0$ pro $x_0 < x < x_2$; podle S dostanete pak x_1 tak, že $x_0 < x_1 < x_2$, $f'(x_1) = Q(x_0, x_2) < Q(x_0, x_1)$. Z (16), (15) plyne pak $\xi(x_1, x_1, x_0) > x_1$, tedy $\xi_4 \geqq x_0$, což je spor;[14]) tedy platí II a odtud snadno (pomocí (15))

9. pomocná věta. *Existuje-li K^4, je $f'(x)$ spojitá v bodě x_0 a je $\eta_4 \neq y_0$, $y_0' = -(\xi_4 - x_0) : (\eta_4 - y_0)$.*

4. Dokažme nyní onu část hlavní věty, jež se týká kružnic K^3, K^4. Podle znění hlavní věty a podle 9. pom. věty stačí vésti důkaz za předpokladu, že $f'(x)$ je spojitá v bodě x_0, takže podle S je $\lim\limits_{\substack{[x_1, x_2]\to[x_0, x_0]\\ x_1\neq x_2}} Q(x_1, x_2) = y_0'$.

Potom však důkaz plyne snadno z (15), (16) a z pomocných vět 2, 3.

5. Existuje-li K^5, existuje y_0'. Kdyby bylo $y_0' = \pm\infty$, mělo by $\xi(x_0, x_0, x_2) - \frac{1}{2}(x_0 + x_2)$ totéž znamení jako $x_2 - x_0$, tedy $\xi_5 = x_0$ a sou-

[13]) Prosím ovšem čtenáře, aby si všechny naznačené důkazy podrobně provedl.

[14]) Tato úvaha má jednoduchý názorný význam; rozvažte si to.

časně $\eta_5 = y_0$ — spor. Stačí tedy vésti důkaz za předpokladu, že y_0' je konečné. Potom však plyne tvrzení z (15), (16), kde ovšem $x_1 = x_0$.

6. Souřadnice $\xi(x_1, x_2 \mid n)$, $\eta(x_1, x_2 \mid n)$ jsou dány těmito rovnicemi (kdy selžou tyto rovnice?)

$$\begin{aligned} &\xi(x_1, x_2 \mid n) - x_1 = -y_1'(\eta(x_1, x_2 \mid n) - y_1) \text{ pro } y_1' \neq \pm\infty, \\ &\eta(x_1, x_2 \mid n) - y_1 = 0 \text{ pro } y_1' = \pm\infty; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\xi(x_1, x_2 \mid n) - x_2 = -y_2'(\eta(x_1, x_2 \mid n) - y_2) \text{ pro } y_2' \neq \pm\infty, \\ &\eta(x_1, x_2 \mid n) - y_2 = 0 \text{ pro } y_2' = \pm\infty. \end{aligned} \tag{19}$$

7. Předpokládejme, že existuje K^7. Budiž předně $y_0' = \pm\infty$, takže podle (18) (kde ovšem $x_1 = x_0$) je $\eta_7 = \eta(x_0, x_2 \mid n) = y_0$, tedy $\xi_7 \neq x_0$; třeba $\xi_7 < x_0$, $y_0' = +\infty$ (jak se převedou ostatní případy na tento?). Pro $x_0 < x_2 < x_0 + \delta$ $(\delta > 0)$ je potom $y_2' \neq \pm\infty$, $Q(x_0, x_2) > 0$, načež z (19) plyne $f'(x_2) < 0$, což je ve sporu s S. Tedy je y_0' konečně a z (18), (19) plyne snadno: Existuje-li K^7, je $f'(x)$ spojitá v bodě x_0 a jest $\eta_7 \neq y_0$, $y_0' = -(\xi_7 - x_0) : (\eta_7 - y_0)$.

8. Dokažme nyní onu část hlavní věty, jež se týká kružnic K^6, K^7. Podle hlavní věty a podle odst. 7 stačí vésti důkaz za předpokladu, že $f'(x)$ je spojitá v bodě x_0, takže podle S je $\lim\limits_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} Q(x_1, x_2) = y_0'$.

Vypočtu z (18), (19)

$$\eta(x_1, x_2 | n) - y_2 = \frac{x_1 - x_2}{y_1' - y_2'}(1 + y_1' Q(x_1, x_2)),$$

načež tvrzení snadno plyne.

9. Zbývají nejtěžší případy, totiž kružnice K^1, K^2. Jsou-li x_4, x_5, x_6 tři různá čísla, jsou souřadnice středu kružnice $K(x_4, x_5, x_6)$ dány těmito vzorci

$$\begin{gathered} 2(\xi(x_4, x_5, x_6) - x_4) = \\ = \frac{(x_5 - x_4) Q(x_4, x_6)(1 + Q^2(x_4, x_5)) - (x_6 - x_4) Q(x_4, x_5)(1 + Q^2(x_4, x_6))}{Q(x_4, x_6) - Q(x_4, x_5)}, \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} 2(\eta(x_4, x_5, x_6) - y_4) = \\ = \frac{(x_6 - x_4)(1 + Q^2(x_4, x_6)) - (x_5 - x_4)(1 + Q^2(x_4, x_5))}{Q(x_4, x_6) - Q(x_4, x_5)} \end{gathered} \tag{21}$$

(kdy selžou tyto vzorce?).

10. Nechť existuje K^2. Jsou-li u, v dvě různá čísla, zvolme třetí číslo w takto: je-li $u = x_0$ nebo $v = x_0$, volme $w = \frac{1}{2}(u + v)$; je-li $u \neq x_0$, $v \neq x_0$, volme $w = x_0$. Budiž $d(u, v)$ vzdálenost bodu $[\xi_2, \eta_2]$ od symetrály bodů $[u, f(u)]$, $[v, f(v)]$, takže

$$\lim_{\substack{[u, v] = [x_0, x_0] \\ u \neq v}} d(u, v) = 0 \tag{22}$$

(neboť střed kružnice $K(u, v, w)$ má za limitu bod $[\xi_2, \eta_2]$),

$$d(u, v) = \pm \frac{\xi_2 - \frac{1}{2}(u + v) + Q(u, v)(\eta_2 - \frac{1}{2}(f(u) + f(v)))}{(1 + Q^2(u, v))^{\frac{1}{2}}}. \tag{23}$$

Z (22), (23) plyne ihned: je-li

$$\liminf_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} |Q(x_1, x_2)| < +\infty, \tag{24}$$

je $\eta_2 \neq y_0$; je-li však

$$\limsup_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} |Q(x_1, x_2)| = +\infty, \tag{25}$$

je $\eta_2 = y_0$, takže (24), (25) jsou ve sporu. Tedy je

I. buďto $\lim\limits_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} |Q(x_1, x_2)| = +\infty$, II. nebo

$\limsup\limits_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} |Q(x_1, x_2)| < +\infty$.

Nechť platí případ I, takže $\eta_2 = y_0$, tedy $\xi_2 \neq x_0$, třeba $\xi_2 < x_0$. V libovolné blízkosti bodu x_0 lze voliti x_5, x_6 tak, že $x_0 < x_5 < x_6$, $|y_5 - y_0| < |y_6 - y_0|$, $|Q(x_0, x_5)| > |Q(x_0, x_6)|$. Z rovnice (20) (kde klademe $x_4 = 0$) dostanete $\xi(x_0, x_5, x_6) > x_0$ (což je geometricky evidentní), tedy v limitě $\xi_2 \geqq x_0$ — spor.[15]) Tedy nastává případ II, tedy $\eta_2 \neq y_0$ a z (22), (23) plyne pak

10. pomocná věta. *Existuje-li K^2, je $\eta_2 \neq y_0$ a platí*

$$y_0' = \lim_{\substack{[u, v] \to [x_0, x_0] \\ u \neq v}} Q(u, v) = -(\xi_2 - x_0) : (\eta_2 - y_0). \tag{26}$$

11. Nechť existuje K^2. Dosaďme do (21) $x_4 = x_0$. Převrácená hodnota pravé strany má konečnou, od nuly různou limitu $\frac{1}{2}(\eta_2 - y_0)^{-1}$. Zvolme x_6 blízko x_0 a nechme konvergovati x_5 k x_0; dostaneme (s užitím 10. pom. věty)

$$\lim_{x_6 \to x_0} \frac{Q(x_0, x_6) - y_0'}{x_6 - x_0} = \frac{1}{2} \frac{1 + y_0'^2}{\eta_2 - y_0} = \frac{1}{2}B \neq 0. \tag{27}$$

Buďte za druhé dána dvě čísla x_4, x_6, ležící po téže straně bodu x_0; číslování volme (symetrie!) tak, že $|x_6 - x_0| > |x_4 - x_0|$. Položme teď v (21) $x_5 = x_0$; dostaneme snadno

$$\lim_{\substack{[x_4, x_6] \to [x_0, x_0] \\ (x_4 - x_0)(x_6 - x_0) > 0 \\ x_4 \neq x_6}} \frac{Q(x_4, x_6) - Q(x_4, x_0)}{x_6 - x_0} = \frac{1}{2}B.$$

Vyjádříme-li $Q(x_4, x_0)$ podle vzorce (27), dostaneme snadno

---

[15]) Tato úvaha má jednoduchý názorný význam.

$$\lim_{\substack{[x_4, x_6]\to[x_0, x_0] \\ (x_4 - x_0)(x_6 - x_0)\geqq 0 \\ x_4 \neq x_6}} \frac{Q(x_6, x_4) - y_0'}{\frac{1}{2}(x_4 + x_6) - x_0} = B \ (B \neq 0 \text{ konečné}). \tag{28}$$

(případ $(x_4 - x_0)(x_6 - x_0) = 0$ je obsažen ve vzorci (27)). Tedy: existuje-li K^2, platí (28).

12. Nechť naopak platí (28). Z (28) plyne

$$\lim_{\substack{[x_4, x_6]\to[x_0, x_0] \\ (x_4 - x_0)(x_6 - x_0)\geqq 0 \\ x_4 \neq x_6}} Q(x_4, x_6) = y_0', \lim_{x_6 \to x_0} \frac{Q(x_0, x_6) - y_0'}{x_6 - x_0} = \tfrac{1}{2}B. \tag{29}$$

Chceme dokázati, že

$$\lim_{\substack{[x_2, x_3]\to[x_0, x_0] \\ x_2 \neq x_3}} \xi(x_0, x_2, x_3) = x_0 - y_0' \frac{1 + y_0'^2}{B}, \lim \eta(x_0, x_2, x_3) = y_0 + \\ + \frac{1 + y_0'^2}{B}. \tag{30}$$

Budiž $x_2 \neq x_3$; číslování volme tak, že $|x_3 - x_0| \geqq |x_2 - x_0|$. Proveďte limitování napřed v oboru $|x_3 - x_2| \geqq \frac{1}{2}|x_3 - x_0|$, kladouce v (20), (21) $x_4 = x_0$, $x_5 = x_2$, $x_6 = x_3$ a užívajíce (29); potom proveďte limitování v oboru $|x_3 - x_2| < \frac{1}{2}|x_3 - x_0|$ (takže x_2, x_3 leží na téže straně bodu x_0), kladouce v (20), (21) $x_4 = x_2$, $x_5 = x_0$, $x_6 = x_3$ a užívajíce (29), (28); tím dostanete (30). Odtud, z výsledku odst. 11 a z 4. pom. věty obdržíte tvrzení hlavní věty o kružnici K^2.

13. Nechť existuje K^1; tedy platí (26). Volme v (21) x_4 blízko x_0 a nechme konvergovati x_5, x_6 k x_4. Zlomek je omezen, čitatel konverguje k nule, tedy též jmenovatel, t. j.

$$\lim_{\substack{[x_5, x_6]\to[x_4, x_4] \\ x_4 \neq x_5 \neq x_6 \neq x_4}} (Q(x_4, x_6) - Q(x_4, x_5)) = 0,$$

což je Bolzano-Cauchyova podmínka pro limitu funkce $Q(x_4, x)$ (při pevném x_4). Tedy existuje konečná $f'(x_4)$ pro $|x_4 - x_0| < c$ $(c > 0)$.

Převrácená hodnota pravé strany v (21) má konečnou limitu různou od nuly. Volím-li x_4, x_6 blízko x_0 a nechám x_5 konvergovati k x_4, dostanu snadno (podle (26))

$$\lim_{\substack{[x_4, x_6]\to[x_0, x_0] \\ x_4 \neq x_6}} \frac{Q(x_4, x_6) - f'(x_4)}{x_6 - x_4} = \tfrac{1}{2}B \ (B \neq 0, \text{ konečné}). \tag{31}$$

Tedy: existuje-li K^1, platí (31).

14. Nechť naopak platí (31), takže podle 3. pomocné věty je $f''(x_0) = B$, tedy $f'(x)$ spojitá v bodě x_0, takže podle S je

$$\lim_{\substack{[u, v]\to[x_0, x_0] \\ u \neq v}} Q(u, v) = B. \tag{32}$$

Buďte x_4, x_5, x_6 tři různá čísla; číslování volme (symetrie!) tak, že $x_5 < x_4 < x_6$. Provedeme-li limitování v (20), (21), užívajíce (31) a (32), dostaneme snadno, že K^1 existuje a že pro ξ_1, η_1 platí výrazy (11). Odtud, z odst. 13 a z 3. pom. věty plyne tedy ona část hlavní věty, jež se týká kružnice K^1.

§ 4. Závěrečné poznámky.

1. V hlavní větě jsme předpokládali spojitost funkce f v bodě x_0 (a nic více). Tento předpoklad byl účelný; kdybychom jej nebyli učinili, byli bychom dospěli k nežádoucím zjevům. Na př. definujeme-li $x_0 = 0$, $f(0) = 1$, $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ pro $0 < |x| \leqq 1$, existuje zřejmě kružnice K^1, a je to kružnice $x^2 + y^2 = 1$; tentýž výsledek bychom dostali na př. pro tuto funkci: $f(x) = +\sqrt{1 - x^2}$ pro racionální $|x| \leqq 1$, $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ pro iracionální $|x| \leqq 1$. Podmínky pro existenci kružnice K^1 by tedy byly asi velmi složité, a mimo to by K^1 existovala i v případech, které s názornou představou „kružnice křivosti" mají pramálo společného.

2. V případě $y_i' = \pm\infty$ jsme přímku $x = x_i$ nazvali „tečnou" t_i jen tehdy, byla-li $f(x)$ spojitá v bodě x_i. Také tato úmluva byla účelná, jak ukazuje tento příklad:

Zobecněme definici tečny tak, že v případě $y_i' = \pm\infty$ budeme přímku $x = x_i$ nazývati tečnou t_i i tehdy, když $f(x)$ je nespojitá v bodě x_i. Definujme kružnici K^4 jako dříve, ale s touto zobecněnou definicí tečny. Položme $x_0 = 0$ a definujme $f(x)$ pro $|x| \leqq 1$ takto: Pro $-1 \leqq x \leqq 0$ budiž $y = f(x)$ dolní půlkružnicí kružnice K o rovnici $x^2 + x + y^2 = 0$ (střed $[-\frac{1}{2}, 0]$; prochází počátkem). V intervalu $(n+1)^{-2} < x < n^{-2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ budiž $y = f(x)$ obloukem dolní půlkružnice na kružnici C_n, jež prochází počátkem a dotýká se v bodě $[n^{-2}, n^{-1}]$ přímky $x = n^{-2}$. Konečně budiž $f(n^{-2}) = n^{-1} - n^{-2}$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Snadno zjistíte, že $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 a že $\lim\limits_{\substack{x\to n^{-2}\\ x<n^{-2}}} f(x) > f(n^{-2}) > \lim\limits_{\substack{x\to n^{-2}\\ x>n^{-2}}} f(x)$, takže $f'(n^{-2}) = -\infty$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Sestrojujete-li kružnice $K(x_1, x_1, x_0)$, zjistíte, že jejich středy konvergují k bodu $[-\frac{1}{2}, 0]$, takže existuje $K^4 = K$, ač tato kružnice nemá nic společného s názornou představou „kružnice křivosti" (načrtněte si aspoň přibližně křivku $y = f(x)$). Podle naší původní formulace z § 2 ovšem K^4 neexistuje, ježto f je nespojitá v bodech $x = n^{-2}$, $n = 2, 3, \ldots$.

3. Podotýkám ještě, že úvahy tohoto článku předpokládají pevně daný systém souřadný, takže pouhé otočení systému souřadného může vésti ke komplikacím. Budiž na př. $f(0) = 0$, $f(x) = \sqrt{|x|} \,.\, \sin \dfrac{1}{x}$ pro $x \neq 0$; budiž M křivka $y = f(x)$, t. j. množina všech bodů $[x, f(x)]$. Zavedete-li nové souřadnice ξ, η libovolným otočením (o úhel, jenž není

roven celistvému násobku čísla π), zjistíte snadno, že v libovolně malém okolí počátku existují dva body množiny M, jež mají totéž ξ, ale různá η. Nelze tedy množinu M v nových souřadnicích vyjádřiti ve tvaru $\eta = \varphi(\xi)$, na kterýžto tvar se jedině vztahovaly naše výsledky. Je ovšem možno, že by se aspoň část našeho vyšetřování dala provésti také tehdy, kdybychom místo množiny bodů $[x, f(x)]$ vzali prostě libovolnou množinu bodů v rovině, která má bod P_0 za bod hromadný. Tím bychom dostali výsledky, nezávislé na volbě souřadnic.

*

Sur le cercle de courbure.

Le but de cet article n'est pas de donner des résultats absolument nouveaux, mais plutôt de donner aux étudiants une série d'exercices concernant la limite d'une fonction de plusieurs variables. Soit donné un nombre réel x_0 et une fonction réelle $f(x)$; on va désigner $f(x_i)$ par y_i; P_i va désigner le point $[x_i, f(x_i)]$. On ne suppose rien de la fonction f excepté la continuité au point x_0. Désignons par $K(x_1, x_2, x_3)$ le cercle passant par les trois points (différents) P_1, P_2, P_3; désignons par $K(x_1, x_1, x_2)$ le cercle passant par P_1, P_2 et possédant en P_1 la même tangente que la „courbe" $y = f(x)$. Désignons par $K(x_1, x_2 \mid n)$ le cercle passant par P_0 et dont le centre est situé au point d'intersection des normales à la courbe $y = f(x)$, construites aux points P_1, P_2.

Soit K^1 le cercle qui est la limite du cercle $K(x_1, x_2, x_3)$ quand les points x_1, x_2, x_3, tout en restant différents entre eux, tendent vers x_0 (le mot „cercle" signifie toujours un cercle à rayon positif et fini, de sorte que p. ex. K^1 n'existe pas au point d'inflexion). D'une manière analogue, on désigne par $K^2, K^3, \ldots, K^7$ resp. la position limite du cercle $K(x_0, x_2, x_3)$ (x_0 est fixe!), $K(x_1, x_1, x_2)$, $K(x_1, x_1, x_0)$, $K(x_0, x_0, x_1)$, $K(x_1, x_2 \mid n)$ $K(x_0, x_1 \mid n)$. Alors les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de K^i peuvent être exprimées comme il suit:

1. Pour K^1: L'existence de la limite finie

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2] \to [x_0, x_0] \\ x_1 \neq x_2}} \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0.$$

Même condition pour K^3 et K^6.

2. Pour K^4: $f''(x_0)$ ($\neq 0$, $\neq \pm\infty$) existe. Même condition pour K^7.

3. Pour K^2: f est continue dans un certain voisinage de x_0 et la limite finie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^+(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \neq 0$$

existe; ici, $f^+(x)$ est le nombre dérivé supérieur du côté droit (p. ex.).

4. Pour K^5: L'existence de la limite finie

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} - \frac{f'(x_0)}{x - x_0} \right) \neq 0.$$

Il faut encore préciser la notion de la „tangente“ à la „courbe“ $y = f(x)$ au point P_i. Si $f'(x_i)$ existe et est finie, on a la définition habituelle; mais, si $f'(x_i)$ existe et est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$, on appelle la droite $x = x_i$ „tangente“ à la „courbe“ au point P_i seulement dans le cas où f est *continue* au point x_i. Si l'on supprime cette condition de continuité (tout en conservant la condition de continuité au point x_0), on peut construire des exemples bizarres (voir § 4), où le cercle K^4 existe mais n'a rien de commun avec l'idée intuitive du „cercle de courbure“.

NOVÝ DŮKAZ VĚTY O ROZDĚLENÍ PRVOČÍSEL.

Vojtěch JARNÍK, Praha.

Označme znakem $\pi(x)$ počet prvočísel, která nejsou větší než x. Otázka, jak se chová funkce $\pi(x)$ pro $x \to +\infty$, patří k nejproslulejším problémům analytické theorie čísel. Abychom zkrátili vyjadřování, budeme říkati, že dvě kladné funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou „téhož řádu“, jestliže

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \limsup_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty;$$

budeme dále říkati, že funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou si asymptoticky rovny (znak $f(x) \sim g(x)$), jestliže dokonce

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Již ČEBYŠEV dokázal elementárně r. 1850, že funkce $\pi(x)$, $\dfrac{x}{\log x}$ jsou téhož řádu. Ale teprve v r. 1896 dokázali HADAMARD a de la VALLÉE-POUSSIN, že

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{1}$$

(jde ovšem o přirozený logaritmus). Ale tento důkaz nebyl již vůbec elementární: spočíval na theorii analytické funkce $\zeta(s)$; tato funkce komplexní proměnné s je definována, pokud reálná část s je větší než 1, rovnicí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.\text{[1]} \tag{2}$$

[1]) Že tato funkce souvisí s prvočísly, poznal již EULER, který pro $s > 1$ odvodil rovnici (součin se vztahuje na všechna prvočísla p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \ldots) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$