Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Langr

Čtyřmi body položiti kuželosečku podobnou dané

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 1, D73--D80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109136

LITERATURA.

Dipl. Ing. C. Herbst: Die aesthetische Kreisbogenkurve, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910.
G. D. Sandel: Zur Geometrie der Korbbögen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1937, str. 301.
K. Strubecker: Zur Geometrie der Korbbögen. Bemerkung zur Mitteilung von G. D. Sandel, 1938, str. 148.
L. Seifert: Cyklografie. JČMF, Kruh 15.

La construction des courbes ovales. On traite la construction des lignes ovales composées de deux circonférences touchant l'une l'autre et tangeant deux droites données en deux points données sous la condition que la différence des rayons est minimale ou que le rapport des rayons est le plus convenable. Dans la solution on fait l'usage seulement des moyens de la géométrie élémentaire, on n'a pas employé du calcul.

ČTYŘMI BODY POLOŽITI KUŽELOSEČKU PODOBNOU DANÉ

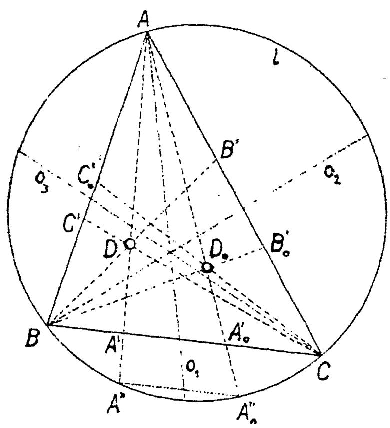
Ing. Dr JOSEF LANGR, Praha

K provedení konstrukce užito je úhlové inverse v trojúhelníku, t. j. isogonální konjugace. Tato kvadratická transformace je známa z odborné literatury. V poslední době přinesla „The mathematical gazette", roč. XXXI (1947), str. 130 článek „Isogonal conjugates" (napsali H. E. Pigott a A. Steiner), v němž autoři podrobně probírají isogonální methodu trojúhelníkovou i důsledky její, metrických vztahů vyplývajících z polohy přímky konjugované s kuželosečkou však neuvádějí a proto také nadepsanou úlohou se nezabývají. Přímo však problém tento řeší v našem Časopise, roč. 72 (1947), str. D67 p. dr Urban, užívaje k tomu jiné, snad složitější kvadratické transformace. — Isogonální konjugace je jednoduchá a umožňuje řešení i v případě, že všechny 4 dané body jsou imaginárné.

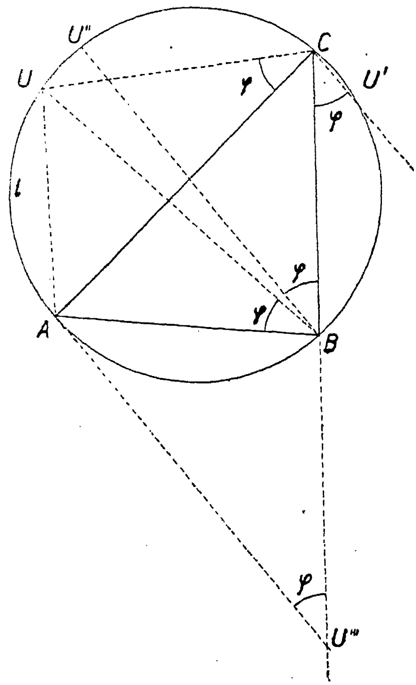
1. Pro orientaci probéřeme zde stručně a bez důkazu zásady této isogonální konjugace. Buď dán trojúhelník ABC (obr. 1) s osami o_1, o_2, o_3 úhlů α, β, γ a opsanou kružnicí l o středu O. Zvolme v trojúhelníku bod D, jehož spojnice s vrcholy A, B, C protínají protilehlé strany v bodech A', B', C'. K spojnicím těmto veďme příčky souměrně sdružené dle os o_1, o_2, o_3, jež protínají protilehlé strany v bodech A_0', B_0', C_0'. Prakticky možno určiti tyto příčky tak, že na př. průsečíkem A'' příčky AA' s l vedeme rovnoběžku s BC, jež protne l v A_0''. Spojnice $A_0''A$ protínajíc BC v A_0' je souměrně sdružena s AA' dle o_1. Příčky AA_0', BB_0', CC_0' procházejí společným bodem D_0, který je isogonálně přidružen bodu D a říkáme, *že je D_0 isogonálním obrazem bodu D*, nebo zkrátka jeho obrazem. Je zřejmé, že je-li bod D uvnitř trojúhelníka ABC, jest i D_0 uvnitř, je-li D na vnější straně, je i D_0 vně. Leží-li bod D na některé straně trojúhelníka, ztotož-

ňuje se jeho obraz s protilehlým vrcholem; je-li tedy na př. D na AB, je D_0 v C.

2. *Leží-li bod U na kružnici l ($U \neq A, B, C$), jest jeho obraz U_0 v nekonečnu.* Důkaz je snadný. Volme na l bod U (obr. 2) a položme



Obr. 1.



Obr. 2.

$\sphericalangle ACU = \varphi$. Jeho obraz musí ležeti na přímce CU' (U' je průsečík s l), jež svírá s BC rovněž úhel φ. Souměrně sdružená přímka $U''B$ (U'' její průsečík s l) s UB dle o_2 svírá s BC taktéž úhel φ, ježto je $\sphericalangle UBA = \sphericalangle UCA = \varphi = \sphericalangle U''BC$. Konečně jest $\sphericalangle UAC = \pi - \varphi - (\pi - \beta) = \sphericalangle BAU'''$ (U''' je průsečík AU''' s BC), takže z trojúhelníka ABU''' máme $\sphericalangle AU'''B = \beta - \sphericalangle BAU''' = \varphi$. Svírají tedy příčky CU', BU'' a AU''' s BC stejný úhel φ, jsou proto spolu rovnoběžné a obraz U_0 je v nekonečnu na nevlastní přímce roviny trojúhelníka ABC. *Má tedy kružnice l za svůj obraz nevlastní přímku.*

3. *Pohybuje-li se bod D_0 po přímce k_0, která neprochází žádným z vrcholů A, B, C, opisuje přiřazený bod D kuželosečku k jdoucí vrcholy A, B, C.* Že jest čára k kuželosečkou, vychází z této úvahy. Svazky paprskové $A(D_0..)$ a $B(D_0..)$ jsou spolu projektivní. Taktéž $A(D_0..)$

a $A(D..)$, jakož i $B(D_0..)$ a $B(D..)$ jsou spolu projektivní a proto i $A(D..)$ a $B(D..)$ jsou spolu projektivní a paprsky si odpovídající protínají se v bodech náležejících kuželosečce.

Že tato kuželosečka jde vrcholy A, B, C vychází z odst. 1, neboť průsečíky přímky k_0 se stranami trojúhelníka ABC jsou obrazy vrcholů A, B, C.

Kdyby přímka k_0 procházela jedním vrcholem, na př. A, pak jí odpovídá přímka, neboť všechny její body jsou přidruženy bodům ležícím na přímce jdoucí vrcholem A a souměrně sdružené s k_0 dle o_1.

4. V předešlém odstavci odvodili jsme z přímky k_0 kuželosečku k. Ovšem, že odvození má reciprokou platnost a že z kuželosečky k jdoucí vrcholy A, B, C sestrojíme isogonální cestou přímku k_0, jež je jejím obrazem.

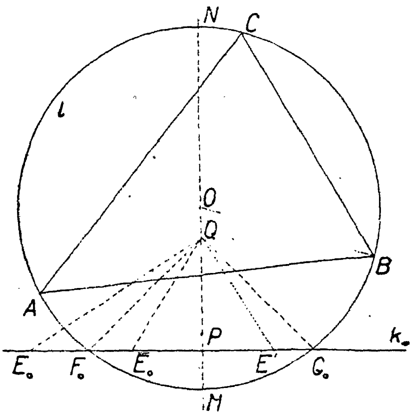
Poloha přímky k_0 vzhledem ke kružnici l nám praví, jakého druhu kuželosečka jest. Je-li k_0 sečnou kružnice, protínajíc ji v bodech F_0, G_0, pak je k hyperbolou, neboť obrazům F_0, G_0 na kružnici l přísluší dle odst. 2 body F, G v nekonečnu. Souměrně sdružené přímky k AF_0, AG_0 dle osy o_1 udávají pak směry asymptot. Je-li k_0 nesečnou kružnice l, není reálného bodu kuželosečky, který by byl v nekonečnu a k je elipsou. Je-li k_0 tečnou kružnice l, má kuželosečka nevlastní přímku za tečnu a jest parabolou.

Úběžný bod U_0 obrazu k_0 je obrazem bodu U, který dle odst. 2 leží na kružnici l, jsa vedle A, B, C čtvrtým průsečíkem křivek k, l.

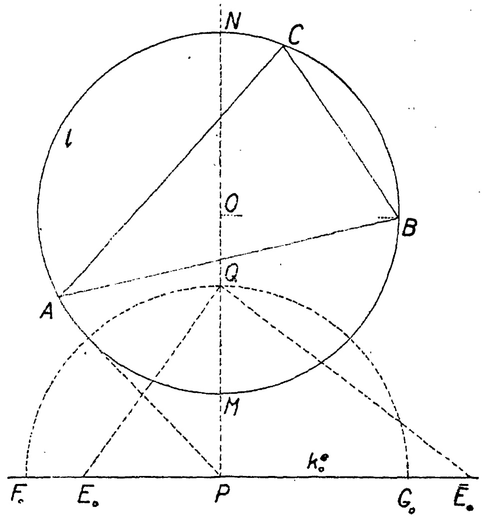
5. *Jestliže na křivce k utvoří body nějakou involuci, seskupí se jejich obrazy na k_0 v involuci stejného druhu.* Paprsky svazku o středu T ležícím na vnější straně kuželosečky protínají ji v párech bodů tvořících křivou involuci hyperbolickou. Dotykové body tečen z T ke k jsou samodružnými body této involuce. Spojíme-li průsečíky paprsků s kuželosečkou s vrcholem A a sestrojíme k spojnicím souměrně sdružené přímky dle o_1, vytnou tyto souměrné promítající paprsky na k_0 páry bodů, jež jsou vzhledem k stejným úhlům promítacích a spojovacích přímek také v hyperbolické involuci. Její samodružné body jsou obrazy dotyčných bodů tečen z T ke k vedených. Majíce tedy kuželosečku danou body A, B, C a obrazem k_0, můžeme z libovolného bodu T vésti tečny k ní bez dalších prvků kuželosečky. Spojíme zvolený bod T s vrcholy A, B; spojnice protínají kuželosečku ještě v bodech A^*, B^*. Souměrně sdružené paprsky s TA, TB protínají k_0 v A_0^*, B_0^*, takže máme na k_0 dva páry sdružených bodů určujících involuci. Její samodružné body T_0', T_0'' jsou obrazy dotykových bodů T', T'' a TT', TT'' jsou žádané tečny.

Je-li bod T v nekonečnu, jsa dán směrem přímky, postupujeme při vedení tečen obdobně. Samodružné body vzniklé involuce na k_0 jsou obrazy koncových bodů průměru, který je sdružen s daným směrem. Otáčí-li se průměr kuželosečky kol jejího středu, mění i obrazy samodružných bodů svoji polohu, tvoříce při tom novou involuci.

6. Buď dána hyperbola k body A, B, C tvořícími základní trojúhelník a svým obrazem k_0 (obr. 3), který protíná kružnici l opsanou základ. trojúhelníku v bodech F_0, G_0. Jelikož střed hyperboly je její vnější bod a lze z něho vésti k ní tečny, tvoří obrazy koncových bodů otáčejícího se průměru kol středu křivky na k_0 involuci hyperbolickou. A protože asymptoty, jdouce středem křivky, jsou jejími průměry a současně i tečnami, dotýkajícími se křivky (každá ve dvou soumezných bodech v nekonečnu), jsou body F_0, G_0 obrazy těchto dotykových bodů



Obr. 3.

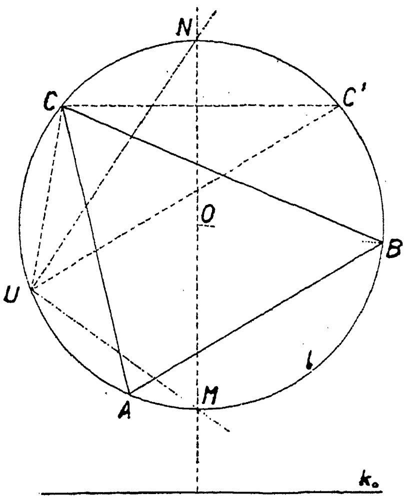


Obr. 4.

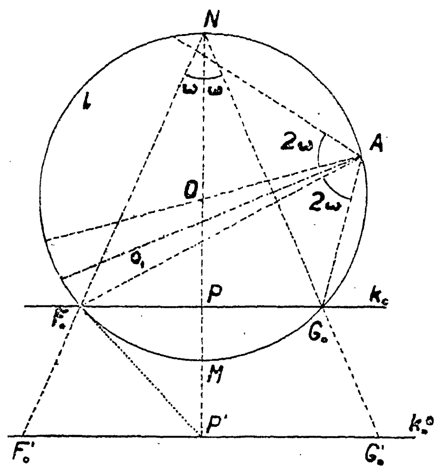
a současně i samodružnými body involuce. Její střed je bod P, půlící úsečku $\overline{F_0G_0}$. Potence její je $\overline{PF_0}^2 = \overline{F_0O}^2 - \overline{OP}^2 = r^2 - d^2$ (r je poloměr kružnice l, $d = \overline{OP}$) a Q její pomocný bod ležící na ose úsečky $\overline{F_0G_0}$, při čemž $\overline{QP} = \overline{PF_0}$. Je-li dán na př. bod E_0 jako obraz koncového bodu průměru $E\overline{E}$, určíme $\overline{E}_0$ tak, že v Q vedeme kolmici k QE_0, jež protne k_0 v E', načež přeneseme $\overline{PE'} = \overline{P\overline{E}_0}$ na druhou stranu od bodu P. Body E_0, $\overline{E}_0$ jsou sdruženy, neboť $\overline{E_0P} \,.\, \overline{\overline{E}_0P} = \overline{PF_0}^2$.

Uvažujeme-li elipsu, vzniká na k_0, jež je nesečnou kružnice l (obr. 4), involuce eliptická, poněvadž ze středu elipsy nelze k ní vésti reálné tečny. Pata P kolmice z O na k_0 je středem involuce a její potencí jest opět $r^2 - d^2$. Avšak $d > r$ protože jsou průsečíky přímky k_0 s l imaginární, a lze tedy potenci vyjádřiti délkou tečny t z P ku l, t. j. $t^2 = d^2 - r^2$. Naneseme-li proto na kolmici bodem O ke k_0 vedenou délku $\overline{PQ} = t$, obdržíme pomocný bod Q. Hledáme-li ku E_0 bod sdružený, vedeme bodem Q kolmici ku QE_0, jež protne k_0 v $\overline{E}_0$.

7. *Určení směru os kuželosečky.* Kuželosečka k buď dána body A, B, C a obrazem k_0 (obr. 5). Vyšetříme čtvrtý průsečík U kružnice l s kuželosečkou. Veďme vrcholem C rovnoběžku s k_0, jež protne l v C'. Rovnoběžka s AB vedená bodem C' dá na l bod U. Poněvadž protilehlé strany čtyrúhelníka $ABCU$ svírají s osou kuželosečky stejné úhly, jest



Obr. 5.



Obr. 6.

příčka půlící úhel CUC' rovnoběžna s jednou osou křivky. Vedeme tedy středem O kružnice l kolmici ke k_0, jež protne l v bodech M, N. Spojnice UM, UN jsou rovnoběžné s hledanými směry os kuželosečky k.

Je-li k_0 tečnou kružnice l a k tedy parabolou, sestrojíme k spojnici dotyčného bodu přímky k_0 s jedním vrcholem, na př. A, souměrně sdruženou přímku dle osy o_1; tato přímka je rovnoběžna s osou paraboly.

8. Znajíce směr os kuželosečky, můžeme na k_0 určiti *obrazy vrcholů kuželosečky.* Kuželosečka buď opět určena body A, B, C a obrazem k_0. Dle odst. 7 určeme směry os a veďme body A, B rovnoběžky s jedním směrem os. Rovnoběžky protnou k ještě v bodech A', B', jichž obrazy A_0', B_0' dle odst. 1 snadno stanovíme. Páry bodů A_0, A_0' a B_0, B_0'*) určují involuci (odst. 5) a její samodružné body jsou obrazy vrcholů V, V' kuželosečky. Rovnoběžky s druhou osou kuželosečky vedené

*) Bod A_0 (resp. B_0) je ovšem podle odst. 1. průsečík přímky k_0 se stranou základního trojúhlníka, která leží proti vrcholu A (resp. B).

vrcholy A, B dají na k_0 druhou involuci, jejíž samodružné body jsou obrazy druhých vrcholů V'', V''' kuželosečky.

9. *Určení poměru délek os kuželosečky.* Hyperbola k buď určena základním trojúhelníkem ABC a obrazem k_0, který protíná l v bodech F_0, G_0 (obr. 6). Spojnice AF_0 a AG_0 svírají spolu úhel 2ω, který je též úhlem asymptot. Příčky souměrně sdružené s AF_0, AG_0 dle osy o_1 svírají taktéž úhel 2ω a jsou rovnoběžny s asymptotami. Osa úsečky $\overline{F_0G_0}$ protíná ji v P a kružnici v bodech M, N. Jest ovšem také $\sphericalangle F_0NP = \omega$. Jsou-li a, b poloosy hyperboly, víme, že $\operatorname{tg}\omega = \frac{b}{a} = \frac{\overline{F_0P}}{\overline{NP}}$. Ježto je $\overline{F_0P}^2 = \overline{PN}\,.\,\overline{PM}$, máme $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{\overline{PN}\,.\,\overline{PM}}}{\overline{PN}} = \sqrt{\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}}}$, čili $\overline{PM} : \overline{PN} = b^2 : a^2$ *Přímka k_0 dělí tedy průměr $\overline{MN}$ k ní kolmý v poměru čtverců délek poloos hyperboly.* Opíšeme-li tedy z bodu o kružnici poloměrem $\overline{OP}$, jsou všecky její tečny obrazem kuželoseček navzájem podobných.

Je-li obraz k_0^e nesečnou kružnice l, jsou průsečíky přímky k_0^e s kružnicí l imaginární a místo nich uvažujeme, jak bylo již v odst. 6 uvedeno, body F_0', G_0'; průměr MN zůstává osou úsečky $\overline{F_0'G_0'}$; P' je jejím středem. Zůstává zase $\overline{F_0'P'} : \overline{P'N} = b : a$. Avšak $\overline{F_0'P'} = \overline{P'F_0} = \sqrt{\overline{P'N}\,.\,\overline{P'M}}$ a tedy $\overline{P'M} : \overline{P'N} = b^2 : a^2$. Dělí tudíž i při elipse přímka k_0^e kolmý k ní průměr kružnice l v poměru čtverců délek poloos elipsy.

10. Po probrání potřebných vlastností a konstrukcí přistupme k vlastní úloze. Buďtež dány body A, B, C, D v obecné poloze, jimiž chceme položiti kuželosečku podobnou dané. Zvolíme body A, B, C za vrcholy základního trojúhelníka, opíšeme mu kružnici l o středu O a sestrojíme dle odst. 1 k bodu D jeho obraz D_0. Libovolný průměr $M'N'$ kružnice l rozdělíme bodem P tak, aby $\overline{PN'} : \overline{PM'} = a^2 : b^2$. Učiníme tak tím způsobem, že bodem M' vedeme příčku svírající s $M'N'$ úhel ω, jehož $\operatorname{tg}\omega = b : a = \nu$. Tato příčka protne l v bodě F_0. Kolmice k $M'N'$ z F_0 spuštěná vytne na $M'N'$ bod P. Z O opíšeme kružnici l^ν poloměrem $\overline{OP}$. To platí pro danou hyperbolu. Byla-li však dána elipsa, vedeme v F_0 tečnu k l, jež protne $M'N'$ v P' a opíšeme kružnici l^ν z O poloměrem $\overline{OP'}$. Z bodu D_0 vedené tečny k l^ν jsou obrazy k_0 a k_0' žádaných kuželoseček. Z tečen k_0 (a k_0') sestrojíme kuželosečky k a k'. Vedeme na př. bodem C rovnoběžku s k_0, jež protne l ještě v C'. Bodem C' vedeme rovnoběžku s AB, jež vytne na l bod U (odst. 4). Máme tak již pět bodů kuželosečky a můžeme ji obvyklým způsobem sestrojiti. Užijme však i dále methody isogonální a určeme bod $\overline{U}$, jehož obrazem $\overline{U}_0$ je pata kolmice z O ku k_0 spuštěné dle odst. 1. Přímka $U\overline{U}$ je potom průměrem kuželosečky k. Bod půlící $U\overline{U}$ je tedy středem S kuželosečky. Dle odst. 7 určeme

směr os a veďme je středem kuželosečky. Dle odst. 8 pak stanovíme vrcholy.

V případě, kdy je dána parabola, ztotožní se kružnice l^ν s l, jak vysvítá i z odst. 4.

Je-li dána rovnoosá hyperbola, redukuje se l^ν na bod O a obraz určované hyperboly k_0 prochází středem O.

11. Nechť jsou dány body A, B, C a pár harmonických pólů D', D''. Hledáme kuželosečku o daném poměru délek os ν, jdoucí danými třemi body a mající body D', D'' za sdružené póly. Projektivní geometrie v tomto případě užívajíc Desarguesovy věty stanoví čtvrtý bod D kuželosečky a pokračuje se pak dle odst. 10. Bod D i jeho obraz však lze určiti také methodou isogonální. Zvolíme na přímce d jdoucí póly D', D'' dva páry sdružených bodů ${}^1D', {}^1D''$ a ${}^2D', {}^2D''$ v involuci, jejíž samodružné body jsou D', D'' a nalezneme jejich obrazy ${}^1D_0', {}^1D_0'', {}^2D_0', {}^2D_0''$ dle základního trojúhelníka ABC. Obrazem přímky d je kuželosečka d_0 a involuce bodů na d setrvává i na d_0. Spojnice ${}^1D_0'{}^1D_0''$ a ${}^2D_0'{}^2D''$ se protnou v bodě D_0. Každý paprsek jdoucí bodem D_0 protne d_0 ve dvou bodech, jež jsou obrazy páru sdruž. bodů ve zmíněné involuci na d. Prochází tedy obraz k_0 žádané kuželosečky bodem D_0. Opišme dále ze středu O, kružnice opsané trojúhelníku ABC, kružnici l^ν o poloměru odpovídajícím danému poměru ν. Tečny z D_0 ku l^ν jsou obrazy dvou výsled. kuželoseček. Další postup je jako v odst. 10.

12. Máme-li body A, B, C položiti kuželosečku o daném poměru ν délek os, dotýkající se dané tečny d, sestrojíme isogonální methodou (základní trojúhelník je ABC) kuželosečku d_0 jako obraz přímky d a ze středu O kružnice opsané trojúhelníku ABC opíšeme kružnicí l^ν, jejíž poloměr odpovídá danému poměru ν. Společné tečny kružnice l^ν a kuželosečky d_0 jsou isog. obrazy výsledných kuželoseček. Sestrojení společných tečen však obecně není řešitelno kružítkem a pravítkem. Jen ve zvláštních případech je to možné.

Leží-li na př. vrchol C na d, jsa jejím dotyčným bodem, jest d_0 opět přímkou (odst. 3) jdoucí vrcholem C a protínající AB v C_0. Sestrojíme kružnici l^ν a tečny k ní z C_0 jsou obrazy dvou výsledných kuželoseček. — Je však také možno považovati na př. AC za základní trojúhelník o nekonečně malé straně v C na tečně d. Kružnice l mu opsaná dotýká se tečny d v C a jde vrcholem A. Určíme B_0 a vedeme z něho ke kružnici l^ν soustředné s l, tečny jako v předešlých případech.

Jiný speciální případ nastane, žádáme-li parabolu. Tu kružnice l^ν, jak již bylo v odst. 10 řečeno, ztotožní se s l. Společné tečny kružnice l a kuželosečky d_0 sestrojíme, protože známe jejich společné body A, B, C.

Také při rovnoosé hyperbole vystačíme s kružítkem a pravítkem, ježto je třeba vésti ze středu O tečny k d_0, jež jsou obrazy výsledných hyperbol.

Jak postupujeme v případě, kdy dva nebo všecky čtyři dané body A, B, C, D jsou imaginární, bude probráno při příští možné příležitosti.

Construction de la conique passant par quatre points et semblable à une conique donnée. Dans cet article l'auteur résout les problémes sur les coniques à l'aide d'une transformation quadratique plane spéciale appelée *conjugation isogonale*. Il commence par étudier les propriétés métriques fondamentales de cette transformation. En choisissant convenablement le triangle fondamental de cette transformation il fait correspondre à la conique cherchée une droite, qui est directement déterminée par les données du problème. Il applique aussi sa méthode aux problèmes voisins.