# Úlohy

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 15 (1886), No. 5, 235--242

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109127

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ číslo 0 hromadným; u množiny čísel racionalních je každé číslo bez rozdílu, racionalné neb irracionalné, *hromadným*, jak patrno z definice. Na tomto posledním příkladě seznáváme, že bod hromadný nemusí náležeti množině samé, ale že také je možným případ, že body hromadné jsou zároveň prvky množiny. Má-li množina body hromadné, tvoří tyto o sobě množinu, která může sestávati z konečného neb nekonečného počtu bodů; tato množina sluje *derivací* M′ množiny původní M. Má-li M′ derivaci, znamenáme ji M″ a nazýváme druhou derivací množiny M, atd.

Buď nyní $a''$ libovolný bod množiny M″, dle definice je $a''$ hromadným bodem množiny M′, takže v každém jeho okolí nacházejí se body $a'$ množiny M′; poněvadž se v každém okolí bodu $a'$ nalezají dle definice množiny M′ body $a$ množiny M, plyne, že se v každém okolí bodu $a''$ nalezají body $a$, t. j. bod $a''$ náleží prvé derivaci; tudíž veškery prvky derivace druhé jsou zároveň prvky derivace prvé; pravíme, že M″ jest obsaženo v M′.

Každá pantachie má za derivaci kontinuum, jak z výše uvedeného příkladu čísel racionalních vysvitá.

---

## Úlohy.

### Řešení úlohy 12.

Zbavena determinantu má rovnice daná podobu

$$\cos^3 x + \sin^3 x - 3\cos x \sin x = 1,$$

kterou substitucí $\cos x + \sin x = y$ proměníme v

$$y^3 + 3y^2 - 3y - 1 = 0.$$

Kořeny rovnice této jsou:

$$y_1 = 1, \; y_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Z rovnice $\cos x + \sin x = 1$ obdržíme

$$x_1 = 2n\pi, \; x_2 = \frac{4n+1}{2}\pi;$$

z rovnice $\cos x + \sin x = -2 + \sqrt{3}$ plyne zdvojmocněním
$$\sin 2x = 6 - 4\sqrt{3} = -0{\cdot}9282032,$$
a odtud:
$$x_3 = (2n+1)\pi + 68^0 9' 32'', \quad x_4 = 2n\pi - 68^0 9' 32'';$$
kořeny rovnice $\cos x + \sin x = -2 - \sqrt{3}$ čili $\sin 2x = 6 + 4\sqrt{3}$ jsou hodnoty soujemné
$$x_5 = \frac{4n+1}{2}\pi + il\left(6 + 4\sqrt{3} + \sqrt{83 + 48\sqrt{3}}\right).$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Ant. Pleskot* z VIII. tř. a *Karel Petr* ze VI. tř. g. v Chrudimi, *Bohuslav Müller* ze VII. tř. r., *Jan Andres* a *Frant. Doležal* ze VII. tř. g. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Boh. Helebrant* z VIII. tř. akad. gymn. v Praze, *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. v Litomyšli a *J. Svoboda* z VIII. tř. v Písku.

## Řešení úlohy 13.

(Zaslal pan *V. Bartoň*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Úhlopříčny $ac$, $bd$ dělí lichoběžník $L = abcd$ v trojúhelníky
$$\triangle abo = A, \quad \triangle cdo = B, \quad \triangle bco = \triangle ado = C;$$
jelikož
$$A : C = bo : do, \quad C : B = bo : do,$$
tedy jest $C = \sqrt{AB}$, a proto
$$L = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Bohumil Helebrant* z VIII. tř. akad. gymn. v Praze, *Boh. Novák* z V. tř. g. v Táboře, *Bohumír Tomíček* ze VII. tř. g. v Jičíně, *Josef Černovský* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Josef Kábrle* ze VII. tř. g. a *Ant. Vyskočil* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Ant. Češka* ze VII. tř. r. a *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. v Litomyšli, *Bohuslav Müller* ze VII. tř. r., *Frant. Doležal* a *Jan Andres* ze VII. tř. g. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Ant. Pleskot* z VIII. tř. a *Karel Petr* ze VI. tř. g. v Chrudimi, *J. Svoboda* z VIII. tř. v Písku a *Jan Řezba* z VIII. tř. v Táboře.

## Řešení úlohy 14.

(Podal pan *Ant. Blažek,* stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

V pravidelný pětiúhelník *abcde* budiž vepsán čtverec tak, že vrcholy jeho $m, n, p, q$ leží ve stranách $ae$, $bc$, $cd$, $de$, a že jest $mn \parallel qp \parallel ab$.

Prodloužené strany $ae$, $bc$ protínají se v bodě $f$, načež přímka $df$ půlena jest stranou $ab$ v bodě $g$, protínajíc stranu $pq$ v bodě $h$ a úhlopříčnu $ec$ v bodě $i$. Z obrazce takto sestrojeného patrny jsou úměry

$$dq : de = pq : ce, \quad de : eq = df : mq,$$

ze kterých plyne znásobením souhlasných členů

$$dq : eq = df : ce$$

čili

$$dh : hi = dg : ei.$$

Rozborem tímto odůvodněno jest následující sestrojení:

Učiňme $dg \perp ab$, $dk \perp dg$, $dk = dg$; přímky $dg$, $ek$ stanoví bod $h$, jímž prochází strana žádaného čtverce $qp \parallel ab$.

Řešení zaslali pp.: *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi, *Josef Černovský* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Jan Valchář* ze VI. tř. a *Frant. Knap* z V. tř. g. v Hradci Králové.

Poznámka připojená autorem úlohy:

*Strana čtverce vepsaného v pravidelný pětiúhelník jest harmonickým průměrem výšky a polovice úhlopříčny pětiúhelníka.*

## Řešení úlohy 15.

(Podal p. *Antonín Pleskot,* stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

Poloměr kružnice o čtyrúhelník *abcd* opsané označme $r$ a položme:

$$\sphericalangle cab = \alpha, \ \sphericalangle abc = \beta, \ \sphericalangle bca = \gamma,$$
$$\sphericalangle dab = \alpha', \ \sphericalangle abd = \beta', \ \sphericalangle bda = \delta.$$

Potom jest

$$\overline{cd'} = \frac{\overline{ac} \, . \cos\gamma}{\sin\beta} = 2r\cos\gamma, \quad \overline{dc'} = \frac{\overline{ad} \, . \cos\delta}{\sin\beta'} = 2r\cos\delta,$$

a jelikož $\gamma = \delta$, tedy $\overline{cd'} = \overline{dc'}$; zároveň však jest také $\overline{cd'} \parallel \overline{dc'}$. Jsou tudíž strany čtyrúhelníka $a'b'c'd'$ stejny a rovnoběžny se stranami čtyrúhelníka *abcd*, a proto jsou oba čtyrúhelníky shodny a v poloze středově souměrné.

## Řešení úlohy 16.

(Zaslal pan *Ant. Radešinský*, stud. VII. tř. g. v Litomyšli.)

Prodloužíme-li napjaté díly provazu, až se protnou, obdržíme rovnoramenný trojúhelník, jehož vrcholu od základny $2a$ vzdálenost jest H a od osy volné kladky $h_1$. Hledaná hloubka bude

$$h = \mathrm{H} - h_1.$$

Za rovnováhy jest tětiva $t$ provazem obepjatého oblouku volné kladky

$$t = \frac{d\mathrm{Q}}{2\mathrm{P}}.$$

Z podobných trojúhelníků plynou úměry

$$\mathrm{H} : a = \frac{t}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - t^2}, \quad h_1 : \frac{d}{2} = \frac{d}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - t^2},$$

které dají

$$\mathrm{H} = \frac{at}{\sqrt{d^2 - t^2}} = \frac{a\mathrm{Q}}{\sqrt{4\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2}}, \quad h_1 = \frac{d^2}{2\sqrt{d^2 - t^2}} = \frac{d\mathrm{P}}{\sqrt{4\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2}},$$

a tudíž

$$h = \frac{a\mathrm{Q} - d\mathrm{P}}{\sqrt{4\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2}} = 1{\cdot}25\ m.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Češka* ze VII. tř. r. v Litomyšli, *Josef Černovský* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi, *Frant. Doležal*, *Jan Andres* ze VII. tř. g. a *Boh. Müller* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Josef Kábrle* a *Josef Dvořák* ze VII. tř. g. v Hradci Králové.

## Řešení úlohy 17.

(Podal pan *Josef Dvořák*, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové.)

Plove-li hustoměr ve vodě neb v kapalině o měrné váze $s_1$ neb $s_2$, bude míti, jsa ponořen, krychlový obsah potažně K, $\mathrm{K} + k_1$ neb $\mathrm{K} + k_2$. Pro rovnováhu musí býti

$$\mathrm{K} \cdot 1 = (\mathrm{K} + k_1)s_1 \quad \text{čili} \quad \mathrm{K}(1 - s_1) = k_1 s_1$$
$$\mathrm{K} \cdot 1 = (\mathrm{K} + k_2)s_2 \quad \text{„} \quad \mathrm{K}(1 - s_2) = k_2 s_2 .$$

Z podílu obou $\frac{1 - s_1}{1 - s_2} = \frac{k_1 s_1}{k_2 s_2}$ obdržíme $k_2 = \frac{s_1(1 - s_2)}{s_2(1 - s_1)} k_1$

a, má-li roura hustoměru od K až po $K + k_2$ stálý poloměr $r$, bude $k_1 = 2r^2\pi d$ a $k_2 = 2r^2\pi D$. Dosadivše, obdržíme tedy

$$D = \frac{s_1(1 - s_2)}{s_2(1 - s_1)} d = 18 \ cm.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Josef Kábrle* a *Karel Novák* ze VII. tř. g. v Hradci Králové, *Jan Andres*, *Frant. Doležal* ze VII. tř. g. a *Boh. Müller* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi a *Josef Černovský* ze VII. tř. g. v Příbrami.

## Řešení úlohy 18.

(Zaslal pan *J. Svoboda*, stud. VIII. tř. v Písku.)

Pro obsah boty M a nádoby N jest faktor zřeďovací $k = \frac{N}{M + N}$. Dle podmínky $a = k^m B$, $b = k^n B$, tedy

$$B = \sqrt[n-m]{\frac{a^n}{b^m}}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi, *Josef Černovský* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Ota Frencl* ze VII. tř. g. v Táboře, *Frant. Doležal*, *Jan Andres* ze VII. tř. g. a *Boh. Müller* ze VII. třídy r. městského r. g. na Malé Straně v Praze.

---

Správné řešení úlohy 12., 13., 16., 17. a 18. zaslal též p. *K. Ankrt*. stud. VI. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, úlohy 12. pan *Novák V.*, stud. VII. tř. g. na Novém Městě v Praze, úlohy 13., 16., 17. a 18. p. *V. Cirany*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úlohy 13., 16. a 18. p. *Fr. Schöbl*, stud. VII. tř. g. v Jindřichově Hradci a úlohy 17. pan *Ant. Radešínský*, stud. VII. tř. g. v Litomyšli.

---

## Úloha 27.

Má se vepsati do pravidelného pětiúhelníka pravoúhelník tak, aby středy jejich splývaly v jedno. Prof. *J. Sommer*.

---

## Řešení cenné úlohy v III. č. ročn. XV.

*Rozbor.* Je-li ABC daný trojúhelník a GHJK hledaný obdélník o dané úhlopříčné GJ $= u$, nazvěme stranu AB $= a$, výšku CD $= v$, délku obdélníka GH $= x$, výšku KG $= y$, i jest

$$x^2 + y^2 = u^2. \qquad (1)$$

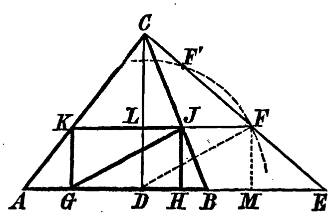
Dále jest $\quad KJ : AB = CL : CD$

čili $\quad x : a = (v - y) : v,$

z čehož

$$vx + ay = av. \qquad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) viděti, že $x$ a $y$ závisí pouze na $a$, $v$ a $u$, že tedy ve všech trojúhelnících o stejné půdici a výšce jsou obdélníky o téže úhlopříčné shodny. Poněvadž pak sestrojení obdélníka takového v trojúhelníku pravoúhlém jest velmi snadné, převede se úloha původní na tuto.




*Sestrojení.* Prodloužíme-li půdici AB o BE $=$ AD, jest DE $=$ AB, i máme pravoúhlý trojúhelník DEC o stejné výšce a půdici s daným. Opišme danou délkou $u$ jakožto poloměrem z bodu D oblouk, protínající přeponu v F (F′) a veďme FK || AE; z bodů K a J, ve kterých FK strany daného trojúhelníka protíná, spusťme kolmice na půdici, i jest GHJK hledaný obdélník.

*Důkaz.* $\quad KJ : AB = CL : CD = LF : DE.$

Poněvadž $\quad AB = DE$ (dle sestrojení),

jde z rovnosti 1. a 3. poměru také

$$KJ = LF,$$

z čehož $\quad GHJK \cong DMFL,$

tedy $\quad GJ = DF = u, \qquad$ *c. b. d.*

*Omezení.* Daná úhlopříčná $u$ musí býti patrně větší neb alespoň rovna kolmici spuštěné s D na CE, čili, jak snadně se najde

$$u \gtreqless \frac{DE \cdot CD}{CE} = \frac{av}{\sqrt{a^2+v^2}}.$$

V druhém případě jest rozřešení jen jedno, ale vždy realní. V prvním případě však jsou možna dvě rozřešení, a to tehdy, je-li $u < a$, ale zároveň také $u < v$; je-li však na př. $v < a$ (jako v našem obrazci) a zároveň $a > u > v$, bude jen jedno rozřešení realní, druhé pak imaginární (obdélník dotýkal by se sice půdice uvnitř trojúhelníka, ale druhých dvou stran teprve v jejich prodloužení); kdyby však bylo dokonce $u > a$, byla by obě rozřešení imaginární.

Podobné omezení najdeme pro případy, kdybychom za půdice vzali AC neb BC.

Celkem tedy může míti úloha tato šest rozřešení.

*Poznam.* Rozbor shora podaný vede také přímo k řešení použitím analytické geometrie, načež upozornil nás pan prof. *Jos. Novotný* z Přerova.

Rovnici (2) můžeme totiž uvésti v podobu

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{v} = 1, \qquad (2')$$

i jest to pak osový nebo-li úsekový tvar rovnice přímky. Rovnice ta, spojena s rovnicí

$$x^2 + y^2 = u^2 \qquad (1)$$

převádí nám tedy úlohu naši na vyhledání průseku kruhu s přímkou. Zvolíme-li půdici daného trojúhelníka AB za osu úseček, výšku DC za osu pořadnic, jest patrně CE přímka, vyjádřená rovnicí (2′) a oblouk FF′ část kruhu (1). —

Pan professor *Rozum* ze Smíchova zaslal nám na ukázku rozřešení téže úlohy s vyššího hlediska nové geometrie a dospěl k témuž sestrojení, jako jest shora uvedené.

---

*Pan Martin Pokorný, ředitel vyššího realného gymnasia na Malé Straně v Praze, který úlohu tuto proponoval, uznal, že tito žáci za úplně správné rozřešení dostati mají cenu:*

*Karel Novák* ze 7. tř. g. v Hradci Králové, *K. Herzán* z 5. tř. r. tamže, *A. Pařízek* ze 7. tř. česk. g. Novoměstského v Praze, *Jos. Růžička* z 8. tř. r. g. v Přerově, *Karel Prokop* ze 7. tř. česk. I. r. g. v Praze, *Karel Petr* ze 6. tř. r. g. v Chrudimi, *Ant. Radešínský* ze 7. tř. gymn. v Litomyšli, *Al. Tej-*

*nický* z českosl. obch. akad. v Praze, *J. Černovský* ze 7. tř. r. g. v Příbrami, *Fr. Schöbl* ze 7. tř. g. v Jindřichově Hradci, *Bohumír Tomíček* ze 7. tř. g. v Jičíně a *Frant. Nušl* ze 6. tř. g. v Jindřichově Hradci (pro skvělé rozřešení použitím equipollencí).

Krom toho podali ještě správné řešení: *Václ. Auersperger* z 8. tř. česk. g. Novoměstského v Praze, *Jos. Kábrle* ze 7. tř. a *Jan Valchář* ze 6. tř. g. v Hradci Králové, *Ant. Vyskočil* ze 6. tř. r. tamže, *Jos. Šmídrkal* z 8. tř. v Novém Bydžově, *Jan Andres* ze 7. tř. gymn., *Bohuslav Müller* a *Karel Rajdl* ze 7. tř. real. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze.

Konečně zaslali správné sice, ale nežádané *algebraické* řešení: *Boh. Helebrant* a *Jos. Pilař* z 8. tř. akad. gymn. v Praze, *Vlad. Novák* ze 7. tř. česk. g. Novoměstského v Praze, *Ant. Pleskot* z 8. tř. v Chrudimi, *V. Cirany* ze 7. tř. r. v Pardubicích, *K. Ryska* ze 7. tř. r. v Rakovníce a *Jan Rezba* z 8. tř. r. g. v Táboře.

---

## Sjezd professorů českých škol středních v Praze.

Ústřední spolek českých škol středních vydal provolání, z něhož vyjímáme toto:

Národ český pracoval za posledních desítiletí se vším úsilím o rozvoji svém duševním i hmotném a přičinil se všemožně o to, aby si pojistil čestné místo mezi ostatními vzdělanými národy.

Nemalé zásluhy o tento rozkvět našeho života národního získaly si zajisté i střední školy, v nichž se intelligence naše vzdělává a k šlechetným vlasteneckým snahám probouzí. Avšak čím důležitější jest úkol středních škol, tím bedlivěji sluší uvažovati mnohé otázky, zvláště ve vnitřním životě jejich, v jaké míře by dalšímu rozvoji tohoto odboru školství prospívati mohly.

Z té příčiny Ústřední spolek středních škol českých usnesl se na tom, aby svolán byl v Praze o letnicích r. 1886 obecný sjezd professorů středních škol českých, na němž by o některých důležitých potřebách školstva středního se rokovalo. S tímto sjezdem spojena bude také výstava pomůcek učebných.

Pro sjezd navržena jsou již themata.

### A. V plném shromáždění:

1. O jednotné střední škole. (Ref. p. řed. *M. Pokorný.*)
2. Jakou měrou přispěly střední školy k rozvoji literatury české? (Ref. pan *K. Tieftrunk.*)