Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 3, 172--183

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109122`

Vyloučením veličin a, b, c, z rovnic (7) a (8) pomocí m a n dá

$$n\frac{\partial z}{\partial x}+m\cos\alpha+x-x_1=0,$$
$$n\frac{\partial z}{\partial y}+m\cos\beta+y-y_1=0,$$
$$-n+m\cos\gamma+z-z_1=0,$$

z čehož konečně vyloučením veličin m a n najdeme

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}, & \cos\alpha, & x-x_1 \\ \frac{\partial z}{\partial y}, & \cos\beta, & y-y_1 \\ -1, & \cos\gamma, & z-z_1 \end{vmatrix}=0$$

co differenciální rovnici plochy točné.

O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení.

(Píše *K. Zahradník.)*

I.

V analytické geometrii rovinné rozeznáváme tři tvary rovnice přímky a sice:

$$ax+by+c=0,$$
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$
$$ux+vy+1=0.$$

První rovnici nazýváme *obecnou*, druhou *normální*, třetí konečně *úsekovou* rovnicí přímky. *)

Abychom souvislost těchto rovnic poznali, třeba ukázati, kterak jeden tvar na druhý převésti můžeme. Jsou-li všechny tři rovnice analytickými výrazy jedné přímky, nemohou se lišiti leč koefficientem společným všem členům, jímž rovnice zkrácena.

*) Co se tkne významu koefficientů v rovnici druhé a třeti, jest p délka kolmice spuštěné s počátku na přímku, α značí úhel, jejž uzavírá přímka s osou úseček, u, v jsou převratné negativní hodnoty úseků na ose x a y. O jiných tvarech rovnice přímky pro různé soustavy bude nám jednati později.

Chceme-li tedy tvar první převésti na tvar druhý, násobme první rovnici koefficientem λ, načež bude

$$\lambda a x + \lambda b y + \lambda c \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - p,$$

z čehož plyne

$$\lambda a = \cos \alpha, \ \lambda b = \sin \alpha, \ \lambda c = -p.$$

Sečteme-li zdvojmocněné první dvě rovnice, obdržíme

$$\lambda^2 (a^2 + b^2) = 1$$

z čehož plyne

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad p = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Co se tkne znaménka odmocniny, volíme je tak, aby p bylo kladné.

Rovnice přímky obecná převede se na normální tvar, dělíme-li ji $\pm\sqrt{a^2+b^2}$.

Při výskumech analytických jest velmi prospěšné za rovnici přímky klásti jediné písmenko, kteréž nám přímku a ronici přímky současně označuje, při čemž volme za rovnici přímky obecnou $A = 0$, za normální $P = 0$, za úsekovou $U = 0$, tak že bude totožně:

$$A \equiv ax + by + c = 0,$$
$$P \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$
$$U \equiv ux + vy + 1 = 0.$$

K označení více přímek upotřebíme přípon či indexů, i bude tedy všeobecně

$$P_k = 0 \equiv x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k = p_k$$

což podobně při ostatních tvarech platí. *)

Rovnice přímky svrchu vytknuté, vyvedeny jsou pro souřadnice bodové vzhledem k osám pravoúhlým. Přímku myslíme

*) Myšlenku tuto úplně provedl *J. Plücker* ve svých spisech o analytické geometrii jednajících, čímž tvůrcem se stal nové analytické geometrie a zároveň ukázal mohútnost analytické methody, která nyní o přednost s methodou synthetickou zápolí. Nový rozkvět analytické geometrie též s dalším vývojem algebry, ba vzájemnost mezi touto a onou jest tak těsná, že problemu geometrie přísluší problem algebry a naopak. Tak se vyvinula tak zvaná moderní či nová algebra. Úžasný pokrok nově geometrie či geometrie synthetické v zápětí měl rovný postup analytické geometrie v posledních 50ti letech, výskumy jedné, jsou látkou pro druhou.

si povstalou nepřetržitým pohybem určitéhc bodu aneb co geometrické místo všech bodů na té přímce ležících, jejichž nosičem ona přímka.

2. Máme-li stanovit vzdálenost d bodu $M(\xi, \eta)$ od přímky $P \equiv 0$, promítněme souřadnice bodu daného do prodloužené kolmice s počátku souřadnic na přímku P spuštěné, i obdržíme

$$\xi \cos(\xi p) + \eta \cos(\eta p) = p + d,$$

kdež jest

$$(\xi p) = \alpha, \ (\eta p) = 90^0 - \alpha,$$

aneb

$$\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha - p = d$$

z čehož plyne věta:

Výsledek substituce souřadnic bodu pevného do rovnice přímky dané podává nám vzdálenost bodu pevného od přímky dané.

Označíme-li výsledek substituce souřadnic bodu $M(\xi, \eta)$ do $P = 0$ krátce P', platí

$$d = P' = \frac{A'}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{U'}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Pro $d = 0$ vyhovují souřadnice bodu $M(\xi \eta)$ rovnici přímky, bod M jest tedy bodem přímky, leží na přímce, neb vzdálenost jeho od přímky rovná se nulle.

3. Dvě přímky stanoví bod; dané-li tedy rovnice dvou přímek

$$P_1 = 0, \ P_2 = 0,$$

známe též souřadnice bodu průsečného, jenž oběma přímkám přísluší. Třeba pouze x a y pokládati v obou rovnicích za stejné, za souřadnice bodu společného a řešením je stanoviti. Souřadnice bodu průsečného, nevyhovují pouze rovnicím

$$P_1 = 0, \ P_2 = 0,$$

uýbrž každé ze přímek, vyjádřených rovnicí

$$P_1 - \lambda P_2 = 0,$$

kde značí λ libovolný koefficient. Značí nám tedy rovnice poslední soujem přímek procházejících průsečíkem přímek $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, tedy svazek paprskový jehož vrchol jest průsečík

$$(P_1 P_2) = t.$$

Libovolné dvě přímky svazku tohoto určují nám bod t; neurčitost tuto vymýtíme, považujeme-li bod za průsečík všech jím probíhajících přímek či paprsků. Názorem tímto i ta výhoda se nám naskytuje, že můžeme bod analyticky vyjádřit rovnicí jedinou

$$P_1 - \lambda\ P_2 = 0.$$

Ke druhému významu tomuto vrátíme se při tvaru přímky $U = 0$, kde též o zákonu reciprocity nám jednati bude.

4. Ukázali jsme, že rovnice předešlá jest analytický výraz svazku paprsků. Budiž jeden taký paprsek $Q = 0$, jenž přísluší určité hodnotě $\lambda = \lambda_1$, tedy

$$P_1 - \lambda_1\ P_2 = 0 = Q_1\,; \tag{1}$$

tu nastává nám otázka, jaký jest geometrický význam činitele λ_1?

Za tou příčinou volme na přímce Q bod libovolný m. Vzdálenost jeho od přímky P_1 budiž K_1, od přímky P_2 pak K_2, takže podle věty věty ve článku 2.

$$K_1 = P'_1 = \xi \cos\alpha_1 + \eta \sin\alpha_1 - p_1\,,$$
$$K_2 = P'_2 = \xi \cos\alpha_2 + \eta \sin\alpha_2 - p_2\,,$$

jest tedy

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{P'_1}{P'_2} = \frac{\xi \cos\alpha_1 + \eta \sin\alpha_1 - p_1}{\xi \cos\alpha_2 + \eta \sin\alpha_2 - p_2}\,;$$

vedle toho rovná se pak též

$$K_1 = tm.\sin(P_1\,Q_1)\,,\quad K_2 = tm.\sin(P_2\,Q_1)$$

pročež

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{P'_1}{P'_2} = \frac{\sin(P_1\,Q_1)}{\sin(P_2\,Q_1)}\,,$$

neb

$$P'_1 - \frac{\sin(P_1\,Q_1)}{\sin(P_2\,Q_1)}\,P_2 = 0.$$

aneb přejdeme-li k označení souřadnic bodu proměnného na přímce $Q_1 = 0$ kladouce x,y místo ξ, η obdržíme:

$$P_1 - \frac{\sin(P_1\,Q_1)}{\sin(P_2\,Q_1)}\,P_2 = 0.$$

Jest tedy

$$\lambda_1 = \frac{\sin(P_1\,Q_1)}{\sin(P_2\,Q_1)} = \frac{K_1}{K_2} \tag{2}$$

čímž geometrický význam patrný.

I nazýváme λ_1 poměrem paprsků Q_1 k paprskům P_1 a P_2.*) Pro $\lambda = 0$ přejde Q_1 v paprsek P_1, pro $\lambda = \infty$ sjednotí se opět paprsek Q_1 s paprskem P_2.

Budiž $Q_2 = 0$ čtvrtý paprsek příslušný hodnotě $\lambda = \lambda_2$, tu dle obdoby obdržíme

$$P_1 - \frac{\sin(P_1 Q_2)}{\sin(P_2 Q_2)} P_2 = 0.$$

Každému paprsku přísluší tedy určitý poměr λ, jímž poloha jeho je vzhledem ku dvěma daným stanovena. Dvěma paprskům přísluší dva poměry a podíl těchto poměrů nazýváme *dvojpoměrem* dvou paprsků k dvěma základním paprskům. Jsou-li základní paprsky P_1, P_2, Q_1 pak sdružený poměrem λ_1, Q_2 poměrem λ_2, tu označuje poměr poměru $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ či dvojpoměr

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = q = \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} : \frac{\sin(P_1 Q_2)}{\sin(P_2 Q_2)};$$

symboly oněch čtyř paprsku dávají se do závorky, i jest tudíž

$$(P_1 P_2 Q_1 Q_2) = \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} : \frac{\sin(P_1 Q_2)}{\sin(P_2 Q_2)} = q \;{**} \quad (3)$$

Jestli $\lambda_1 = -\lambda_1$, tedy $q = -1$, tu liší se poměry pouze znamením a dvojpoměr se rovná -1.

Tákový svazek čtyř paprsků, jehož dvojpoměr rovná se záporné jedničce, nazýváme svazkem harmonickým na př.

$$P_1 = 0, \; P_2 = 0, \; P_1 - \lambda P_2 = 0, \; P_1 + \lambda P_2 = 0$$

značí rovnice čtyř přímek harmonických.

Dvojpoměr čtyř paprsků můžeme však i obecněji pojmouti a položiti otázku, jaký jest dvojpoměr čtyř přímek svazku t,

---

*) Porovnej Dr. *Em. Ed. Weyr* „Základové vyšší geometrie“ v Praze 1871. Nákladem Musea (Živa VIII.) pag. 12.; aneb *Ed. Weyr* „První zpráva jedn. česk. math.“ 1870. pag. 6. Prvý spis budu označovatí zkrátka *Žira*; druhý spis *Zpráva I.*

**) Jmeno „dvojpoměr svazku čtyř přímek“ *Steiner* zavedl (Systemat· Entw. pg. 7.), Symbolické označení ($P_1 P_2 Q_1 Q_2$) zavedl *Möbius* (die Theorie der Kreisverwandtschaft. Abh. der. math. phys. Classe d. k. säch. Gesellschaft der W. díl 2. p. 546). *Chasles* nazývá dvojpomě. funkcí anharmonickou. (Rapport ou fonction anharmonique). Möbius pak nazývá dvojpoměr čtyř elementů v svém („Barycentische Cacul 1827.) Ratio bisectionalis-Doppelschnittverhältnis.

daných rovnicemi

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0\,, \quad P_1 - \lambda_3 P_2 = 0\,,$$
$$P_1 - \lambda_2 P_2 = 0\,, \quad P_1 - \lambda_4 P_2 = 0\,. \tag{4}$$

Otázku tuto snadno na předcházející můžeme převésti, položíme-li

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = Q_1\,, \quad P_1 - \lambda_2 P_2 = Q_2$$

Řešením rovnic těchto dle P_1 a P_2 obdržíme

$$P_1 = \frac{\lambda_1 Q_2 - \lambda_2 Q_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,, \quad P_2 = \frac{Q_2 - Q_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,.$$

Vložíme-li hodnoty tyto za P_1 a P_2 do rovnic (4) bude

$$Q_1 = 0\,, \quad Q_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} Q_2 = 0\,,$$

$$Q_2 = 0\,, \quad Q_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} Q_2 = 0\,,$$

tedy

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = q \tag{5}$$

Tvoří-li tyto čtyry přímky svazek harmonický, jest $q = -1$, rovnice (5) pak přejde ve

$$\lambda_1 \lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0\,, \tag{6}$$

Rovnice (5) nás učí, že dvojpoměr nezávisí na poloze základních paprsků. Třeba nám tedy ještě dovoditi, že jest i neodvislý od tvaru rornice přímky.

Označíme-li $\sqrt{a_h^2 + b_h^2} = \varrho_h$, bude

$$P_1 = \frac{1}{\varrho_1} A_1\,, \quad P_2 = \frac{1}{\varrho_2} A_2$$

a rovnice (1) přejde ve

$$A_1 - \lambda_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} A_2 = 0,$$

kde ϱ_1, ϱ_2 pouze na poloze základních přímek A_1 a A_2 závisí. Rovnice jiného paprsku procházejícího průsečíkem $(A_1\, A_2)$ bude

$$A_1 - \lambda_2 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} A_2 = 0$$

a dvojpoměr

$$q = \lambda_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} : \lambda_2 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,.$$

Podobně dovoditi můžeme toto pro tvar $U = 0$, čímž hořejší věta stvrzena.

Máme-li tedy $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ rovnice dvou přímek tvaru jakéhokoliv a

$$S_1 - \lambda_1 S_2 = 0, \quad S_1 - \lambda_3 S_2 = 0,$$
$$S_1 - \lambda_2 S_2 = 0, \quad S_1 - \lambda_4 S_2 = 0,$$

co rovnice čtyr přímek průsekem $(S_1 S_2)$ probíhajících, tedy jest dvojpoměr těchto čtyr přímek vyjádřen rovnicí (5). Z toho plyne věta následující: „Dané-li dva svazky přímek

$$R_1 - \lambda R_2 = 0, \quad S_1 - \lambda S_2 = 0,$$

bude vždy dvojpoměr čtyř paprsků jednoho svazku roveň dvojpoměru čtyř příslušných paprsků svazku druhého.“ Dva svazky v také poloze nazýváme promítavými.*) I vysvítá z uvedeného, že dán-li dvojpoměr a tři paprsky, že čtvrtý paprsek jednoznačně určiti můžeme a že tři páry příslušných paprsků dva promítavé svazky úplně určují.

6. Ku dvěma přímkám možno nesčetně mnoho párů přímek harmonicky sdružených určiti. Volíme-li totiž v rovnici (6) λ_3 libovolně, tu vždy příslušný harmonický paprsek stanoviti můžeme. Otázka tato stane se určitou, hledáme-li pár přímek, jenž harmonicky dělí dva jiné páry téhož svazku.**)

Buďtež rovnice daných dvou párů přímek

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_3 P_2 = 0,$$
$$P_1 - \lambda_2 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_4 P_2 = 0,$$

a rovnice páru hledaného

$$P_1 - l_1 P_2 = 0, \quad P_1 - l_2 P_2 = 0,$$

tu dle rovnice (6) plyne:

$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$
$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0.$$

Z těchto dvou rovnic můžeme $l_1 l_2$ a $l_1 + l_2$, pojímajíce součin a součet za dvě neznámé, řešením stanoviti, při čemž

---

*) *Živa* pag. 34. *Zpráva I.* pag. 15. Ve zprávě užívá se slova trs místo svazku, což by skoro lepší bylo, kdyby více se ho užívalo; upotřebuji slova „svazek“ pouze jako více zdomácnělého. Vztah promětnosti označujeme znakem *K*. Označení „promítavý“ projektivisch *Steiner* zavedl, *Möbius* nazývá vztah tento kollinearným, *Chasles* homografickým.

**) Viz *Hesse* „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises“, Leipzig 1865. pag. 30.

obdržíme

$$l_1 + l_2 = a,$$
$$l_1 l_2 = b.$$

Tyto dvě rovnice zastupují nám rovnicí quadratickou

$$x^2 - ax + b = 0,$$

jejížto kořeny jsou hledané l_1 a l_2.

Stává tedy jednoho a to jediného párů přímek, který dva páry přímek procházejících bodem jediným harmonicky dělí.

Pár tento jest realným neb imaginárným dle toho, jsou-li kořeny rovnice quadratické reálné neb laterálné.

7. Další otázka leží na bíle dni, a sice: Existuje-li pár přímek, který by současně harmonicky odděloval tři páry přímek téhož svazku? *)

Rovnice daných párů přímek buďtež

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_3 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_5 P_2 = 0,$$
$$P_1 - \lambda_2 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_4 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_6 P_2 = 0,$$

hledaného pak párů přímek

$$P_1 - l_1 P_2 = 0,$$
$$P_1 - l_2 P_2 = 0.$$

Otázku snadno řešiti můžeme upotřebením rovnice (6). Hledaný pár nám každý z daných párů harmonicky odděluje, platí tedy:

$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$
$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0$$
$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_5 + \lambda_6) + \lambda_5 \lambda_6 = 0$$

Vyloučením $l_1 l_2$ a $l_1 + l_2$ jakožto neznámých, obdržíme hledanou podmíněnou rovnici:

$$\begin{vmatrix} 1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 \\ 1, \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_3 \lambda_4 \\ 1, \lambda_5 + \lambda_6, \lambda_5 \lambda_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

aneb ve tvaru rozvedeném

$$(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_1) = 0. \quad (9)$$

Z podmínky (8) vysvítá, že pět paprsků libovolně voliti můžeme, šestý pak že již polohou jich jest určen. I volme tedy tu zvláštní polohu paprsků, by druhý pár ve přímku jedinou

---

*) Porovnej *Zpráva II.* pg. 17. *Živa* pg. 86. *Hesse*: Vorlesungen pg. 81.

a rovněž třetí pár se sjednotil v přímku jedinou, což analyticky vyjádříme

$$\lambda_3 = \lambda_4 = l_1 , \; \lambda_5 = \lambda_6 = l_2 ,$$

načež rovnice (9) přejde v rovnici

$$l_1 l_2 - \tfrac{1}{2} (l_1 + l_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 ,$$

z čehož jde, porovnáme-li s rovnicí (6), poučka tato: Sjednotí-li se ze tří párů přímek, tvořících involuci, dva páry přímek, každý v přímku jednu, dělí třetí pár tyto dvě přímky harmonicky."* Involuci šesti paprsků můžeme rozličně vyjádřiti; všechny formy její však vyvinouti nám netřeba, poukážeme-li na častěji uvedený spis Dr. *E. Weyra* **) a na *Chasles-ův* „Apercu historique etc. ***) kdež vyvinuty jsou.

Rozličné rovnice, které nám involuci šesti paprsků stanoví nesmí podstatou se lišiti, jelikož jsou pouze různé tvary stejné podmínky, a dají se tedý přímo z jedné a to kterékoliv vyvinouti. My vyvineme ještě dva tvary, které nás bezprostředně ku snadné kanstrukci povedou.

8. Rovnice tří párů přímek téhož svazku (čl. 6.) můžeme snadno převésti na tvar

$$\begin{array}{lll} Q_1 - l_1 Q_2 = 0, & Q_1 - l_3 Q_2 = 0, & Q_1 = 0 \\ Q_1 - l_2 Q_2 = 0, & Q_1 - l_4 Q_2 = 0, & Q_2 = 0 \end{array}$$

položíme-li

$$\begin{aligned} P_1 - \lambda_5 P_2 &= Q_1 \\ P_1 - \lambda_6 P_2 &= Q_2 \end{aligned}$$

Podmínečnou rovnici involutornosti odvoditi můžeme z rovnice (9), vyměníme-li pro $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = \infty$ současně λ s příslušným l načež obdržíme

$$l_1 l_2 - l_3 l_4 = 0. \tag{10}$$

Nahradíme-li l hodnotou vyplývající z rovnice (2) obdržíme za hledanou podmínečnou rovnici involutornosti šesti přímek, označíme-li rovnice přímek páru prvého $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, druhého pak páru $S_1 = 0$, $S_2 = 0$,

$$\frac{\sin (Q_1 R_1)}{\sin (Q_2 R_1)} \cdot \frac{\sin (Q_1 R_2)}{\sin (Q_2 R_2)} - \frac{\sin (Q_1 S_1)}{\sin (Q_2 S_1)} \cdot \frac{\sin (Q_1 S_2)}{\sin (Q_2 S_2)} = 0 \tag{11}$$

---

*) *Zpráva II.* pg. 18.

**) Kapitola VIII. pg. 86.

***) Překlad od *Sohnke*, Halle 1839. Note x. pg. 318.

Záměnou páru přímek buď $R_1\,R_2$ neb $S_1\,S_2$ za $Q_1\,Q_2$ obdrželi bychom dvě jiné rovnice; neb patrno, že prvým neb druhým párem přímek stejně jako s třetím nakládati jsme mohli.

9. Ještě jeden tvar podmínečné rovnice pro involuci šesti přímek vyvinouti nám třeba, kterýž však vyžaduje k svému odvození známost jiné věty, ku které se tedy dříve obrátíme.

V čl. 3. ukázali jsme že

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$$

značí přímku procházející průsečíkem přímek $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, [λ_1 a λ_2 jsou číselné koefficienty; třebať tu jen veličinou λ_1 děliti a $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\lambda'_1$ položiti, aby se tento tvar převedl na tvar rovnice (1)]. Poznámka tato dostačí, bychom ukázali, že tři přímky se v jednom bodě protínají, platí-li rovnice

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0 \tag{12}$$

Avšak tato rovnice nic jiného nevyjadřuje, než

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \equiv -\lambda_3 P_3 .$$

Souřadnice bodu průsečného přímek P_1 a P_2 vyhovují rovnicím přímek $P_1 = 0$ a $P_2 = 0$, tedy i rovnici přímky $P_3 = 0$, musí tedy P_3 průsekem $P_1\,P_2$ procházeti, pročež platí věta: „Dané-li tři přímky $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, které se v jediném bodě protínají, můžeme vždy tři činitele λ_1, λ_2, λ_3, určiti tak, by identicky bylo

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0 .$$

10. Rovnice tří párů přímek tvořících involuci můžeme patrně vždy psáti takto:

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_2 P_2 = 0, \quad P_1 - \lambda_3 P_2 = 0,$$
$$P_1 + \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 + \lambda_2 P_2 = 0, \quad P_1 + \lambda_3 P_2 = 0,$$

neb $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ tvoří pár přímek, který dle čl. 4. každý z daných tří párů harmonicky odděluje. Rovnice těchto šesti přímek, tvořících involuci, jsou lineárně složeny ze symbolů přímek P_1 a P_2.*) Místo dvou symbolů můžeme též třech upotřebiti totiž Q_1, Q_2, Q_3, kladouce

$$Q_1 = (\lambda_2 - \lambda_3)(P_1 - \lambda_1 P_2),$$
$$Q_2 = (\lambda_3 - \lambda_1)(P_1 - \lambda_2 P_2),$$
$$Q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)(P_1 - \lambda_3 P_2).$$

*) Viz *Hesse:* Vorlesungen pag 33.

I bude tedy součet identicky

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 \equiv 0.$$

Za touto podmínkou probíhají dle rovnice (12) bodem jediným. Z rovnic pro Q_1 a Q_2 můžeme si P_1 a P_2 vyjadřiti Q_1 a Q_2 a vložíme-li hodnoty tyto do rovnice

$$P_1 + \lambda_3 P_2 = 0,$$

obdržíme po krátké redukci*)

$$P_1 + \lambda_3 P_2 = \frac{Q_2}{\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1}} - \frac{Q_1}{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}} = 0 \tag{13}$$

Podobně vložíme P_1 a P_2 stanovené z rovnic pro Q_2 a Q_3 do rovnice

$$P_1 + \lambda_1 P_2 = 0$$

a z rovnic Q_3 a Q_1 stanovené P_1 a P_2 do rovnice

$$P_1 + \lambda_2 P_2 = 0.$$

Výsledky tyto obdržíme též pouhou cyklickou záměnou přípon při λ, a Q. Zavedeme-li označení

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} = l_1 \quad \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} = l_2 \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = l_3$$

přejdou vzhledem ku rovnici (13) rovnice daných tří párů přímek téhož svazku ve

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0,$$

$$\frac{Q_3}{l_3} - \frac{Q_2}{l_2} = 0, \quad \frac{Q_1}{l_1} - \frac{Q_3}{l_3} = 0, \quad \frac{Q_2}{l_2} - \frac{Q_1}{l_1} = 0,$$

ve kterých veličiny l po rovnu libovolné jsou veličinám λ, z nichž jsou složeny.

---

*) K vůli stručnosti třeba $\lambda_1 - \lambda_2 = a_{12}$, $\lambda_2 - \lambda_3 = a_{23}$, $\lambda_3 - \lambda_1 = a_{31}$ položiti načež obdržíme

$$P_1 = \frac{\lambda_1 a_{23} Q_2 - \lambda_2 a_{31} Q_1}{a_{12} a_{23} a_{31}},$$

$$P_2 = \frac{a_{23} Q_2 - a_{31} Q_1}{a_{12} a_{23} a_{31}};$$

násobíme-li λ_3 druhou rovnici a sečteme-li obdržíme:

$$P_1 + \lambda_3 P_2 = \frac{Q_2 (\lambda_1 + \lambda_3)}{a_{12} a_{31}} - \frac{Q_1 (\lambda_2 + \lambda_3)}{a_{12} a_{23}} = 0.$$

Společným činitelem a_{12} můžeme krátiti, a nahradíme-li hodnoty za a_{31} a a_{23}, obdržíme svrchu uvedenou rovnici.

Označíme-li přímku $\frac{Q_3}{l_3} - \frac{Q_2}{l_2} = 0 = S_1$ a podobně ostatní dvě cyklickou záměnou, a přihlížíme-li k rovnici (2) obdržíme

$$\frac{l_3}{l_2} = \frac{\sin(Q_3 S_1)}{\sin(Q_2 S_1)},$$
$$\frac{l_1}{l_3} = \frac{\sin(Q_1 S_2)}{\sin(Q_3 S_2)},$$
$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\sin(Q_2 S_3)}{\sin(Q_1 S_3)}.$$

Součin těchto tří rovnic podává nám geometrickou podminečnou rovnici pro involuci šesti přímek a sice

$$\lambda = \frac{\sin(Q_3 S_1) \sin(Q_2 S_2) \sin(Q_1 S_3)}{\sin(Q_2 S_1) \sin(Q_1 S_2) \sin(Q_2 S_3)}.$$

Jak již dříve obecně podotknuto, dá se tato rovnice též z rovnice (11) přímo vyvinouti, neb značí nám jednu a tutéž podmínku. Záměnou Q_1 s S_1 neb Q_2 s S_2 neb Q_3 s S_3 obdržíme tři nové rovnice pro tutéž podmínku. *)

(Dokončení).

Křivky cissoidalné.

(Podává *K. Zahradník*).

Dána budiž libovolná kuželosečka K a přímka P (obr. 10.); na kuželosečce volme libovolný bod o za vrchol svazku paprskového a za střed souřadnic. Q budiž paprsek tohoto svazku; i protíná nám kuželosečku K v jediném bodě m_2 $(x_2 y_2)$, mimo vrchol o a přímku P v bodě m_1 $(x_1 y_1)$. Naneseme-li tětivu $\overline{om_2}$ od bodu m_2 na paprsku Q směrem k o bude $\overline{om_2} = \overline{m_3 m_1}$ čímž obdržíme bod m_3 $(x_3 y_3)$. Každému paprsku Q přisluší určitý jediný bod m_3 a geometrické místo všech bodů m_3 uvedeným zákonem vytvořených jest křivka stupně třetího, již z obdoby vytvoření křivkou cissoidalnou jmenovati chceme.

---

* Porovnej *Živa* pg. 87.