*Pól příslušný jednomu ze samodružných bodů involuční řady a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 ... stotožňuje se s druhým jejím samodružným bodem.**)

Tyto samodružné body m_{12}, n_{12} dělí přímku P ve dvě části. Toliko pólům ležícím v oné části, na níž připadá bod a_1 náleží reálná družina harmonických středů 2. stupně.

Harmonický střed 1. stupně jest však vždy reálný a připadá pro póly reálné do části právě uvedené, pro póly však sdruženě imaginárné, tvořící družiny involuce a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 ... padá do druhé části přímky P.

Strojení středu křivosti křivek methodou analyticko-deskriptivní.

Dr. Ant. Pleskot, professor v Plzni.

Konstrukce středu křivosti křivek užitím methody ryze deskriptivní uvedeny jsou ve spise Machovcově „Zobrazování tečen a středu křivosti křivek na základě nové methody." V článku tomto užijeme jak geometrie deskriptivní tak i analytické; dospějeme tím k jednoduchým konstrukcím středu křivosti důležitějších křivek jakož i k důkazu některých geometrických vět týkajících se středu křivosti křivek.

Normály křivky rovinné možno považovati za pravoúhlé průměty do roviny křivky površek jisté přímočáré plochy, jejíž řídící rovinou jest rovina křivky. Podél površky dotýká se plochy té hyperbolický paraboloid o téže řídící rovině, za jehož dvě povrchové přímky soustavy druhé možno voliti kterékoli dvě tečny přímočáré plochy vedené ve dvou libovolných bodech A a B površky. I možno za pravoúhlé průměty těchto dvou tečen vzíti dvě libovolné přímky v rovině řídící, jež procházejí průměty A_1 a B_1 bodů A a B; na jedné z těchto přímek možno stopník příslušné tečny voliti docela libovolně, kdežto stopník tečny druhé jest volbou prvého stanoven.

---

*) V případě všech reálných bodů základních byly tyto samodružné body imaginárné.

Volíme-li dále tečny tyto tak, že jejich průměty jsou spolu rovnoběžny, pak průsečík průmětu povrchové přímky, t. j. normály rovinné křivky, se spojnicí stopníků obou tečen stanoví průmět dotyčného bodu tečné roviny kolmé na řídící rovinu t. j. průsečík dvou soumezných normál dané křivky, čili střed křivosti křivky rovinné.

Volme dvě libovolné přímky a_1 a b_1 v rovině křivky za průměty pravoúhlé dvou přímek a a b druhé soustavy paraboloidu o řídící rovině křivky, kdežto normálu n_1, na níž střed křivosti jest stanoviti považujme za pravoúhlý průmět povrchové přímky n prvé soustavy.

Za přímky a_1 a b_1 možno voliti dvě docela libovolné přímky; volme za ně ku př. osy X a Y, k nimž rovnice křivky jest vztažena.

Normála n_1, jakožto průmět površky n nechť protíná osu X v bodě A_1, osu Y v bodě B_1, kteréžto body jsou průměty bodů A a B površky n. Úseky OA_1 a OB_1, jež vymezuje normála na osách označme u a v, při čemž O značí průsečík os X a Y. Volíme-li kolmici v O na rovinu křivky vztyčenou za osu Z, pak přímky a a b padnou do rovin ZX a ZY. Površka n protne tedy rovinu XZ v bodě A a rovinu YZ v bodě B. I jest nyní body A a B proložiti v rovině XZ a YZ dvě přímky a, b, aby soumezná površka n' k površce n promítala se do soumezné normály n'_1 k normále n_1.

Je-li úsečka stopy A' přímky a na ose X U, tedy $OA' = U$, a úsečka stopy B' přímky b na ose Y V, tedy $OB' = V$, a je-li mimo to odlehlost površky n od průmětny z, pak platí:

$$z = (u - U)\, tg\, \gamma,$$
$$z = (v - V)\, tg\, \delta,$$

značí-li γ a δ sklony přímek a a b k průmětně; platí tedy:

$$\frac{U - u}{V - v} = \frac{tg\, \delta}{tg\, \gamma}.$$

Sousední normála n'_1 k normále n_1 utíná na osách úseky $u + du$, $v + dv$; má-li tedy n'_1 býti průmětem sousední površky

u' vzdálené od průmětny $o\ z + dz$, musí platiti:

$$dz = du\ tg\ \gamma, \quad dz = dv\ tg\ \delta,$$

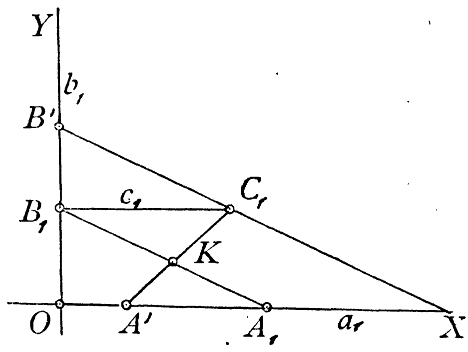
t. j.

$$\frac{tg\ \delta}{tg\ \gamma} = \frac{du}{dv}.$$

Srovnáním s rovnicí hořejší obdržíme vztah:

$$V - v = (U - u)\frac{dv}{du}; \tag{1}$$

Rovnice tato vyjadřuje zavislost, jaká musí platiti mezi vzdáleností U od počátku O stopy přímky a, a vzdáleností V stopy přímky b od téhož počátku. Jedna z těchto vzdáleností může volena býti libovolně a druhá jest rovnicí (1) stanovena.



Obr. 1.

Stanovíme-li (obr. 1.) v jednom z bodů A a B ku př. v bodu B tečnou rovinu ku paraboloidu, pak stopa této roviny jest přímka jdoucí bodem B' rovnoběžně s normálou A_1B_1. Vedeme-li v této tečné rovině bodem B přímku c, takže průmět její c_1 jest rovnoběžný s osou X, pak průsečík C_1 této přímky se stopou tečné roviny udává stopník přímky c. Paraboloid, jehož řídící rovina jest průmětna a jehož površky druhé soustavy jsou přímky a a c, dotýká se podél celé površky předchozího a poněvadž průměty a_1 a c_1 přímek a a c jsou rovnoběžné, stanoví průsečík stopné přímky $A'C_1$ s normálou A_1B_1 střed křivosti K. Volíme-li ku př.

$$U = O,$$

t. j. stopník A' přímky a v počátku os, pak z rovnice (1) plyne pro V hodnota:

$$V - v = - u \frac{dv}{du}.$$

Délka úsečky $B_1 C_1 = X$, určí se z rovnice;

$$V - v = \frac{v}{u} X,$$

takže.

$$X = - \frac{u^2}{v} \frac{dv}{du}. \tag{2}$$

Je-li tedy sestrojiti střed křivosti na normále $A_1 B_1$, vedeme bodem B_1 kolmici na osu Y a na tu naneseme od bodu B_1 algebraicky délku

$$- \frac{u^2}{v} \frac{dv}{du};$$

koncový bod C_1 této délky spojme s počátkem souřadnic a spojnice tato protne normálu v bodě, který jest středem křivosti. Kdybychom položili v rovnici (1) $V = O$ a za paraboloid volili ten, jehož řídící površka druhé soustavy jdoucí bodem A měla by za průmět přímku rovnoběžnou s osou Y, dospěli bychom ke konstrukci této:

V bodě A_1 vztyčme na osu X kolmici a nanesme na ni od bodu A_1 délku

$$Y = - \frac{v^2}{u} \frac{du}{dv}; \tag{3}$$

koncový bod D_1 této délky spojme s počátkem a tu přímka OD_1 protíná normálu ve středu křivosti.

Jiné konstrukce středu křivosti obdržíme dle toho, jak volíme U neb V; ty volíme, aby konstrukce vypadla jednoduchou, dle toho jaký jest tvar výrazu $\frac{dv}{du}$. Applikujme výsledky předchozí na některé druhy křivek.

Střed křivosti centrálních kuželoseček.

Budiž dána centrální kuželosečka:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

která značí pro kladné b^2 ellipsu, pro záporné hyperbolu, je-li a^2 kladné; konstrukce středu křivosti pro oba druhy křivek bude táž, jak hned ukážeme.

Rovnice normály kuželosečky v bodě P (x, y) zní:

$$Y-y=\frac{a^2y}{b^2x}(X-x);$$

úseky u a v normály na osách X a Y jsou:

$$u=\frac{x\,(a^2-b^2)}{a^2},$$

$$v=\frac{y\,(b^2-a^2)}{b^2},$$

a proto

$$\frac{du}{dv}=-\frac{dx}{dy}\frac{b^2}{a^2}=\frac{y}{x}.$$

Rovnice (1) přejde v jednoduchou rovnici:

$$V-v=\frac{x}{y}(U-u). \qquad (1')$$

Volme stopu A' přímky a tak, že padne do průsečíku tečny bodu P s osou X, t. j. položme

$$U=\frac{a^2}{x},$$

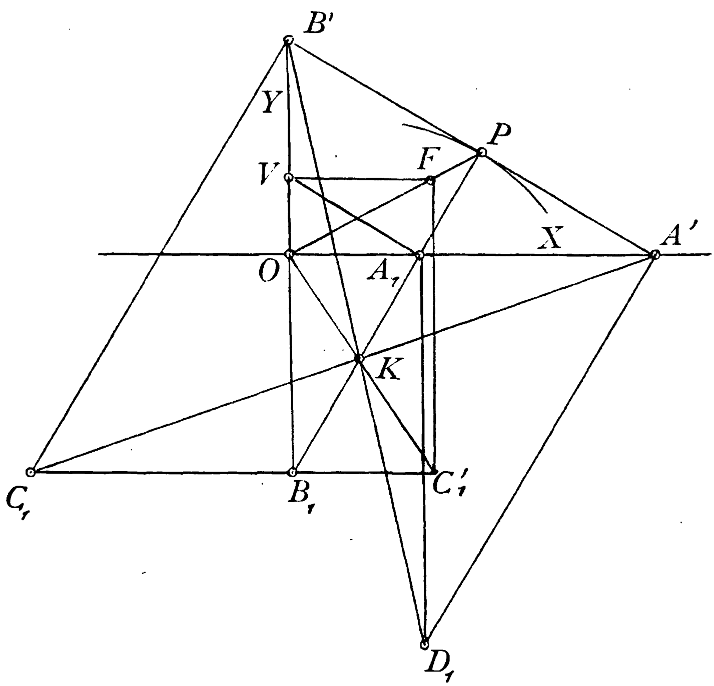
pak z rovnice (1') vypočteme

$$V=\frac{b^2}{y},$$

t. j. stopa B' površky b padne do průsečíku tečny s osou Y.

Poněvadž v tomto případě tečna, jakožto spojnice stopníků površek a a b jest jednou z povrchových přímek paraboloidu, dospíváme ku větě Steinerově: Tečna, normála a osy kuželosečky jsou tečnami paraboly a bod dotyku na normále, jakožto tečně paraboly, jest středem křivosti kuželosečky.

Bez užití věty Brianchonovy strojíme střed křivosti tak, že pro paraboloid dotykový volíme místo řídící površky b přímku c jdoucí bodem B, jejíž průmět c_1 jest rovnoběžný s osou X; stopník její C_1 jest na stopě tečné roviny v bodě B ku paraboloidu vedené t. j. na přímce jdoucí bodem B' rovnoběžně



Obr. 2.

s normálou křivky. Tím dospějeme k této jednoduché konstrukci: Normála v bodě P nechť protne osu Y v bodě B_1, tečna v bodě B'. Vedeme-li bodem B' rovnoběžku s normálou a vztyčíme-li v bodě B_1 kolmici na osu Y, pak tyto dvě přímky stanoví průsečík C_1.

Spojíme-li bod A', průsečík to tečny s osou X, s bodem C_1, pak protne přímka $A'C_1$ normálu ve středu křivosti K.

Druhá konstrukce plynoucí z toho, že za paraboloid volíme ten, jehož řídící přímky mají průměty rovnoběžné s osou Y, jest tato: Bodem A' veďme rovnoběžku s normálou a stanovme průsečík její D_1 s kolmicí na X jdoucí bodem A_1, průsečíkem to normály s osou X. Spojnice $B'D_1$ protne normálu ve středu křivosti K.

Jinou, poněkud složitější konstrukci obdržíme dle vzorce (2). Bodem A_1 veďme rovnoběžku s tečnou, která protne osu Y v bodě V; bodem V vedená rovnoběžka s osou X protne spojnici OP v bodě F. Čtvrtý vrchol C'_1 rovnoběžníka $B_1VFC'_1$ spojen se středem O stanoví přímku, jež protíná normálu ve středu křivosti K; jest totiž

$$X = B_1C'_1 = -\frac{u^2}{v}\frac{dv}{du} = -\frac{u^2}{v}\frac{x}{y}.$$

Křivky Cassiniho.

Rovnice těchto křivek zní:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - b^4 = 0.$$

Z rovnice této vypočteme:

$$u = \frac{2a^2x}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad v = -\frac{2a^2y}{x^2 + y^2 - a^2},$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{x}{y}\frac{(x^2 + y^2 + a^2)^2}{(x^2 + y^2 - a^2)^2};$$

poněvadž

$$\frac{u}{v} = -\frac{x}{y}\frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 + y^2 + a^2},$$

obdržíme pro $\frac{dv}{du}$ jednoduchý výraz:

$$\frac{dv}{du} = \frac{v^2}{u^2}\frac{x^3}{y^3}.$$

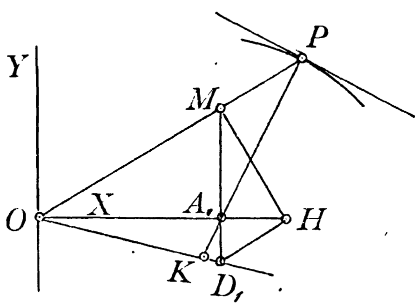
Dle rovnice (3) sestrojíme střed křivosti tak, že v průsečíku A_1 normály s osou X vztyčíme na osu X kolmici a na tu naneseme délku

$$Y = -\frac{v^2}{u}\frac{du}{dv} = -u\left(\frac{y}{x}\right)^3$$

a koncový bod D_1 této délky spojen s počátkem, protíná normálu ve středu křivosti. Je-li tedy v obr. 3. dotyčný bod křivky P, průsečík normály s osou X, A_1, pak v bodu A_1 vztyčme kolmici na osu X, která protne průvodič OP v bodě M. Kolmice v bodě M na OM vztyčená protne osu X v bodě H a kolmice v H na MH vztyčena přímku A_1M v bodě D_1. Přímka OD_1 protne normálu ve středu křivosti K, neboť

$$A_1D_1 = -u\, tg^3\omega, \text{ značí-li}$$

$$tg\,\omega = \frac{y}{x}.$$



Obr. 3.

Stejně jednoduchou konstrukci obdrželi bychom, kdybychom použili vzorce (2).

Konstrukce středu křivosti parabol a hyperbol stupňů vyšších.

Budiž dána křivka:

$$y = cx^k,$$

která značí buď parabolu neb hyperbolu stupně vyššího, dle toho, jaká jest hodnota veličiny k.

Abychom měli možnost volby jednoduché konstrukce středu křivosti, stanovme úseky, které tvoří normála na dvou přímkách X_1 a Y_1 libovolným bodem $S(a, b)$ rovnoběžně s osami X a Y vedených. Úseky normály na těchto přímkách označme opět u a v a to u na přímce X_1 rovnoběžné s osou X a v na přímce Y_1 rovnoběžné s osou Y; úseky tyto buďtež počítány od bodu S.

Poněvadž

$$y' = kcx^{k-1} = k\frac{y}{x},$$

jest rovnice normály v bodě $P(x, y)$:

$$Y - y = -\frac{x}{ky}(X - x);$$

z ní určíme:

$$u = \frac{-k(by - y^2) + x^2}{x} - a,$$

$$v = \frac{ky^2 - ax + x^2}{ky} - b,$$

a tedy

$$\frac{du}{dx} = \frac{kby\,(1-k) + ky^2\,(2k-1) + x^2}{x^2},$$

$$\frac{dv}{dx} = k\frac{y}{x} + \frac{a\,(k-1)}{ky} + \frac{x\,(2-k)}{ky}.$$

Uvážíme-li, že

$$\frac{u}{v} = \frac{ky}{x},$$

tedy

$$k = \frac{xu}{yv},$$

pak možno předchozí rovnice pro $\frac{du}{dx}$ a $\frac{dv}{dx}$ psáti ve tvaru:

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{2u^2}{v^2} - \frac{y}{x}\frac{u}{v} + \frac{ub}{vx} - \frac{u^2b}{v^2y},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{u}{v} - \frac{av}{ux} + \frac{2v}{u} + \frac{a}{y} - \frac{x}{y}.$$

Poněvadž a i b jsou libovolny, volme je tak, aby hodnoty $\frac{du}{dx}$ a $\frac{dv}{dx}$ staly se jednoduchými; to lze ku př. dosíci, položíme-li

$$a = 2x, \quad b = 2y;$$

pak

$$\frac{dv}{dx} = \frac{u}{v} + \frac{x}{y} = \frac{uy + vx}{vy},$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{uy}{vx} = \frac{vx + uy}{vx}$$

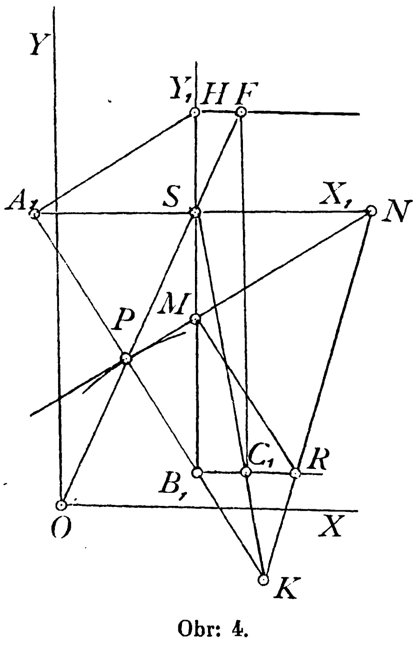
a tedy

$$\frac{dv}{du} = \frac{x}{y}.$$

Střed křivosti sestrojíme opět dle rovnice (2); jest v tomto případě

$$X_1 = -\frac{u^2}{v}\frac{dv}{du} = -\frac{u^2}{v}\frac{x}{y};$$

při tom ovšem X_1 vztaženo jest na osy jdoucí bodem $S(2x, 2y)$,



Obr: 4.

t. j. bodem souměrným s počátkem dle dotyčného bodu P křivky dané. Konstrukce středu křivosti jest tedy tato:

Bodem S souměrným k počátku O (obr. 4.) hledíc k dotyčnému bodu P křivky, veďme rovnoběžky X_1, Y_1 k osám X a Y; ty protnou normálu v bodech A_1 a B_1; bodem A_1 veďme rovnoběžku s tečnou, která protne osu Y_1 v bodě H. Bodem H veďme rovnoběžku k ose X a označme průsečík její s přímkou OS, F; pak vrchol C_1 rovnoběžníka B_1HFC_1 spojen s bodem S, stanoví přímku, jež protíná normálu ve středu křivosti K.

Výraz pro $\frac{dv}{du}$ podává nám důležitý vztah o oskulaci křivky

$$y = Cx^k$$

s jistou centrální kuželosečkou.

Platí totiž opět o vzdálenostech U a V stop řídících přímek a a b paraboloidu, vedených nyní v rovinách X_1Z_1 a Y_1Z_1 rovnice:

$$V - v = (U - u)\,\frac{x}{y},$$

kdež x a y značí souřadnice dotyčného bodu P hledíc k soustavě (X, Y), kdežto u, v, U, V jsou vztaženy k osám X_1 a Y_1.

Představíme-li si kuželosečku, jejíž osy procházejíce bodem S jsou rovnoběžny k osám X a Y a jejíž tečna i s bodem dotyčným shoduje se s tečnou a bodem dotyčným P křivky $y = Cx^k$, pak platí dle rovnice (1'), na str. 5. uvedené. mezi vzdálenostmi úseků U a V na X_1 a Y_1 opět rovnice:

$$V - v = (U - u)\,\frac{x_1}{y_1},$$

značí-li x_1, y_1 souřadnice bodu P vzhledem k osám X_1 a Y_1.

Poněvadž však:

$$x_1 = -x,$$
$$y_1 = -y,$$

a tedy

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1},$$

stávají se poslední dvě rovnice, určující vztah mezi U a V totožnými a tím dospíváme ku větě:

Křivka

$$y = Cx^k,$$

v bodě P oskuluje s kuželosečkou, jejíž střed je souměrný s počátkem O hledíc k bodu P a jejíž osy jsou rovnoběžny s osami X a Y; poněvadž pro kuželosečku platí věta Steinerova, dostáváme větu další.

Tečna, normála v libovolném bodě P křivky

$$y = Cx^k$$

a přímky rovnoběžné s osami X a Y procházející bodem souměrným s počátkem souřadnic hledíc k dotyčnému bodu P obalují parabolu a dotyčný bod na normále jakožto tečně paraboly jest středem křivosti pro bod P. Tím konstrukce středu křivosti parabol a hyperbol vyšších stupňů převedena na strojení středu křivosti centrální kuželosečky a může jednodušeji než dříve provedena býti. Tečna nechť protíná osu X_1 v bodě N, osu Y_1 v bodě M; bodem M veďme rovnoběžku s normálou, která protne bodem B_1 vedenou rovnoběžku s osou X_1 v bodě R. Přímka NR protne normálu ve středu křivosti K.

Věta, kterou jsme podali, jest podobná větě, kterou uveřejnil Fr. Machovec v Zasedacích zprávách Královské Společnosti Nauk ročníku 1885; věta Machovcova zní: Tečna, normála a rovnoběžky s osami X a Y vedené body, kde tečna osy protíná, obalují parabolu a dotyčný bod na normále jest středem zakřivení pro bod křivky. Větu tuto bychom také z naší úvahy odvoditi mohli, kdybychom za souřadnice a a b položili jednak úsečku a jednak pořadnici bodů, v kterých tečna osy křivky protíná.

Větu hořejší vyvinuli jsme pro souřadnice pravoúhlé.

Je-li rovnice křivky

$$y = Cx^k$$

vztažena na soustavu kosoúhlou, platí věta obdobná. Pokládáme-li osu X za osu affinity a přiřadíme-li přímkám rovnoběžným s osou Y kolmice na osu affinity, přejde křivka předchozí v křivku, jejíž rovnice v soustavě nyní pravoúhlé bude opět téhož tvaru, t. j.

$$\eta = C_1 \xi^k.$$

K této křivce patří kuželosečka, která s ní oskuluje majíc za střed svůj souměrný bod s počátkem hledíc k bodu dotyčnému a za osy rovnoběžky s osami ξ, η; sestrojíme-li k této kuželosečce zpětnou affinitou příslušnou kuželosečku, bude tato míti za svůj střed bod souměrný s počátkem hledíc k dotyčnému křivky původní a za sdružené průměry rovnoběžky s osami X a Y; poněvadž pak affinní transformací oskulace zůstává v platnosti, dospíváme tím ku větě:

Křivky o rovnici:

$$y = Cx^k$$

v soustavě jakékoli oskulují v daném bodě P s kuželosečkou, jejíž střed jest bodem souměrným k počátku hledíc k bodu dotyčnému a která má za sdružené průměry rovnoběžky s osami X a Y.

Poněvadž dále známa jest věta, že tečna, normála kuželosečky a kolmice s libovolného bodu A tečny na sdružený průměr ku OA (střed kuželosečky) spuštěné obalují parabolu, k nimž tedy patří i osy kuželosečky, můžeme vysloviti větu:

Vedeme-li bodem souměrným s počátkem, hledíc k bodu dotyčnému P křivky $y = Cx^k$ rovnoběžky X_1, Y_1 k osám X a Y, pak normála, tečna křivky a kolmice spuštěné na osy Y a X s bodů, kde tečna přímky X_1 a Y_1 protíná, obalují parabolu a dotyčný bod na normále jakožto tečně paraboly jest středem křivosti pro bod P.

Konstrukce veličiny ϱ'',

Jedním z nejdůležitějších výrazu při vyšetřování křivosti křivek daných v soustavě polární rovnicí:

$$\varrho = f(\varphi),$$

jest výraz

$$\varrho'' = \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2}.$$

Ukážeme, jak methody hořejší možno použíti, aby, dán-li střed křivosti, mohla se narýsovati délka ϱ'', a naopak jak určí se střed křivosti, je-li ϱ'' dáno; znajíce řešení těchto úloh, snadno narýsujeme středy křivosti křivek z dané křivky odvozených, ku př. konchoid, cissoid atd.

Přímku směrem od pólu k bodu A_1 křivky, v němž křivost vyšetřujeme, volme za kladnou osu polární a stotožněme ji s osou X, přímka pólem O na osu X kolmo vedená budiž osou Y. V této polární soustavě rovnic křivky zní:

$$\varrho = f(\varphi),$$

a pro bod A_1 jest $\varphi = 0$.

Položíme-li

$$x = \varrho \cos \varphi,$$
$$y = \varrho \sin \varphi,$$

tu rovnice normály v bodě křivky hledíc k osám X a Y zní:

$$Y - \varrho \sin \varphi = - \frac{\varrho' \cos \varphi - \varrho \sin \varphi}{\varrho' \sin \varphi + \varrho \cos \varphi} (X - \varrho \cos \varphi),$$

z níž úseky u a v na osách plynou:

$$u = \varrho \cos \varphi + \varrho \sin \varphi \frac{\varrho' \sin \varphi + \varrho \cos \varphi}{\varrho' \cos \varphi - \varrho \sin \varphi},$$

$$v = \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \frac{\varrho' \cos \varphi - \varrho \sin \varphi}{\varrho' \sin \varphi + \varrho \cos \varphi}.$$

Stanovíme-li nyní hodnotu $\frac{dv}{du}$ a položíme-li pro $\varphi = 0$

$$\varrho = u, \quad \varrho' = v,$$

tu obdržíme:

$$dv = \frac{\varrho\varrho'' - \varrho'^2}{\varrho} d\varphi,$$

$$du = \frac{\varrho^2 + \varrho'^2}{\varrho'} d\varphi,$$

takže

$$\frac{dv}{du} = \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\varrho\varrho'' - \varrho'^2}{\varrho^2 + \varrho'^2}, \text{ t. j.}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} \frac{u\varrho'' - v^2}{u^2 + v^2}.$$

Příslušná rovnice pro vzdálenosti $OA' = U$ a $OB' = V$ stop řídících přímek paraboloidu od počátku jest:

$$V - v = \frac{v}{u} \frac{u\varrho'' - v^2}{u^2 + v^2} (U - u); \qquad (1'')$$

Volme v této rovnici

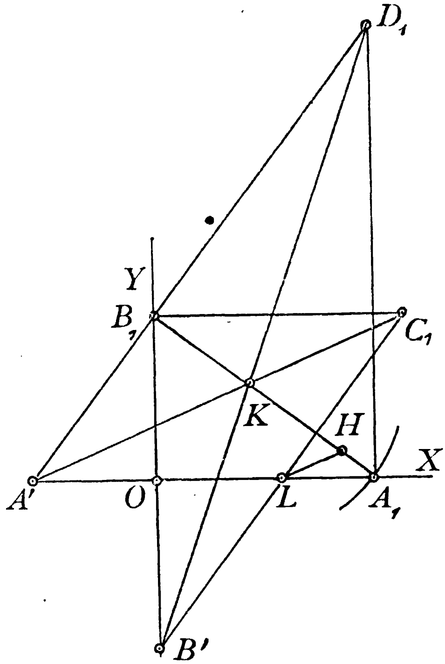
$$U = -\frac{v^2}{u},$$

pak

$$V - v = -\frac{v}{u^2} (u\varrho'' - v^2).$$

Bodem $B'(O, V)$ vedená rovnoběžka k normále jest stopa tečné roviny paraboloidu v bodě B. Volíme-li v této tečné rovině řídící přímku tak, že její průmět procházející bodem B_1 jest rovnoběžný k ose polární t. j. s průvodičem, pak průmět ten protne stopu tečné roviny v bodě C_1, jehož odlehlost X od bodu B_1 jest určena rovnicí:

$$v - \dot{V} = -\frac{v}{u} X,$$



Obr. 5.

t. j. hledíc k rovnici předchozí,

$$X = -\varrho'' + \frac{v^2}{u}$$

aneb

$$-\varrho'' = X - \frac{v^2}{u}.$$

Je-li tedy O pól (obr. 5.), ϱ průvodič bodu A_1, A_1B_1 normála v bodě A_1, která protne kolmici v pólu O na průvodič vztyčenou v bodě B_1, takže

$$OA_1 = \varrho = u, \quad OB_1 = \varrho' = v,$$

tu kolmice v B_1 vztyčena na A_1B_1 protne OA_1 v bodě A' i jest

$$OA' = -\frac{v^2}{u}.$$

Poněvadž spojnice bodu A' a bodu C_1 (X, v) protíná normálu ve středu křivosti K, ježto průměty řídících přímek paraboloidu jsou rovnoběžny, dospíváme k jednoduché konstrukci výrazu ϱ''. Středem křivosti K a bodem A' proložme přímku, která bodem B_1 vedenou rovnoběžku s průvodičem OA_1 protne v bodě C_1; i jest

$$B_1C_1 = X.$$

Vedeme-li bodem C_1 rovnoběžku ku $A'B_1$, protne tato průvodič v bodě L a tu

$$OL = -\varrho''.$$

Je-li naopak ϱ'' dáno, učiníme $OL = -\varrho''$, bodem L vedeme rovnoběžku s $A'B_1$, která protne bodem B_1 vedenou rovnoběžku s průvodičem v bodě C_1. Průsečík přímky $A'C_1$ s normálou stanoví střed křivosti K.

Z této konstrukce plyne pak ihned konstrukce D'Ocagneova; vedeme-li totiž bodem L rovnoběžku s $A'C_1$, protne tato normálu v bodě H, i jest pak

$$B_1K = KH,$$

z níž plyne konstrukce tato: Učiň $B_1K = KH$, bodem H veď rovnoběžku s $A'K$, kteráž pak vymezí na průvodiči délku OL. Je-li naopak sestrojiti střed křivosti, pak spojíme bod A' se středem úsečky B_1L a spojnice tato protne normálu ve středu křivosti K.

I mohli bychom řadu jiných konstrukcí uvésti, dle toho, jak volíme v rovnici (1'') U neb V.

Zmíníme se ještě o jedné. Položme v rovnici (1'')

$$U = 2u + \frac{u^3}{v^2};$$

pak vypočteme z ní:

$$V = \frac{u}{v}\varrho''.$$

Volíme-li pak v příslušném paraboloidu površku jdoucí bodem A tak, že její průmět procházející bodem A_1 jest rovnoběžný s osou Y, dospějeme ke konstrukci: Bodem B_1 veď kolmici ku normále a bodem A_1 ku průvodiči. Průsečík D_1 těchto přímek spoj se středem křivosti K; přímka D_1K protne OB_1 v bodě B' i jest pak

$$OB' = \frac{u}{v}\varrho'';$$

vedeme-li bodem B' rovnoběžku s $A'B_1$, protne tato OA_1 v bodě L i jest opět

$$OL = -\varrho''.$$

Drobnosti z geometrie.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

(Dokončení.)

Steinerovy trojúhelníky jsou charakterisovány elementárně geometricky jakožto vepsané trojúhelníky maximálního obsahu, a doplňkový bod z_0 jako čtvrtý průsek ellipsy s opsanou kružnicí.

Na kruhu (a) pro bod Θ_0 příslušný affinně k bodu z_0 na ellipse bezprostřední geometrická interpretace chybí; jeho definice je čistě metrická: $\Theta_0 = -3\Theta$, značí-li Θ úhlový parametr kteréhokoli z vrcholů rovnostranného trojúhelníka $\Theta'\Theta''\Theta'''$.

Obsah trojúhelníka rovnostranného vepsaného do kruhu (a) jest

$$\frac{a^2}{4}3\sqrt{3};$$

obrazec affinní má plochu zmenšenou v poměru $b : a$, takže trojúhelníky Steinerovy mají obsah

$$\frac{ab}{4}3\sqrt{3}.$$

Týž výraz vychází ovšem též ze vzorce (9*) čl. 3.; zde totiž

$$\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} = \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{2} = 60^0, \quad \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{2} = 120^0,$$