Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 4-5, 526--594

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109108

Úlohy.

Řešení úloh.

Z mathematiky.

1.

Určiti jest geometrické místo bodů, jichž poláry vzhledem k parabole $y^2 = 2px$ *jsou tečnami ellipsy*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

† *Dr. Vladimír Živanský.*

Řešení 1. Zaslal p. *Ferd. Jasný,* stud. VII. tř. I. gymn. v Brně.

Rovnice poláry vzhledem k parabole $y^2 = 2px$ zní

$$\eta y = p(\xi + x) \tag{1}$$

a má-li býti polára ta tečnou ellipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

musí míti s ní jediný (dvojnásob čítaný) bod společný, který dostaneme jako společné (dvojnásob čítané) řešení rovnic (1) a (2).

Z rovnice (1) vypočteme

$$y = \frac{p(x + \xi)}{\eta}$$

a dosadíme do rovnice (2).

Po snadné úpravě obdržíme k určení x rovnici

$$x^2(a^2p^2 + b^2\eta^2) + 2x \,.\, \xi a^2 p^2 + a^2(p^2\xi^2 - b^2\eta^2) = 0.$$

Má-li míti tato rovnice jen jeden (dvojnásobný) kořen x, musí se diskriminant rovnat nule.

$$4a^4p^4\xi^2 - 4a^2(a^2p^2 + b^2\eta^2)(p^2\xi^2 - b^2\eta^2) = 0.$$

Po snadné úpravě, uvážíme-li, že $\eta = 0$ neposkytuje bodů hledané vlastnosti, najdeme

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{\frac{a^2p^2}{b^2}} = 1.$$

Geometrickým místem bodů, jichž poláry vzhledem k parabole $y^2 = 2px$ jsou tečnami ellipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

jest hyperbola s osami co do polohy totožnými s osami ellipsy, s hlavní poloosou co do délky a, vedlejší $\frac{ap}{b}$.

Řešení 2. Zaslal p. *Miloslav Jakeš*, st. VIII. tř. r. g. v Chrudimi.

Souřadnice hledaných bodů si označme (ξ, η). Rovnice poláry k parabole $y^2 = 2px$, jejímž pólem jest bod (ξ, η), je

$$y\eta = p(x + \xi).$$

Tato polára k parabole má býti zároveň tečnou k ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

tedy její rovnice musí býti totožna s rovnicí tečny v určitém bodě (x', y') na ellipse:

$$\frac{x' \cdot x}{a^2} + \frac{y' \cdot y}{b^2} = 1.$$

Rovnice poláry upravíme na tvar:

$$-\frac{x}{\xi} + \frac{\eta \cdot y}{\xi \cdot p} = 1$$

a srovnáním s rovnicí předcházející obdržíme

$$\frac{x'}{a^2} = -\frac{1}{\xi}, \quad \frac{y'}{b^2} = \frac{\eta}{\xi p},$$

čili

$$\frac{x'}{a} = -\frac{a}{\xi}, \quad \frac{y'}{b} = \frac{\eta \cdot b}{\xi \cdot p}.$$

Ježto

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1,$$

je

$$\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{\eta^2 b^2}{\xi^2 p^2} = 1,$$

nebo-li

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\frac{ap}{b}}\right)^2 = 1.$$

Je tedy hledaným geometrickým místem hyperbola, jejíž hlavní osa je totožná co do délky i polohy s hlavní osou ellipsy a vedlejší osa co do polohy s vedlejší osou ellipsy, co do délky rovna $\frac{ap}{b}$.

2.

Kosočtverec, jehož plocha jest 100, má jednu úhlopříčku na přímce $3x + 4y - 22 = 0$, *protilehlý vrchol v bodě* $A(8, 12)$. *Jaké jsou souřadnice ostatních vrcholů?*

Dr. *Marie Nábělková.*

Řešení. Zaslal p. *Otto Karl*, stud. VII. tř. g. v Praze v Žitné ulici.

Vzhledem k tomu, že daná úhlopříčka

$$u_1 \equiv 3x + 4y - 22 = 0,$$

má směrnici $-\frac{3}{4}$, bude rovnice druhé úhlopříčky u_2 stojící na ní kolmo a jdoucí vrcholem $A(8, 12)$

$$y - 12 = \frac{3}{4}(x - 8),$$

nebo-li

$$u_2 \equiv 4x - 3y + 4 = 0.$$

Střed kosočtverce S najdeme jako průsečík přímek u_1, u_2. Řešením obou rovnic najdeme souřadnice středu $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, Vrchol (x_3, y_3) je souměrný dle středu s s vrcholem

$$A(x_1 = 8,\ y_1 = x).$$

Je tedy

$$x_0 = \frac{x_1 + x_3}{2},\quad y_0 = \frac{y_1 + y_3}{2}$$

a tudíž

$$x_3 = 2x_0 - x_1 = -4$$
$$y_3 = 2y_0 - y_1 = -4.$$

Jsou-li zbývající dva vrcholy $B(x_2, y_2)$, $D(x_3, y_3)$, platí na základě souměrnosti vzhledem ke středu S

$$x_0 = \frac{x_2 + x_4}{2}, \quad y_0 = \frac{y_2 + y_4}{2}$$

a tedy

$$x_2 + x_4 = 4, \quad y_2 + y_4 = 8 \qquad (a)$$

Další vztahy pro souřadnice vrcholu B, D obdržíme takto:

Vypočtěme si délku dané úhlopříčky u_1. Polovinu této délky určíme jako vzdálenost vrcholu A od úhlopříčky u_2. Poněvadž rovnice úhlopříčky u_2 je ve tvaru normálním

$$\frac{3x + 4y - 22}{5} = 0,$$

bude

$$\frac{u_1}{2} = \frac{3x_1 + 4y_1 - 22}{5} = 10$$

$$u_1 = 20.$$

Délku druhé úhlopříčky určíme z dané plochy. Musí býti

$$\frac{1}{2} u_1 u_2 = 100$$

a tedy $u_2 = 10$.

Vrcholy B, D mají od úhlopříčky u_2 vzdálenost

$$\frac{1}{2} u_2 = \pm 5.$$

Ježto rovnice úhlopříčky u_2 je v normálním tvaru

$$\frac{-4x + 3y - 4}{5} = 0$$

obdržíme tak rovnice

$$\frac{-4x_2 + 3y_2 - 4}{5} = 5, \quad \frac{-4x_4 + 3y_4 - 4}{5} = -5 \qquad (b)$$

Řešením rovic (a) (b) najdeme pak

$$B(x_2 = -2, \quad y_2 = 7)$$
$$D(x_4 = 6, \quad y_4 = 1).$$

Kdybychom místo rovnic (b) vzali v úvahu rovnice

$$\frac{-4x_2 + 3y_2 - 4}{5} = -5, \quad \frac{-4x_4 + 3y_4 - 4}{5} = 5$$

mělo by to za výsledek pouze záměnu vrcholů B a D.

3.

Sestrojiti ohniska ellipsy, dán-li její střed S, tečna t s bodem dotyčným T a délka velké poloosy a.

Dr. *V. Hruška.*

Řešení. Zaslal p. *Ludvík Havlíček*, stud. VII. tř. I. r. na Král. Vinohradech.

K řešení užijeme vět:

Paty kolmic A_1, A_2 spuštěných s ohnisek ellipsy na tečnu t leží na kružnici opsané kol středu S ellipsy poloměrem a, rovným hlavní ose.

Bod dotyčný T na tečně t a průsečík R tečny t s hlavní osou ellipsy jsou harmonicky sdružené vzhledem k bodům A_1, A_2.

Odtud plyne konstrukce:

Kolem středu S opišme poloměrem a kružnici, jež protne tečnu t v bodech A_1, A_2. Na kolmicích v bodech A_1, A_2 k tečně t vztyčených leží ohniska F_1, F_2.

Na tečně t sestrojme bod R harmonicky sdružený s bodem dotyčným T vzhledem k bodům A_1, A_2. RS určuje pak polohu hlavní osy.

Úloha je jednoznačná a možná při $ST \leqq a$.

4.

Dokažte analyticky větu, že kružnice jdoucí průsečíky tří tečen paraboly jde ohniskem. Použijte této věty ke konstrukci paraboly ze čtyř tečen. *Týž.*

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VII. tř. reálky v Praze III.

Buďte:

$$yy_1 - px - px_1 = 0,$$
$$yy_2 - px - px_2 = 0,$$
$$yy_3 - px - px_3 = 0$$

libovolné tři tečny paraboly $y^2 = 2px$. Jsou-li λ, μ, ν libovolné konstanty, značí

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(yy_1 - px - px_1)(yy_2 - px - px_2) \\ &+ \mu(yy_2 - px - px_2)(yy_3 - px - px_3) \\ &+ \nu(yy_3 - px - px_3)(yy_1 - px - px_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

kuželosečku, jdoucí průsečíky vždy dvou z oněch tří tečen (princip Laméův). Určíme-li λ, μ, ν tak, aby koefficient při xy se rovnal nulle, a koefficienty při x^2 a y^2 byly stejné, bude tato kuželosečka kružnicí. Podmínečné rovnice tedy jsou:

$$\lambda(y_1 + y_2) + \mu(y_2 + y_3) + \nu(y_3 + y_1) = 0,$$
$$\lambda(y_1 y_2 - p^2) + \mu(y_2 y_3 - p^2) + \nu(y_3 y_1 - p^2) = 0.$$

Odtud:

$$\frac{\lambda}{(y_2 - y_1)(y_3^2 + p^2)} = \frac{\mu}{(y_3 - y_2)(y_1^2 + p^2)} = \frac{\nu}{(y_1 - y_3)(y_2^2 + p^2)}.$$

Dosadíme-li tyto úměrné hodnoty za λ, μ, ν do rovnice (1), dostáváme rovnici hledané kružnice:

$$\left.\begin{aligned} &(y_2 - y_1)(y_3^2 + p^2)(yy_1 - px - px_1)(yy_2 - px - px_2) \\ &+ (y_3 - y_2)(y_1^2 + p^2) . (yy_2 - px - px_2)(yy_3 - px - px_3) \\ &+ (y_1 - y_3)(y_2^2 + p^2)(yy^3 px - px_3)(yy_1 - px - px_1) = 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

Dasadíme-li sem za x, y souřadnice ohniska:

$$x = \frac{p}{2}, \quad y = 0,$$

tu vzhledem k rovnicím:

$$y_i^2 = 2px_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

dostaneme z rovnice (2):

$$\frac{p^3}{4}(p + 2x_1)(p + 2x_2)(p + 2x_3)(y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + y_1 - y_3) \equiv 0.$$

Souřadnice ohniska splňují tedy rovnici kružnice (2). Kružnice jde ohniskem.

Jsou-li T_1, T_2, T_3, T_4 čtyři tečny paraboly, proložme průsečíky tečen (T_1, T_2, T_3) kružnici K_1, průsečíky tečen (T_1, T_2, T_4) kružnici K_2. Kružnice K_1, K_2 se protínají kromě v bodě (T_1, T_2) ještě v druhém bodě, jenž jest hledaným ohniskem f paraboly. Paty kolmic s ohniska f spuštěných na tečny leží na vrcholové tečně. Tím známe vrchol, osu a ohnisko. Jelikož průsečík (T_1, T_2) obou kružnic K_1, K_2 jest vždy reálný, jest úloha vždy možná (má vždy reálné řešení) a jednoznačně řešitelná.

5.

Proměnný pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC otáčí se kolem vrcholu $y^2 = 2px$, kdežto vrchol C pravého úhlu šine se po parabole. Které geometrické místo opisuje vrchol B?

Jiří Archleb, prof. r. v Č. Budějovicích.

Řešení. Zaslal *Josef Bezdíček*, stud. V. tř. II. česk. g. st. v Brně.

Buďtež polární souřadnice obecného bodu C paraboly r a φ a obecného bodu B hledaného místa geometrického ϱ a ϑ.

Poněvadž proměnný trojúhelník jest pravoúhlý a rovnoramenný, musí býti $\varrho = r\sqrt{2}$, a $\vartheta = \varphi \pm 45^0$.

Rovnice paraboly $y^2 = 2px$ zní v polárních souřadnicích.

$$r = \frac{2p \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Dosadíme-li dle hořejších podmínek do této rovnice, bude

$$\frac{\varrho}{\sqrt{2}} = \frac{2y \sin(\vartheta \mp 45^0)}{\cos^2(\vartheta \mp 45^0)}$$

čili

$$\varrho = 4p \frac{\sin \vartheta \mp \cos \vartheta}{(\sin \vartheta \mp \cos \vartheta)^2}.$$

Zaveďme si opět souřadnice pravoúhlé ξ, η. Poněvadž

$$\sin \vartheta = \frac{\eta}{\varrho} \text{ a } \cos \vartheta = \frac{\xi}{\varrho},$$

jest

$$\varrho = 4p \frac{\frac{\eta}{\varrho} \mp \frac{\xi}{\varrho}}{\left(\frac{\eta}{\varrho} \pm \frac{\xi}{\varrho}\right)^2}.$$

aneb

$$(\eta \pm \xi)^2 = 4p(\eta \mp \xi).$$

Rovnice tyto transformujeme na osy otočené o úhel 45^0 prostřednictvím rovnic

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y),$$

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y).$$

I dostaneme rovnice $x^2 = 2\sqrt{2}py$, $y^2 = 2\sqrt{2}px$, jež značí paraboly o parametru $P = p\sqrt{2}$ k sobě kolmé. Jich osy a tečny vrcholové jsou osami souměrnosti osy a tečny vrcholové dané paraboly $y^2 = 2px$.

6.

Do rovnoramenného trojúhelníka o základně $2q$ a výšce p vepište ellipsu, jejíž osa splývá s výškou trojúhelníka, tak aby obsah ellipsy byl co největší. Jaký bude výsledek pro trojúhelník rovnostranný? Týž.

Řešení. Zaslal p. *Mil. Jakeš*, stud. VIII. tř. reál. gymn. v Chrudimi.

Osu x si položme do výšky, osu y do základny daného trojúhelníka. I bude rovnice hledané ellipsy

$$\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

kde a, b jsou neznámé poloosy její. Aby rameno trojúhelníku bylo tečnou ellipsy, musí jeho rovnice:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \tag{1}$$

býti totožná s rovnicí tečny v určitém bodě (x', y') na ellipse, jež zní

$$\frac{(x'-a)(x-a)}{a^2} + \frac{y' \cdot y}{b^2} = 1.$$

Tuto upravíme na tvar

$$\frac{x'-x}{ax'} \cdot x + \frac{y' \cdot a}{b^2 \cdot x'} y = 1.$$

Srovnáním s rovnicí (1) obdržíme:

$$\frac{x'-a}{a \cdot x'} = \frac{1}{p}, \quad \frac{y' \cdot a}{b^2 \cdot x'} = \frac{1}{q}$$

čili

$$\frac{x'-a}{a} = \frac{x'}{p}, \quad \frac{y'}{b} = \frac{bx'}{aq}. \tag{2}$$

Poněvadž

$$\left(\frac{x'-a}{a}\right)^2+\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1,$$

jest i

$$\left(\frac{x'}{p}\right)^2+\left(\frac{bx'}{aq}\right)^2=1.$$

Ježto dle první z rovnic (2)

$$x'=\frac{ap}{p-a}$$

bude

$$\frac{a^2}{(p-a)^2}+\frac{b^2p^2}{q^2(p-a)^2}=1.$$

Z této rovnice vyjádříme b pomocí a:

$$b=\frac{q}{\sqrt{p}}\,.\,\sqrt{p-2a}.$$

Obsah ellipsy:

$$P=\pi ab=\pi\,.\,\frac{q}{\sqrt{p}}\,.\,\sqrt{pa^2-2a^3}.$$

Hledejme maximum funkce $z=pa^2-2a^3$. Její derivace dle a je $z'=2pa-6a^2=2a(p-3a)$. Maximum nastane, když $z'=0$: $a=0$ nemá významu, neboť pak $P=0$.

$$p-3a=0,\ \text{z toho}\ a=\frac{p}{3}.$$

Druhá derivace $z''=2p-12a=-2p$ je záporná, nastává tedy skutečně maximum.

Poloosa

$$b=\frac{q}{\sqrt{p}}\sqrt{p-\frac{2}{3}p}=\frac{q}{\sqrt{3}}.$$

Střed ellipsy leží na výšce ve vzdálenosti $a=\frac{p}{3}$ od základny, tedy v těžišti trojúhelníka.

Největší ellipsa vepsaná do rovnoramenného trojúhelníka má střed v jeho těžišti; její poloosa na výšce má délku $\frac{p}{3}$, druhá $\frac{q}{\sqrt{3}}$.

Pro trojúhelník rovnostranný je $p = q\sqrt{3}$, tedy $\frac{q \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{q}{\sqrt{3}}$. Obě poloosy jsou stejné, tedy hledanou ellipsou je kružnice vepsaná do trojúhelníka.

7.

Do kruhu narýsovati daný úhel α jakožto úhel obvodový tak, aby plocha omezená rameny jehô a příslušným obloukem byla maximální. Školní rada *V. Hübner.*

Řešení. Zaslal p. *J. Faus,* stud. r. v Pardubicích.

Stejným úhlům obvodovým přísluší stejné úhly středové, tedy i stejné tětivy a oblouky a též úseče stejné plochy. Bude tedy plocha omezená rameny úhlu α a příslušným obloukem maximálním, bude-li plocha trojúhelníku ABC tvořeného rameny maximální. Poněvadž u těchto trojúhelníků je strana BC konstantní, bude jich plocha maximální, bude-li maximální výška na stranu tuto spuštěna. Z názoru vidíme ihned, že to nastane pro trojúhelník rovnoramenný.

O tom lze též snadno se přesvědčiti počtem.

Plochu trojúhelníku ABC lze vyjádřiti vzorcem

$$\triangle = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Při tom je

$$b = 2r \sin \beta$$
$$c = 2r \sin \gamma = 2r \sin (\alpha + \beta)$$

a tedy

$$\triangle = 2r \sin \alpha \sin \beta . \sin (\beta + \alpha).$$

Průběh plochy $\triangle$ závisí na funkci úhlu β

$$f(\beta) = \sin \beta \sin (\beta + \alpha).$$

Abychom dostali maximální a minimální hodnoty, uvažujme derivaci

$$f'(\beta) = \sin \beta \cos (\beta + \alpha) + \cos \beta \sin (\beta + \alpha) = \sin (2\beta + \alpha).$$

Z kořenů rovnice

$$f'(\beta) = \sin (2\beta + \alpha) = 0$$

což nastane je-li

$$2\beta + \alpha = k\,\pi,$$

má význam pouze

$$\beta = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

Pak je

$$f''(\beta) = 2\cos\,(2\beta + \alpha) = -2 < 0$$

tak že nastává maximum.

Trojúhelník ABC má pak úhly $\alpha, \frac{\pi - \alpha}{2}, \frac{\pi - \alpha}{2}$ a je tedy skutečně rovnoramenný.

8.

Kdy jest harmonický průměr dvou čísel současně harmonickým průměrem arithmetického a geometrického průměru těchto čísel. *Jan Svoboda*, úř. hypot. banky v Brně.

Řešení. Zaslal p. *Jan Zralý*, stud. V. tř. r. v Rakovníku.

Buďtež dána čísla x, y

harmonický průměr jest $\frac{2xy}{x+y}$

arithmetický „ „ $\frac{x+y}{2}$

geometrický „ „ $\sqrt{x \,.\, y}$.

Má býti

$$\frac{2xy}{x+y} = \frac{2 \,.\, \frac{x+y}{2} \,.\, \sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}}.$$

Pak jest

$$(x+y)\,xy + 2xy\sqrt{xy} = (x+y)^2\sqrt{xy}$$

čili

$$(x+y)\sqrt{xy} = x^2 + y^2.$$

Kladme

$$x = \lambda^2 \,.\, y$$

i máme

$$\lambda^4 + 1 = \lambda\,(\lambda^2 + 1),\ \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda + 1 = 0,\ (\lambda - 1)\,(\lambda^3 - 1) = 0,$$

t. j.

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0,$$

odsud

$$\lambda_{1,2} = 1$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

a

$$x = y$$

aneb

$$x = y \,.\, \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}.$$

Zajímavé jest, že arithmetický průměr dvou čísel jest současně arithmetickým průměrem geometrického a harmonického průměru týchž čísel. Neboť jest

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\frac{2xy}{x+y} + \sqrt{xy}}{2},$$

dále

$$(x+y)^2 = 2xy + (x+y)\sqrt{xy}$$

čili

$$x^2 + y^2 = (x+y)\sqrt{xy}$$

t. j. rovnice dříve uvedená.

Hledaná čísla jsou vždy v poměru třetích kořenů z jednotky.

9.

Které trojciferné číslo děleno číslem, vzniklým z něho tím, že píšeme číslice v obráceném pořádku, dává zbytek rovný součtu jeho číslic? Prof. *Antonín Lochmann.*

Řešení.

Značí-li x, y, z číslice hledaného čísla trojciferného $100x + 10y + z$, je číslo psané v obráceném pořádku $100z + 10y + x$. Označme q podíl obou čísel. I lze danou podmínku vyjádřiti rovnicí

1) $100x + 10y + z = q(100z + 10y + x) + x + y + z$

x, y, z jsou čísla celá kladná $\leqq 9$, q číslo kladné.

Dokážeme si nejprve, že z nemůže se rovnati 0. Z 1) obdržíme pro $z = 0$ po snadné úpravě

$$x(99 - q) = y(10q - 9).$$

Odtud by plynulo

$$x = (10q - 9)\,t$$
$$y = (99 - q)\,t,$$

kdež značí t celé číslo. Aby první z těchto rovnic poskytla za x celé číslo kladné, musí býti, ježto q je kladné, též t kladné; aby pak bylo $x < 10$, musí býti

$$10q - 9 < \frac{10}{t}$$

$$q < \frac{9}{10} + \frac{1}{t}$$

a tedy jistě $q < 2$. Pak ale neposkytuje druhá z rovnic za y číslo celé v mezích $0 \leqq y \leqq 9$.

Z rovnice 1) plyne

$$q(100z + 10y + x) = 99z + 9y$$

a tedy

$$100qz = 99x + 9y - q(10y + z).$$

Ježto má býti

$$x \leqq 9, \; y \leqq 9 \quad \text{a jest} \quad q(10y + x) > 0,$$

musí býti

$$100qz < 99 \,.\, 9 + 9 \,.\, 9$$
$$qz < 9{\cdot}72$$

a ježto jest $q\,z$ celé číslo,

$$q\,z \leqq 9.$$

Dokážeme si ihned, že nemůže býti ani $q = 1$, ani $q = 9$.

Dostáváme totiž

$$\text{pro} \quad q = 1 \quad \text{rovnici} \quad 100(x - z) = 2x + y,$$
$$\text{pro} \quad q = 9 \quad \text{rovnici} \quad 10x = 9y + 100z$$

a rovnice ty není možno vyplniti, ježto $z \geqq 1$.

Mohou tedy nastati možnosti

$$
\begin{aligned}
q &= 2, \; z = 1, \; 2, \; 3, \; 4 \\
q &= 3, \; z = 1, \; 2 \\
q &= 4, \; z = 1, \; 2 \\
q &= 5, \; z = 1 \\
q &= 6, \; z = 1 \\
q &= 7, \; z = 1 \\
q &= 8, \; z = 1.
\end{aligned}
$$

Napišme si rovnici 1) ve tvaru

$$9\,(11x + y - 11q\,z - q\,y) = q\,(x + y + z).$$

Ježto $q < 9$, plyne odtud, že je buď q i $x + y + z$ dělitelno třemi, neb $x + y + z$ dělitelno devíti.

Zabývejme se prvním případem, tedy $q = 3$ nebo 6.

Je-li $q = 3$ je $z = 1$ neb 2.

Pro $q = 3$, $z = 1$ máme z 1) po snadné úpravě

$$32x - 7y = 100$$

nebo-li

$$7y = 4\,(8x - 25).$$

Odtud vidíme, že y musí býti dělitelno čtyřmi, tedy buď $y = 4$ neb $y = 8$. Pouze však $y = 4$ poskytuje pro x celistvou hodnotu $x = 4$.

Tak dostáváme první číslo úloze vyhovující 441.

Skutečně 441 děleno 144 dává zbytek 9 při podílu 3. Pro $q = 3$, $z = 2$ obdržíme podobně

$$32x - 7y = 200$$

$$7y = 4\,(8x - 50)$$

y musí býti dělitelno čtyřmi, tedy $y = 4$, neb $y = 8$ a pouze $y = 9$ poskytuje pro x celou hodnotu $x = 8$. Tak dostáváme druhé číslo úloze vyhovující 882, dvojnásobné to číslo předcházejícího.

882 děleno 288 dává zbytek 18 při podílu 6.

Je-li $q = 6$, může býti pouze $z = 1$.

I dostáváme z 1) v tomto případě pro x a y rovnici

$$31x - 17y = 200$$

$$y = \frac{31x - 200}{17}.$$

Vidíme ihned, že musí býti $x > 7$, aby bylo $y > 0$. Z hodnot $x = 7, 8, 9$ poskytuje pouze $x = 7$ pro y celou hodnotu $y = 1$.

I máme třetí číslo úloze vyhovující 711. 711 děleno 117 dává zbytek 9 a podíl 6.

Uvidíme dále, že v případě, kdy q není dělitelno 3 a tedy $x + y + z$ je dělitelno 9, není čísel úloze vyhovujících.

Součet $x + y + z$ může se rovnati buď 9 neb 18, (kdyby $x + y + z = 27$, musilo by býti $x = y = z = 9$, číslo 999 však úloze nevyhovuje). Pišme $x + y + z = 9k$, kdež $k = 1$ neb 2.

Dosadíme-li do 1) $z = 9k - x - y$, obdržíme snadno rovnici

$$2)\qquad 11(1 + q)\,x + (10q + 1)\,y = 100kq.$$

Vidíme ihned, že rovnice tato je neřešitelná celými čísly pro $q = 2$ a $q = 8$.

Pro $q = 2$ je $1 + q = 3$, $10q + 1 = 21$, což jsou čísla o společné míře 3; první strana té rovnice není však touto společnou měrou dělitelná.

Podobně pro $q = 8$ je $1 + q = 9$, $10q + 1 = 81$, kterážto čísla mají společnou míru 9, která zase není v členu na pravé straně obsažena.

Zbývají ještě případy $q = 4, 5, 7$. Pro $q = 4$, víme, že $z = 1$ neb 2, tedy $x + y = 9k - 1$ neb $x + y = 9k - 2$.

Rovnice 2) bude

$$55x + 41y = 400k.$$

Vidíme ihned, že musí býti y dělitelno pěti, tudy $y = 5$. Při $k = 1$ může býti $x = 3$, neb $x = 2$, hodnoty tyto však nevyhovují rovnici napsané, při $k = 2$ dostáváme hned za x nevyhovující hodnoty.

Při $q = 5$ a 7 je $z = 1$, tedy $y = 9k - 1 - x$ a dosadíme-li do rovnice 2. obdržíme

$$(10 + q)\,x = 10kq + 10q - 9k + 1.$$

Klademe-li $q = 5, 7$, $k = 1, 2$, neobdržíme za x celé hodnoty.

10

V trojúhelníku ostroúhlém platí vztah

$$\frac{u_1u_2}{ab} + \frac{u_2u_3}{bc} + \frac{u_3u_2}{ca} = 1,$$

značí-li u_1, u_2, u_3 *části výšek od vrcholů k jich průsečíku.*

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Mil. Jakeš,* stud. VIII. tř. gymn. v Chrudimi.

Částmi výšek u_1, u_2, u_3 rozdělí se trojúhelník na tři trojúhelníky, jichž úhly při orthocentru (průsečíku výšek) jsou výplňkové k protilehlým úhlům trojúhelníku, neboť ramena jedněch jsou kolmo k ramenům druhých. Je tedy obsah trojúhelníku součtem obsahů oněch tří trojúhelníků:

$$\frac{1}{2}\, u_1u_2 \sin\gamma + \frac{1}{2}\, u_2u_3 \sin\alpha + \frac{1}{2}\, u_3u_1 \sin\beta = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma.$$

Z věty sinové vyjádříme všechny úhly úhlem γ:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,.\sin\gamma \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}\,.\sin\gamma$$

a dosadíme

$$u_1u_2 \sin\gamma + u_2u_3\,.\,\frac{a}{c}\,.\sin\gamma + u_3u_1\,.\,\frac{b}{c}\,.\sin\gamma = ab \sin\gamma.$$

Dělíme-li výrazem na právé straně, obdržíme daný vztah:

$$\frac{u_1u_2}{ab} + \frac{u_2u_2}{bc} + \frac{u_3u_1}{ca} = 1.$$

11.

Dokažte, že číslo $A_n = 4^n + 5$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *není současně dělitelno* 7 *a* 9. Prof. *M. Haas.*

Řešení 1. Dle p. autora.

Číslo dělitelné 7 a 9 jest také dělitelno $63 = 4^3 - 1$. S ohledem na rovnost

$$4^n + 5 = 4^3\,(4^{n-3} + 5) - 5\,(4^3 - 1),$$

čili

$$A_n = 64\, A_{n-3} - 5.63,$$

jest patrno, že A_n je dělitelno 63, jestliže A_{n-3} jest tímto číslem dělitelno. Podobný vztah lze nalézti mezi A_{n-3} a A_{n-6} atd.

O dělitelnosti A_n číslem 63 rozhoduje pak buď A_0, neb A_1 neb A_2 dle toho, jaký je nejmenší zbytek ($\geqq 0$) při dělení n třemi.

Ale žádné z čísel

$$A_0 = 6, \quad A_1 = 9, \quad A_2 = 21$$

není dělitelno současně 7 a 9, tedy ani žádné jiné uvedeného tvaru, *c. b. d.*

Řešení 2. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VII tř. r. v Praze III.

Má-li býti číslo dělitelno současně 7 a 9, musí býti dělitelno 63.

Avšak 4^n lze psáti dle toho, je-li *a*) n dělitelno třemi, neb dává-li n při dělení třemi *b*) zbytek 1 neb *c*) 2 ve tvaru *a*) $4^n = 64^{\frac{n}{3}}$, *b*) $4^n = 4 \cdot 64^{\frac{n-1}{3}}$, *c*) $4^n = 16 \cdot 64^{\frac{n-1}{3}}$. Poněvadž pak $64 = 63 + 1$, bude dle binomické poučky

$$64^k = (1 + 63)^k = 1 + 63\,l,$$

kdež l značí celé číslo.

I bude

$$\begin{aligned} a)\ A_n &= 1 + 63\,l + 5 = 63\,l + 6 \\ b)\ A_n &= 4(1 + 63\,l) + 5 = 63\,l' + 9 \\ c)\ A_n &= 16(1 + 63\,l) + 5 = 63\,l'' + 21 \end{aligned}$$

kdež l' a l'' opět značí celá čísla.

Z toho vidíme ihned, že nikdy není A_n dělitelno 63.

12.

Rotační kužel má danou stranu s. Jak musíme voliti ostatní jeho rozměry, aby koule vepsaná měla objem co největší? *Týž.*

Řešení. Zaslal p. *Bohumil Šternberk*, stud. VIII. tř. r. g. v Chrudimi.

Budiž poloměr koule vepsané ϱ; její objem $\frac{4}{3}\pi\,\varrho^3$ dosáhne maxima při maximální hodnotě ϱ.

Poloměr ϱ vypočteme jako poloměr kružnice vepsané do řezu osového trojúhelníku rovnoramenného.

I bude

$$\varrho = \frac{\text{plocha}}{\text{poloviční obvod}} = \frac{vr}{r+s}.$$

Označme φ odchylku strany s od podstavy. I bude

$$v = s \sin \varphi, \; r = \cos \varphi$$

$$\varrho = s \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \cos \varphi = s \, tg \frac{\varphi}{2} \cos \varphi.$$

Ustanovme derivaci

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{s}{2} \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} - s \, tg \frac{\varphi}{2} \sin \varphi = \frac{s}{2} \frac{\cos \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{s}{2} \frac{\cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Z obou kořenů rovnice $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$ (dle $\cos \varphi$) má zde význam pouze kořen kladný

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Označme φ_0 příslušný úhel, v mezích od 0 do $\frac{\pi}{2}$, který má zde jedině význam.

Když $\cos \varphi$ roste od 0 do $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ je $\frac{d\varrho}{d\varphi} < 0$ a když $\cos \varphi$ roste od $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ do 1, je $\frac{d\varrho}{d\varphi} > 0$.

Poněvadž $\cos \varphi$ pro $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ s rostoucím φ ubývá, je $\frac{d\varrho}{d\varphi} > 0$, když φ roste od 0 do φ_0 a $\frac{d\varrho}{d\varphi} < 0$, když φ roste od φ_0 do $\frac{\pi}{2}$.

Nastává tedy pro $\varphi = \varphi_0$ skutečně maximum. Pak je

$$r = s \cos \varphi = \frac{s}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$v = s \sin \varphi = \frac{s}{2}\sqrt{2\sqrt{5} - 2}.$$

Poloměr kužele rovná se straně pravidelného desetiúhelníka, výška straně pravidelného pětiúhelníka, vepsaného do kružnice o poloměru s.

13.

Řešiti jest rovnici

$$(x + 1)^{12} + (x - 1)^{12} = 2(x^4 + 6x^2 + 1)^3.$$

Prof. *R. Hruša.*

Řešení. 1. Zaslal p. *Jan Zralý*, stud. V. tř. r. v Rakovníce.

Pišme danou rovnici ve tvaru

$$(x^2 + 2x + 1)^6 + (x^2 - 2x + 1)^6 = 2(x^4 + 6x^2 + 1)^3$$

a dělme ji x^6. Tím obdržíme

$$\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)^6 + \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)^6 = 2\left(x^2 + 6 + \frac{1}{x^2}\right)^3$$

a zavedeme-li novou neznámou substitucí

$$y = x + \frac{1}{x},$$

dostaneme

$$(y + 2)^6 + (y - 2)^6 = 2(y^2 + 4)^3.$$

Rozvineme-li podle binomické poučky a upravíme-li, máme rovnici

$$y^2(y^2 + 4) = 0,$$

a ta má kořeny

$$y_{1,2} = 0; \; y_{3,4} = \pm 2i.$$

Dosadíme-li do vztahu

$$x + \frac{1}{x} = y$$

za $y_{1,2} = 0$, obdržíme

$$x_{1,2,3,4} = \pm 2i$$

a pro

$$y_{3,4} = \pm i$$

dostaneme rovnice

$$x^2 \mp 2ix + 1 = 0,$$

odkudž

$$x_{5,6,7,8} = \pm(1 \pm \sqrt{2})i.$$

Řešení 2. Zaslal p. *Jan Kodl*, stud. VII. tř. r. v Písku.

Na pravé straně rovnice lze psáti:

$$2(x^4 + 6x^2 + 1) = (x+1)^4 + (x-1)^4.$$

Položme

$$(x+1)^4 = y, \quad (x-1)^4 = z.$$

Tak dostaneme z dané rovnice

$$4y^3 + 4z^3 = (y+z)^3$$

a po jednoduché úpravě

$$y^3 + z^3 - y^2z - yz^2 = 0$$
$$(y+z)(y-z)^2 = 0.$$

Rovnice tato bude splněna, bude-li

buď I. $y + z = 0,$

neb II. $y - z = 0.$

Uvažujme nejprve I. Dostáváme rovnici

$$(x+1)^4 + (x-1)^4 = 0$$

nebo-li

$$x^4 + 6x^2 + 1 = 0.$$

Řešením této rovnice dostaneme

$$x = \pm\sqrt{-3 \pm 2\sqrt{2}},$$

což lze psáti též ve tvaru

$$x = \pm i(1 \pm \sqrt{2}).$$

V případě II. máme

$$(x+1)^4 - (x-1)^4 = 0$$

nebo-li

$$x^3 + x = 0$$

a odtud

$$x = 0, \text{ a } x = \pm i.$$

Poznámka. Daná rovnice jest stupně desátého. Toto druhé řešení má tu výhodu, že podává též multiplicitu kořenů.

Kořeny $\pm i(1 \pm \sqrt{2})$ jsou jednoduché, kořeny $0, \pm i$ pak dvojnásobné.

14.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x + y + z + xyz &= 3 \\
x^2 + y^2 + z^2 &= x^2y^2z^2 - 1 \\
xy + yz + zx &= 2.
\end{aligned}
$$

Týž.

Řešení. Zaslala sl. *Marie Šouláková,* stud. VIII. tř. dívč. r. g. v Brně.

Jest výhodno zavésti novou neznámou $t = xyz$.

Tím prvé dvě rovnice přejdou ve tvar:

$$
\begin{aligned}
x + y = z &= 3 - t \\
x^2 + y^2 + z^2 = t^2 &= 1
\end{aligned}
$$

Dvojmoc prvé rovnice jest:

$$(x + y + z)^2 = 9 - 6t + t^2,$$

načež odečtením druhé se obdrží toto

$$2(xy + yz + zx) = 10 - 6t.$$

Se zřetelem k rovnici třetí se obdrží dále rovnice:

$$4 = 10 - 6t,$$

jejímž řešením vychází:

$$t = 1.$$

Zbývá pouze řešiti soustavu:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 2 \\
xy + yz + zx &= 2 \\
xyz &= 1.
\end{aligned}
$$

Z toho vidíme, že x, y, z jsou kořeny rovnice třetího stupně (reciproké):

$$t^2 - 2t^2 + 2t - 1 = 0,$$

nebo-li

$$(t - 1)(t^2 - t + 1) = 0$$

a odtud

$$t_1 = 1,\ t_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ t_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Za x, y, z lze bráti tyto hodnoty v libovolném pořádku.

15.

Nalézti největší číselný součinitel v rozvoji

$$(5x + 2y)^{15}.$$

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Jan Zralý*, stud. V. tř. r. v Rakovníce.

Označme si největší číselný součinitel v daném rozvoji A_{k+1}. Pak musí platiti nerovnosti

$$A_k < A_{k+1},\ A_{k+2} < A_{k+1}.$$

Vyjádříme-li si A_{k+1} dle vzorce

$$A_{k+1} = \binom{15}{k}^{15-k} 2^k$$

a obdobně i A_k a A_{k+2}, obdržíme dosazením do hořejších nerovností vztahy

$$\binom{15}{k-1} 5^{16-k} \,.\, 2^{k-1} < \binom{15}{k} \,.\, 5^{15-k}\, 2^k$$
$$\binom{15}{k+1} 5^{14-k} \,.\, 2^{k+1} > \binom{15}{k} 5^{15-k} \,.\, 2^k.$$

Upravením těchto vztahů můžeme k sevříti do mezí

$$25 < 7k < 32.$$

Jelikož pak k musí býti celistvé, jest patrno ihned, že $k = 4$, t. j. největší číselný součinitel v předloženém rozvoji jest u pátého členu.

Hodnota tohoto největšího číselného součinitele jest

$$\binom{15}{4} 5^{11}\, 2^4 = 1,,066.406,250.00.$$

(Úloha tato se vyskytuje při důkazu theorému Bernoulliho v počtu pravděpodobnosti.)

16.

Který vztah musí býti mezi veličinami a, b, c, d, aby platily současně rovnice

$$xzu + y^2u + yz^2 - ayzu = 0$$
$$yux + z^2u + zu^2 - bzux = 0$$
$$zxy + u^2y + ux^2 - cuxy = 0$$
$$uyz + x^2y + xy^2 - dxyz = 0.$$

Prof. *Jan Schuster*.

Řešení. Zaslal p. *Jan Kodl*, stud. VII. tř. r. v Písku.

Z daných rovnic plyne snadno:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{u}&=a\\ \frac{y}{z}+\frac{z}{u}+\frac{u}{x}&=b\\ \frac{z}{u}+\frac{u}{x}+\frac{x}{y}&=c\\ \frac{u}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}&=d\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Rovnice tyto rozřešíme dle $\frac{x}{y},\ \frac{y}{z},\ \frac{z}{u},\ \frac{u}{x}$.

Sečtěme je a dělme třemi. Obdržíme

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{u}+\frac{u}{x}=s, \qquad (2)$$

klademe-li

$$\frac{a+b+c+d}{3}=s. \qquad (3)$$

Odčítejme pak postupně rovnice (1) od rovnice (2). Tak dostaneme

$$\frac{u}{x}=s-a,$$

$$\frac{x}{y}=s-b,$$

$$\frac{y}{z}=s-c,$$

$$\frac{z}{u}=s-d.$$

Poněvadž jest

$$\frac{u}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{u}=1,$$

musí býti

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)=1,$$

kdež s je definováno rovnicí (3).

17.

Do paraboly vepište maximální lichoběžník nad danou tětivou rovnoběžnou s tečnou vrcholovou, nad kratší základnou nový a podobně dále do nekonečna. Který jest obsah všech těchto lichoběžníků? *Týž.*

Řešení 17. Zaslal p. *Jan Zralý*, stud. V. tř. r. v Rakovníce.

Daná tětiva měj délku $2y_0$, druhá základna lichoběžníku $2y$; souřadnice vrcholů hledaného lichoběžníku jsou pak

$$A(x_0, y_0),\ B(x_0 - y_0),\ C(x, y),\ D(x, -y).$$

Obsah lichoběžníku jest pak dán výrazem

$$P = (y + y_0)(x_0 - x)$$

čili

$$P = x_0 y_0 + x_0 y - x y_0 - x y.$$

Dosadíme-li podle rovnice paraboly

$$x_0 = \frac{y_0^2}{2p},\quad x = \frac{y^2}{2p},$$

obdržíme

$$P = \frac{y_0^3}{2p} + \frac{y_0^2}{2p}\, y - \frac{y^2}{2y}\, y_0 - \frac{y^3}{2p}.$$

Závisí tudíž plocha P na funkci

$$f(y) = y_0^2 y - y_0 y^2 - y^3.$$

Krajní hodnoty její plynou z rovnice

$$f'(y) = y_0^2 - 2y_0 y - 3y^2 = 0,$$

o kořenech

$$y_1 = \frac{y_0}{3},\quad y_2 = -y_0.$$

Význam má pouze hodnota $y_1 = \frac{y_0}{3}$.

Příslušné x_1 jest pak $x_1 = \frac{1}{2p}\left(\frac{y_0}{3}\right)^2 = \frac{x_0}{9}$.

Jelikož pak $f''(y_1) < 0$, nastává pro tuto hodnotu maximum. Obsah lichoběžníku jest

$$P = \frac{16}{27p}\, y_0^3 = \frac{32}{27}\, x_0 y_0.$$

Další lichoběžník měl by plochu

$$P_1 = \frac{16}{27p}\left(\frac{y_0}{3}\right)^3 = \frac{P}{27}$$

a následující plochu

$$P_2 = \frac{P_1}{27} + \frac{P}{27^2}, \quad \text{atd.}$$

Tvoří tudíž plochy lichoběžníků nekonečnou konvergentní řadu geometrickou

$$S = \left(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{27^2} + \ldots\right) P,$$

jejíž součet

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{27}} P = \frac{27}{26} P = \frac{16}{13} x_0 y_0.$$

Označíme-li U plochu úseče parabolické omezené tětivou $2y_0$ pak

$$U = \frac{4}{3} x_0 y_0$$

a tedy

$$S : U = 12 : 13$$

18.

Vrcholy AB trojúhelníků ABC se posunují po osách souřadných, při čemž C opisuje ellipsu. Dokažte, že její plocha jest $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Jan Zralý*, stud. V. tř. r. v Rakovníce.

Označme φ úhel, který strana AC svírá s kladným směrem osy x; pak svírá strana BC s kladným směrem osy x úhel $\pi - \gamma$.

Souřadnice vrcholu C možno pak vyjádřiti ve tvaru

1. $$x = a \cos(\varphi - \gamma) = a(\cos\varphi \cos\gamma - \sin\varphi \sin\gamma)$$
2. $$y = b \sin\varphi.$$

Z rovnice 2. vypočteme $sin\ \varphi = \frac{y}{b}$, dosadíme do rovnice 1. a vyjádříme

$$cos\ \varphi = \frac{bx - ay\ sin\ \gamma}{ab\ cos\ \gamma}.$$

Užijeme-li vztahu

$$cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1,$$

dostaneme rovnici geometrického místa vrcholu C

$$\frac{(bx - ay\ sin\ \gamma)^2}{a^2b^2\ cos^2\gamma} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.}$$

a odtud po snadné úpravě

$$b^2x^2 - 2abxy\ sin\ \gamma + a^2y^2 = a^2b^2\ cos^2\gamma.$$

Rovnice

$$a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + a_{33} = 0 \tag{a}$$

představuje kuželosečku, jejíž střed leží v počátku. Je to ellipsa neb hyperbola, dle toho, je-li $a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 > 0$, neb < 0.

V našem případě

$$a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} = a^2b^2 - a^2b^2\,sin^2\gamma = a^2b^2\,cos^2\gamma > 0,$$

tak že ono geometrické místo je ellipsa.

Abychom našli její osy, otočme osy souřadnic tak, aby v rovnici transformované koefficient u xy vymizel.

Položme tedy

$$x = x'\,cos\ \vartheta - y'\,sin\ \vartheta$$
$$y = x'\,sin\ \vartheta + y'\,cos\ \vartheta.$$

Z rovnice (a) tak obdržíme

$$a'_{21}\,x'^2 + 2x'_{12}\,x'y' + a'_{22}\,y'^2 + a_{33} = 0. \tag{b}$$

Aby bylo $a'_{12} = 0$, nutno stanoviti ϑ tak, že

$$tg\ 2\vartheta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{12}}.$$

Dále je pak

$$a'_{11} + a'_{12} = a_{11} + a_{22}$$
$$a'_{11}\,a'_{22} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 \quad *)$$

---

*) Viz na př. *Zahradník*: Anal. geom. I. str. 105.

Osy ellipsy jsou pak

$$\sqrt{-\frac{a_{33}}{a'_{11}}}, \quad \sqrt{-\frac{a_{33}}{a'_{22}}},$$

tak že jich součin je

$$\frac{a_{33}}{\sqrt{a'_{11}\,a'_{22}}} = \frac{a_{33}}{\sqrt{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}}.$$

V daném případě je součin ten $ab \cos \gamma$.

I vidíme, že plocha té ellipsy skutečně jest

$$P = \pi\, ab \cos \gamma = \pi \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Možno též uvažovati takto:

Z rovnice 3. plyne snadno, že přímky $bx - ay \sin \gamma = 0$ a $y = 0$ (osa x) jsou sdružené průměry.

Uvažujeme-li totiž libovolnou rovnoběžku s osou x, $y = k$, je pro její průsečíky s ellipsou 3.

$$x = \frac{a\,k \sin \gamma}{b} \pm \frac{a \cos \gamma}{b} \sqrt{b^2 - k^2}$$
$$y = k,$$

z čehož vidíme hned, že tětiva ta je půlena bodem

$$x = \frac{ak \sin \gamma}{b}, \quad y = k,$$

ležícím na přímce $bx - ay \sin \gamma = 0$.

Koncové body těch sdružených průměrů budou

$$x = \pm\, a \cos \gamma, \quad y = 0$$

a

$$x = \pm\, a \sin \gamma, \quad y = \pm\, b,$$

tedy poloviční jich délky $A' = a \cos \gamma$ $B' = \sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2}$ a úhel, který svírají, dán vztahem

$$tg\, \omega = \frac{b}{a \sin \gamma}.$$

Značí-li A, B poloosy ellipsy A', B' poloviční délky sdružených průměrů a ω jich úhel, platí vztah $AB = A'B' \sin \omega$ *), tak že plocha ellipsy je dána vzorcem $\pi\, A'B' \sin \omega$.

*) Tamtéž, str. 128 (Theoremy Apolloniovy) neb *Vojtěch*, Geom. pro VII. tř. r. str. 105.

Ježto
$$\sin \omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2}},$$
bude plocha uvažované ellipsy
$$P = \pi\, ab \cos \gamma.$$

Poznámka.

Bod opíše jednou celý obvod ellipsy $x = a \cos(\varphi - \gamma)$, $y = b \sin \varphi$, probíhá-li φ hodnoty od 0 do 2π.

Plocha její dána pak křivkovým integrálem
$$P = \frac{1}{2} \int (x\, dy - y\, dx)$$
vztahujícím se na obvod té ellipsy. Užijeme-li tedy parametru φ, bude
$$dx = -a \sin(\varphi - \gamma)\, d\varphi, \quad dy = b \cos \varphi\, d\varphi$$
$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos(\varphi - \gamma) \,.\, b \cos + b \sin \varphi \,.\, a \sin(\varphi - \gamma))\, d\varphi$$
$$= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(\varphi - \gamma) \cos \varphi + \sin \varphi \sin(\varphi - \gamma))\, d\varphi$$
$$= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} \cos \gamma\, d\varphi = \frac{ab \cos \gamma}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = ab \cos \gamma.$$

O elliptickém pohybu rovinného útvaru viz *Jarolímek-Procházka*: Deskr. geom. pro vyšší šk. techn. str. 335 a násl.

19.

Trojúhelník ABC má stranu AB pevnou a vrchol C se pohybuje tak, že úhel, pod nímž je z C viděti stranu AB, je týž jako úhel, v němž se jeví strana AC z daného pevného bodu D, jenž leží v prodloužení strany AB. Nalezněte geometrické místo bodu C. *Týž.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Nebeský*, stud. VII. tř. r. v Praze III.

Trojúhelníky ABC a CBD jsou si podobny, poněvadž úhel při B je společný a úhly ADC a ACB jsou si rovny.

Odtud plyne úměrnost stran

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{DB} : \overline{BC}$$

a tedy

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \,.\, \overline{DB}.$$

Jest tedy geometrickým místem vrcholu C kružnice opsaná kolem středu B poloměrem rovným střední geometrické úměrné úseček AB a DB.

20.

Objem pravoúhlého rovnoběžnostěnu jest roven dvojnásobnému součinu řezu, jenž jde třemi rohy ležícími na hranách téhož trojhranu a vzdálenosti obou možných řezů rovnoběžných. Čtverec plochy tohoto řezu jest roven součtu čtverců plochy trojúhelníka, sestrojeného z rozměrů rovnoběžnostěnu a čtverce nad polovici tělesné úhlopříčky. *Týž.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Zralý*, stud. V. tř. r. v Rakovníce.

Uvažme, že oběma řezy, jichž plochu označíme p, rozdělí se úhlopříčka na tři stejné díly. Neboť v úhlopříčném řezu je úhlopříčka přeťata dvěma rovnoběžkami, jež jdou z rohu ke středu protější strany. Je tedy vzdálenost obou řezův táž, jako vzdálenost řezu od bližšího rohu. Ta je ale výškou v seříznutém čtyřstěnu, jichž objem lze vyjádřiti vzorcem $\frac{1}{3} vp$. Avšak objem onoho čtyřstěnu je šestinou objemu pravoúhlého rovnoběžnostěnu. Je tedy

$$\frac{1}{6} abc = \frac{1}{3} vp$$

a tudíž

$$abc = 2\,vp.$$

Označme si strany řezu $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Pak je pro plochu řezu dle Heronova vzorce

$$16\,p^2 = 2\,(\overline{a}^2 \overline{b}^2 + \overline{a}^2 \overline{c}^2 + \overline{b}^2 \overline{c}^2) - (\overline{a}^4 + \overline{b}^4 + \overline{c}^4).$$

Avšak

$$\overline{a}^2 = b^2 + c^2$$
$$\overline{b}^2 = a^2 + c^2$$
$$\overline{c}^2 = a^2 + b^2.$$

I dostaneme po jednoduché úpravě

$$p^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \qquad (1)$$

Pro plochu trojúhelníku sestrojeného z rozměrů rovnoběžnostěnu platí vzorec

$$16\triangle^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \qquad (2)$$

a pro tělesnou úhlopříčku

$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

tak že

$$u^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + d^2c^2 \qquad (3)$$

Sečtením rovnic (2) a (3) obdržíme

$$16\triangle^2 + u^4 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

a dosadíme-li do (1)

$$p^2 = \triangle^2 + \frac{u^4}{16} = \triangle^2 + \left(\left(\frac{u}{2}\right)^2\right)^2,$$

jak bylo dokázati.

Poznámka.

Vzorec (1) můžeme obdržeti také takto: Označme vrcholy pravoúhlého rovnoběžnostěnu $ABCD\ A'B'C'D'$. Uvažujme řez ACB'. Plocha jeho bude

$$p = \frac{1}{2}\bar b\,\bar v,$$

značí-li v něm $\bar v$ výšku spuštěnou z vrcholu B' na stranu $AC = \bar b$. Avšak $\bar v$ je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku, v němž jednou odvěsnou je $BB' = b$ a druhou výška V na přeponu v pravoúhlém trojúhelníku ABC. Je tedy

$$\bar v^2 = b^2 + V^2 = b^2 = \frac{a^2c^2}{\bar b^2},$$

ježto

$$V = \frac{ac}{\bar b}.$$

I bude

$$p^2 = \frac{1}{4}\left(b^2\bar b^2 + a^2c^2\right)$$

a odtud dostaneme ihned (1).

21.

Promítneme-li tři hrany pravoúhlého rovnoběžnostěnu, jež s tělesnou úhlopříčkou tvoří sborcený čtyřúhelník, na rovinu kolmou k úhlopříčce, vznikne trojúhelník, jehož obsah nezávisí na sledu rozměrů a jest roven $\frac{abc}{2u}$. *Osy tělesných úhlopříček a hran s nimi mimoběžných, jež označíme* v_a, v_b, v_c, *splňují relaci*

$$\frac{1}{v_a^2}+\frac{1}{v_b^2}+\frac{1}{v_c^2}=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Hrana je střední měřickou úměrnou tělesné úhlopříčky a svého průmětu na úhlopříčku mimoběžnou. *Týž.*

Řešení. Zaslal p. *Josef Bezdíček*, stud. V. tř. II. gym. v Brně.

Označme vrcholy pravoúhlého rovnoběžnostěnu A, B, C, D, A', B', C', D' dále $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

Průměr lomené čáry $ABCC'$ do roviny kolmé na úhlopříčku AC' jest zároveň průmětem trojúhelníku pravoúhlého ABC. Plocha tohoto trojúhelníku je $\frac{1}{2}ab$. Plocha průmětu P se obdrží, násobíme-li plochu promítanou *cos* její odchylky od průmětny. V našem případě je odchylka roviny ABC od roviny kolmé na úhlopříčku AC' rovna úhlu, který svírají kolmice na tyto roviny AC' a CC', tedy úhlu $AC'C$, tak že *cos* té odchylky je $\frac{c}{u}$. I dostaneme hledaný vztah $P = \frac{abc}{2u}$, jak vidno, nezávislý na pořádku rozměrů a, b, c.

Osa tělesné úhlopříčky, na př. AC' a hrany s ní mimoběžné $BC = b$, je vlastně vzdáleností hrany BC od rovnoběžného řezu úhlopříčného $AB'C'D$ a tedy výškou na přeponu v pravoúhlém trojúhelníku ABB'. Je tedy

$$v_b = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \frac{1}{v_b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}$$

a analogicky pro v_a, v_c. Odtud plyne vztah

$$\frac{1}{v_a^2}+\frac{1}{v_b^2}+\frac{1}{v_c^2}=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Průmět hrany na př. $BC = b$ na úhlopříčku mimoběžnou převede se na hledání průmětu hrany s ní rovnoběžné $B'C'$, která se s úhlopříčkou protíná; promítající rovinou je rovina trojúhelníku pravoúhlého $AB'C'$. Poněvadž odvěsna v pravoúhlém trojúhelníku je střední měřickou úměrnou celé přepony a průmětu odvěsny do přepony, je i hrana střední měřickou úměrnou tělesné úhlopříčky a svého průmětu do ní.

22.

Stanovte objem tělesa, jež vznikne, otočí-li se prostorový čtyřúhelník příkladu předešlého kolem tělesné úhlopříčky.

Týž.

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VII. r. v Praze III.

Užijme téhož označení jako v předešlé úloze.

Těleso vzniklé rotací prostorového čtyřúhelníku $ABCC'$ bude se skládati ze dvou rotačních kuželů K, L, vzniklých otočením hran AB a CC' a rotačního jednoplochého hyperboloidu H vytvořeného rotací hrany BC.

Označme si ještě $\overline{B}$ průmět vrcholu B a $\overline{C}$ průmět vrcholu C do úhlopříčky AC'.

Pak je dle předešlé úlohy výška kužele K

$$A\overline{B} = \frac{a^2}{u},$$

poloměr základny

$$\overline{B}B = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{u^2}} = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{u}$$

a tedy objem

$$K = \pi \frac{a^4(b^2 + c^2)}{u^3};$$

analogicky bude

$$L = \pi \frac{c^4(b^2 + a^2)}{u^3}.$$

Jedná se o výpočet objemu rotačního hyperboloidu H. Ten vznikne též rotací hyperboly

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

kolem osy vedlejší. Osa vedlejší x leží v mimoběžce AC' osa hlavní je osou obou mimoběžek AC' a BC, má tedy dle předešlé úlohy délku

$$A = v_b = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Jedná se o to, najíti polohu středu hyperboly S na úhlopříčce AC'. S je průsek osy mimoběžek s AC', tedy průsek průmětu BC do roviny $ADB'C'$ s AC. BC se promítá do $ADB'C'$ jako rovnoběžka s AD ve vzdálenosti rovné průmětu hrany $AB = a$ do AB', tedy rovné

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Platí tedy úměra

$$AS : u = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}} : \sqrt{a^2 + c^2}\quad .$$

t. j.

$$AS = \frac{a^2 u}{a^2 + c^2};$$

i bude

$$SC' = u - \frac{a^2 u}{a^2 + c^2} = \frac{c^2 u}{a^2 + c^2}.$$

Ježto

$$A\bar{B} = \frac{a^2}{u}, \quad \bar{C}C' = \frac{c^2}{u},$$

bude

$$\bar{B}S = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + c^2)u}, \quad S\bar{C} = \frac{b^2 c^2}{(a^2 + c^2)u}.$$

Vedlejší poloosu hyperboly vypočteme z toho, že na ní leží bod o souřadnicích

$$x_1 = \bar{B}B = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{u}$$

$$y_1 = -S\bar{B} = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 + c^2)u},$$

neb bod o souřadnicích

$$x_2 = \bar{C}C = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{u}$$

$$y_2 = S\bar{C} = \frac{b^2 c^2}{(b^2 + c^2)u}.$$

Tak najdeme

$$B = \frac{abc}{a^2 + c^2}.$$

Objem hyperboloidu je pak

$$H = \pi \int_{y}^{y_2} x^2 dy = \pi \frac{A^2}{B^2} \int_{y_1}^{y_2} (y^2 + B^2) dy$$

$$= \pi \frac{A^2}{B^2} \left[\frac{1}{3} (y_2^3 - y_1^3) + B^2 (y_2 - y_1) \right].$$

Dosadíme-li, najdeme po snadné úpravě

$$H = \frac{\pi b^2}{3 u^3} (3 a^2 c^2 + b^2 (a^2 + c)).$$

Objem celého rotačního tělesa bude pak

$$V = K + L + H = \frac{\pi}{3 u} (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2).$$

Poznámka.

Objem tělesa omezeného dvěma rovnoběžnými rovinami (základnami Z_1, Z_2) a libovolnou plochou křivou dá se vyjádřiti týmž vzorcem jako objem hranolce (pravidlo Simpsonovo)

$$\frac{v}{6} (Z_1 + Z_2 + 4 M),$$

značí-li v vzdálenost obou základen (výšku), M plochu řezu středního, tehdy, když plocha libovolného řezu rovinou rovnoběžnou se základními je kvadratickou (neb kubickou) funkcí vzdálenosti tohoto řezu od jedné ze základen. Tento požadavek je splněn při tělesech vyťatých rovnoběžnými rovinami z ploch stupně druhého.*)

Užijeme vzorce toho na výpočet objemu rotačního hyperboloidu H. I jest

$$v = \overline{B} \overline{C},$$

---

*) Viz Bydžovský-Vojtěch, Math. pro vyšší tř. r. str. 105.

což je průmět b do u, tedy dle předešlé úlohy

$$v = \frac{b^2}{u}.$$

$$Z_1 = \pi \overline{B}B^2 = \pi \frac{a^2(b^2 + c^2)}{u^2},$$

$$Z_2 = \pi \overline{C}C^2 = \pi \frac{c^2(a^2 + b^2)}{u^2}.$$

Jedná se ještě o výpočet plochy středního řezu. Bude to kruh o poloměru rovném úsečce spojující půlící bod $\overline{M}$ úsečky $\overline{B}\,\overline{C}$ s půlícím bodem M úsečky BC.

I bude

$$\overline{M}M^2 = AM^2 - A\overline{M}^2,$$

$$AM^2 = a^2 + \frac{b^2}{4},$$

$$A\overline{M} = A\overline{B} + \frac{1}{2}\overline{B}\,\overline{C} = \frac{a^2}{u} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{u},$$

tak že

$$\overline{M}M^2 = \frac{4a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2}{4u^2}$$

a

$$M = \pi \frac{4a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2}{4u^2}.$$

Tak najdeme konečně zase

$$H = \frac{\pi b^2}{3u^3}(3a^2c^2 + b^2(a^2 + c^2)).$$

Z deskriptivní geometrie.

1.

Danou kuželosečkou proložiti rotační plochu kuželovou
a) jdoucí daným bodem,.
b) dotýkající se přímky dané. Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal pan *Miloslav Jakeš*, stud. VIII. tř. reál. gymn. v Chrudimi.

Budiž rovina dané kuželosečky ϱ, rovina souměrnosti kuželosečky, procházející hlavní osou její, budiž σ. Geometrické místo vrcholů rotačních kuželů, jež procházejí danou kuželosečkou, je kuželosečka v rovině σ, jejíž vrcholy jsou v ohniskách dané kuželosečky a ohniska ve vrcholech jejích.

Důkaz: Označme vrcholy dané kuželosečky A, B, ohniska F, F' a výstřednost její e. Osa kužele, tudíž i vrchol V leží v rovině σ, která protne plochu kuželovou v povrchových přímkách AV a BV.

Dotyčný bod koule vepsané kuželi a dotýkající se i roviny ϱ (místo koule můžeme vzíti jen její hlavní kružnici v σ) je ohnisko (třebas F při A) na rovině ϱ, na povrchových přímkách, nechť to je T_1 na AV a T_2 na BV. Protože pak tečny vedené z bodu ke kouli (kružnici) jsou stejně dlouhé, platí:

$$\overline{AT_1} = \overline{AF},\ \overline{BT_2} = \overline{BF},\ \overline{VT_1} = \overline{VT_2}.$$

Podle toho

$$\overline{AV} = \overline{AT_1} + \overline{T_1V} = \overline{AF} + \overline{T_1V}$$
$$\overline{BV} = \overline{BT_2} \pm \overline{T_2V} = \overline{BF} \pm T_1V,$$

kde horní znaménko platí, je-li daná kuželosečka *ellipsa*, dolní, je-li *hyperbola*.

Rozdíl po případě součet $\overline{AV} \mp \overline{BV} = \overline{AF} \mp \overline{BF}$, ježto pak $\overline{BF} = \overline{AF'}$ je $AV \mp BV = AF \mp AF' = 2e$.

Rozdíl (součet) vzdáleností bodu V od A a B je roven vzdálenosti ohnisek dané kuželosečky. Bod V leží tudíž na *hyperbole (ellipse)*, jejímiž ohnisky jsou A, B a hlavní osa $\overline{FF'}$, čímž je hořejší věta dokázána.

a) Obě kuželosečky máme protnouti přímkou, která by procházela daným bodem M. Sestrojíme kuželovou plochu, jejíž řídící křivkou je jedna z kuželoseček a vrcholem bod M, a protneme ji druhou kuželosečkou. Povrchová přímka procházející průsečíkem náleží hledanému kuželi; vrchol V je na průsečíku jejím s kuželosečkou v σ. Další povrchové přímky dostaneme spojením nalezeného vrcholu V s danou kuželosečkou.

Protože kuželosečka protíná plochu kuželovou ve čtyřech bodech, je úloha *čtyřznačná*.

b) Zobrazíme průsečík dané tečny t s rovinou ϱ. Z něho vedeme tečnu t' k dané kuželosečce; rovina $\tau \equiv (t\, t')$ je tečná k hledanému kuželi, leží v ní tudíž jeho vrchol V. Průsečík roviny τ s pomocnou kuželosečkou je tedy hledaný vrchol V.

Protíná-li tečna t rovinu ϱ uvnitř dané kuželosečky (t. j. v té části, kde je ohnisko), není řešení. Obecně je úloha rovněž čtyřznačná.

Případ b) řeší pan *Jaromír Mareš*, stud. VII. reálky v Praze III. též přímo: bez použití křivky fokální následovně:

Daná kuželosečka k mějž střed S a ohniska F_1, F_2 v rovině ϱ a tečna plochy kuželové budiž t. Veďme z průsečíku M tečny t s rovinou ϱ ke kuželosečce k tečny t_1, t_2. Tečnou t a jednou z tečen t_1, t_2 jest určena rovina tečná k hledanému kuželi. Nyní za použití věty Dandelinovy, sestrojíme středy koulí vepsaných co průsečíky kolmic vztyčených v F_1 a F_2 k rovině ϱ a rovin tečných. Středy koulí leží na ose kužele a v průsečíku roviny tečné s osou kužele dostaneme vrchol plochy kuželové. Je-li daná kuželosečka parabola sestrojíme vrchol co průsečík tří rovin a to roviny tečné ($t\ t_{1,2}$), roviny tečné rovnoběžné s ϱ k sestrojené ploše kulové, a roviny kolmé k ϱ přímkou $F_1\,F_2$. Jelikož jest možno sestrojiti dvě tečny z bodu M ke kuželosečce a ke každé rovině tečné dva kužele, jest daná úloha nejvýše čtyřznačná. Dvojznačná v případě, že tečna t protne rovinu ϱ v bodě kuželosečky k, nemožná, protne-li uvnitř kuželosečky k danou rovinu ϱ.

2.

Sestrojiti rotační hyperboloid, dán-li svým středem, povrchovou přímkou a podmínkami, že jednu danou rovinu protíná v parabole a druhou v rovnoosé hyperbole.

Dr. *Josef Klíma.*

Pozn. autorova: Úloha je přeurčena, stačí totiž jen jedna z posledních podmínek.

Řešení. V podstatě zaslal p. *J. Faus,* st. VI. r. v Pardubicích.

Uvažujme nejprve, že dán střed S a povrchová přímka m hyperb. rotačního. Osa o hledaného hyperboloidu leží v rovině ω kolmé v bodě S ku kolmici z bodu S na přímku m spuštěnou.

Asymptotický kužel hled. hyperboloidu je tudíž rotační kužel o vrcholu S, mající osu o v rovině $\omega \parallel m$ a obsahuje površku $m' \parallel m$ ležící patrně v rovině ω. K určení osy kužele toho a tudíž i osy hyperboloidu stačí nyní jedna ze zbývajících podmínek, řekněme, že a) dána rovina ϱ, jež má hyperb. protínati v parabole. Pak rovina $\varrho' \parallel \varrho$ jdoucí bodem S musí být rovinou tečnou kužele rot. asympt. Jest sestrojiti tudíž osu rotač. kužele, daného vrcholem S, rovinou ω procházející touto osou, površkou m' (ležící v ω) a rovinou tečnou ϱ'. Opišme kol středu S plochu kulovou. Tato protne rovinu ϱ' v kružnici hlavní l, hledaný kužel pak v kružnici řídící, jejíž rovina patrně musí státi kolmo k rovině ω, procházeti bodem M, v němž m' protíná kouli a býti rovinou tečnou ke kružnici l. Stačí tudíž k válci, který má za řídící křivku kružnici l a jehož povrchové přímky jsou kolmy k rovině ω proložiti bodem M roviny tečné, na něž jsou hledané osy dvou obecně urč. rotač. kuželů asympt. kolmy. Úloha je obecně dvojznačná.

b) Zvolena-li podmínka, že má danou rovinu σ protínati v rovnoosé hyperbole, pak úloha řeší se obdobně, jen kružnice l v rovině ϱ je nahrazena kružnicí k v rovině $\sigma' \parallel \sigma$ jdoucí obdobně bodem S a mající poloměr rovný poloměru zvolené koule opsané kol středu S násobenému $sin\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Úloha v tomto případě vždy dvojznačná.

Pozn. Zvolíme-li na kouli k bodu P bod diametrálně protilehlý, dostaneme patrně tytéž osy.

3.

Plocha kulová dána dvěma různoběžnými tečnami a dvěma tečnými rovinami; sestrojiti ji. Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VII. reálky v Praze III.

Dány jsou tečné roviny τ_1, τ_2 a tečny různoběžné t_1 a t_2. Středy plochy kulové najdeme co průsečík tří geometrických míst. Geometrické místo středů ploch kulových, které se dotýkají dvou tečných rovin τ_1, τ_2 jest jich rovina symetrie σ. Geometrické místo středů ploch kulových dotýkajících se dvou různoběžných tečen t_1 a t_2 jest rovina ϱ kolmá k rovině (t_1, t_2), proložená osou úhlu s_1, t_2. Tedy geometrické místo středů jest průsečnice s rovin ϱ a σ. Geometrické místo středů ploch kulových dotýkajících se roviny tečné τ a tečny t jest plocha kuželová o vrcholu

V co průsečíku tečny t s rovinou tečnou τ a křivce řídící, již určíme co průsek roviny rovnoběžné s τ ve vzdálenosti třeba a a rotační plochy válcové o ose t a řídící kružnicí o poloměru také a. Průsečnice s protne plochu kuželovou ve dvou bodech, hledaných to středech ploch kulových. Průsečnice s jsou celkem čtyři, úloha jest tedy nejvýše osmiznačná. Poloměr plochy kulové nalezneme co vzdálenost středu od některé roviny tečné.

Jiné řešení zaslal p. *Miloslav Jakeš*, st. VIII. tř. reál. gymn. v Chrudimi.

Střed koule leží v rovině souměrnosti daných tečen a v rovině souměrnosti daných rovin tečných, tedy na průsečnici s obou rovin souměrnosti, která protíná průsečnici daných rovin v bodě O. Podle něho jsou homothetické všechny koule se středem na s a dotýkající se daných rovin. Zvolme jednu takovou kouli a sestrojme k ní tečnu t' homothetickou s některou danou tečnou, sestrojme bod dotyčný a jemu odpovídající bod na dané tečně. Ten náleží hledané kouli, již pak snadno určíme jakožto homothetickou ke kouli sestrojené.

Úloha je obecně osmiznačná, neboť dané roviny mají 2 roviny souměrnosti, rovněž dané tečny, takže dostáváme 4 průsečnice s; na každé přímce s lze pak sestrojiti 2 středy koulí, ježto v pomocné kouli můžeme vésti dvě tečny t'.

4.

Rotační kuželová plocha dána osou a dvěma tečnami.

Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal pan *Miloslav Jakeš*, stud. VIII. tř. r. g. v Chrudimi.

Rotací tečen kolem dané osy vzniknou dva rotační hyperboloidy jednoploché, jichž se musí kuželová plocha dotýkati.

Nejlépe je zvoliti první průmětnu kolmo k ose plochy kuželové, pak narýsujeme v druhém průmětě meridiány hyperboloidů rovnoběžné s druhou průmětnou a k nim vedeme společné tečny. Rotací jejich kolem osy vznikne hledaný kužel.

Poněvadž lze obecně ke dvěma hyperbolám o společné vedlejší ose (co do polohy) vésti dva páry společných tečen, souměrných podle této osy, jest úloha *dvojznačná*. Jsou-li obě tečny stejně vzdáleny od osy, přejde jeden kužel ve válec. Jestliže pak obě tečny vytvoří otočením týž hyperboloid, je úloha *neurčitá*.

Jiné řešení zaslal pan *Bohumil Mlateček*, st. VII. tř. reál. v Pardubicích.

Jedna z daných tečen t otáčejíc se kol osy dané o vytvoří rotační hyperboloid, jehož všechny kužele opsané z bodů imaginárné osy o dotýkají se tečny t. Z nich třeba vzíti ony, jež dotýkají se druhé dané tečny t_1. Proložíme tudíž tečnou t_1 roviny tečné k hyperboloidu tomu, ty jsou obecně dvě a jsou určeny přímkou t_1 a površkami rotačního hyperboloidu jdoucími body *průsečnými* tečny t_1 s hyperboloidem tím.

Tyto dvě tečné roviny protínají osu o ve vrcholech *dvou* rotačních ploch kuželových, vyhovujících daným podmínkám.

Poznámka.

Úloha je patrně možnou jen tehdy, když přímka t_1 protíná neb dotýká se hyperboloidu rotačního, opsaného tečnou t kol osy o.

5.

Užitím paral. stínu vrženého plochy kulové sestrojiti ellipsu danou ohniskem, délkou vedlejší osy a dvěma body.

Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal p. *Jaromír Mareš*, stud. VII. tř. reálky v Praze III.

Pro zjednodušení vložme dané tři body do půdorysny. Dle věty Quetelet-Dandelinovy sestrojíme kouli poloměru malé poloosy, dotýkající se půdorysny v ohnisku. Z druhých daných bodů opišme kouli rotační plochy kuželové o středech v daných bodech a hledaný směr paprsků světelných budou povrchové přímky obou ploch kuželových navzájem rovnoběžné. Provedeme to tím způsobem, že jeden kužel pošineme až jeho vrchol padne do vrcholu kužele druhého a sestrojíme pak jich společné površky, jež budou obecně čtyři.

Místo průseku dvou rotačních ploch kuželových dosti obtížného, možno použíti trojhranu, který jest určen všemi třemi stranami a to jedna jest úhel obou os ploch kuželových a druhé dvě pak poloviční úhly při vrcholu jednotlivých kuželů. Směr světelných paprsků jest pak přímka protilehlá úhlu obou os. Nyní sestrojíme osvětlení a vržený stín plochy kulové pro nalezený směr paprsků světelných. Řešení jest obecně čtyřznačné.

Poznámka.

Společné površky dvou rotačních ploch kuželových o společném středu, možno výhodně sestrojiti též použitím plochy kulové, opsané kol tohoto středu, jež protne prvou ve dvou kružnicích a druhou rovněž, jichž společné body spojené se středem, určují površky společné.

6.

Sestrojiti jest plochu kulovou, procházející daným bodem a dotýkající se daných dvou ploch kulových, tak aby úsečka spojující body dotyčné měla danou délku. Fr. *Mádle.*

Řešení autorovo.

Dané plochy kulové buďtež

$$K_1(S_1, r_1),\quad K_2(S_2, r_2),\ r_1 > r_2;$$

délka jich středné budiž c. vnější střed jich podobnosti O_1, vnitřní O_2, daný bod R, A dotyčný bod na K_1, B na K_2.

Délka společné vnější tečny jest t_1, vnitřní t_2. Průsečíky středné s plochami K_1 a K_2 označme si pořadem

$$M, N, P, Q\,.\,(\overline{MO_1} = m,\ \overline{NO_1} = n,\ \overline{PO_1} = n,\ \overline{QO_1} = q;$$
$$\overline{MO_2} = m_1,\ \overline{NO_2} = n_1,\ \overline{PO_2} = p_1,\ \overline{QO_2} = q_1).$$

a) Rozřešme úlohu nejprve pro ten případ, že K_1 a K_2 leží mimo sebe. Pak bod R musí ležeti mimo obě dané plochy.

Spojnice $\overline{AB} = d$ může procházeti buď bodem O_1 (dotýká-li se hledaná plocha daných buď obou zevně nebo obou uvnitř) nebo bodem O_2 (je-li dotyk hledané plochy s danými *střídavě* s jednou vnější a s druhou vnitřní).

α) Spojnice $\overline{AB}$ prochází bodem O_1. Pro délku d platí zde vymezení

$$\overline{MQ} \geqq d \geqq \overline{NP}\,.$$

Možno pak rozlišovati případy

$$\alpha_1)\ \overline{NP} < d < t_1,\quad \alpha_2)\ t_1 < d < \overline{MQ},\quad \alpha_3)\ \overline{NP} = d,$$
$$\alpha_4)\ t_1 = d,\quad \alpha_5)\ \overline{MQ} = d.$$

α_1) V tomto případě jest dotyk hledané plochy s danými vnější. Uvažujme vše v rovině, jež protíná dané plochy a hledanou v hlavních kružnicích a označme si $\overline{O_1B} = x$. Pak z podobnosti trojúhelníků O_1MA a O_1QB získáme rovnici

$$x(x + d) = mq$$

čili

$$x^2 + dx - mq = 0,$$

$$x_{1,2} = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + mq}.$$

Kořen

$$x_1 = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + mq}$$

jest vzdálenost bodu B od O_1, absolutní hodnota kořenu x_2

$$(|x_2| > x_1)$$

přísluší bodu A. Oba kořeny dávají jedinou tětivu $\overline{AB}$, nehledíme-li k souměrnosti podle středné S_1S_2.

Spojnice S_1A a S_2B protnou se pak v bodě S_0, jenž jest středem jedné takové plochy kulové, dotýkající se daných tak, že $\overline{AB} = d$.

Otočíme-li nyní trojúhelník $S'_1S'_2S'_0$ kol osy $S'_1S'_2$, pak S'_0 vytvoří kružnici k, jež jest geom. místem středů všech ploch kulových, dotýkajících se daných a vyhovujících podmínce

$$\overline{AB} = d.$$

Sejmeme-li jejich poloměr $\overline{AS_0} = \overline{BS_0}$ a opíšeme-li tímto poloměrem z daného bodu R kouli, tu protne se s rovinou σ kružnice k v jiné kružnici k'; průsečíky kružnic k a k' jsou pak středy žádaných koulí.

Řešení je v tomto případě dvojznačné, jednoznačné nebo nemožné podle toho, jestli se kružnice k a k' protínají ve 2 bodech, dotýkají nebo neprotínají.

α_2) V tomto případě dotýká se hledaná plocha obou daných uvnitř. Označíme-li si opět $\overline{O_1 B} = x$, obdržíme touž rovnici jako v α_1)

$$x(x + d) = np = mq.$$

Postup následující jest týž jako v α_1); počet řešení závisí opět na vzájemné poloze kružnic k a k'.

α_3) Je-li $d = \overline{NP}$, jest možna pouze jediná koule; nesmí však v tomto případě bod R býti dán, leč by vzdálenost jeho od středu úsečky $\overline{NP}$ rovnala se $\frac{1}{2}\overline{NP}$. Případ tento patří vlastně do α_1), jelikož nastává dotyk vnější.

α_4) Je-li $d = t_1$, pak hledané plochy kulové přecházejí ve společné roviny tečné daným bodem procházející. Úloha pro tento případ jest opět dvojznačná, po případě jednoznačná nebo nemožná. Tento případ jest přechodem z dotyku vnějšího do vnitřního.

α_5) V tomto případě obdržíme jedinou kouli a bod R nesmí býti dán, leč by od středu úsečky $\overline{MQ}$ byl vzdálen $\frac{1}{2}\overline{MQ}$. Případ tento náleží do α_3), neboť nastává dotyk vnitřní.

β) Předpokládejme, že danou tětivu $\overline{AB} = d$ můžeme položiti na ony hlavní kružnice také tak, že prochází bodem O_2. Pak může se hledaná plocha dotýkati buď plochy K_1 zevnitř a K_2 zevně nebo K_1 zevně a K_2 zevnitř.

První případ nastává, je-li d položena mezi společnou vnitřní tečnou a spojnicí $\overline{MP}$, druhý případ, má-li d polohu mezi t_2 a spojnicí $\overline{NQ}$.

Zde nutno rozhodnouti, jaký má d průběh. Uvažujme tedy oba zmíněné případy dohromady a označme si $\overline{O_2 B} = y$. Pak obdržíme rovnici

$$y(d - y) = q_1 n_1 = m_1 p_1,$$

$$y_{1.2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - q_1 n_1},$$

z čehož patrno, že nejmenší hodnota, jaké d smí nabýti, jest

$$d = 2\sqrt{q_1 n_1} = 2\sqrt{m_1 p_1}.$$

Tato d_{min} má vždy polohu mezi t_2 a spojnicí $\overline{NQ_1}$.

Délka d pak má následující průběh:

Klesá od $\overline{MP}$ přes t_2 do d_{min}, odtud pak stoupá do $\overline{NQ}$. Jelikož pak jest $\overline{MP} > \overline{NQ}$, platí pro délku d vymezení

$$d_{min} < d < \overline{MP}.$$

Pro krajní případy $d = \overline{NQ}$ nebo $d = \overline{MP}$ musil by bod R býti tak dán, aby vzdálenost jeho od středu úsečky $\overline{NQ}$ resp. $\overline{MP}$ byla rovna

$$\frac{1}{2}\overline{NQ} \text{ resp. } \frac{1}{2}\overline{MP}.$$

Pro $b = \overline{MP}$ pak byla by úloha jednoznačnou, pro $d = \overline{NQ}$ trojznačnou (uvažujme zde značnost specielně pro případ β), na konec pak ustanovíme značnost úhrnnou spojením případů α) a β)).

Když $d = t_2$, pak musíme rozlišiti případy 1) $t_2 > \overline{NQ}$, 2) $t_2 < \overline{NQ}$:

1. Hledané plochy kulové přecházejí v společné vnitřní roviny tečné bodem R procházející; úloha dvojznačná.

2. Hledané plochy kulové jsou jednak společné vnitřní roviny tečné jdoucí bodem R, jednak 2 plochy kulové, dotýkající se K_1 zevně a K_2 zevnitř, jelikož t_2 může obdržeti též polohu tětivy mezi d_{min} a $\overline{NQ}$. Úloha čtyřznačná.

Spojme nyní oba případy α) a β) dohromady:

1. Když $\overline{NP} = d$, vyhovuje jediná koule a bod R nesmí býti dán, leč s podmínkou v α_3) vyslovenou.

2. Je-li $\overline{NP} < d < 2\sqrt{q_1 n_1}$, jest úloha dvojznačnou (pro bod O_1) a v případě $d = 2\sqrt{q_1 n_1}$ čtyřznačnou. (2 výsledky pro O_1 a 2 pro O_2.)

3. Je-li $2\sqrt{q_1 n_1} < d < \overline{NQ}$, jest úloha šestiznačnou. (2 výsledky pro O_1, 4 pro O_2.)

4. Je-li $d = \overline{NQ}$ a má-li daný bod R od středu úsečky $\overline{NQ}$ vzdálenost $\frac{1}{2}\overline{NQ}$, tak obdržíme 5 koulí (2 pro O_1, 3 pro O_2).

5. Když $d = t_2$, dostaneme, je-li $t_2 > \overline{NQ}$, 4 výsledky, z nichž 2 jsou společné vnitřní roviny tečné a 2 koule (koule pro O_1, roviny pro O_2); je-li $t_2 < \overline{NQ}$, jest úloha 6značnou —

4 koule a 2 roviny (2 koule pro O_1, 2 koule a 2 roviny pro O_2).

6. Je-li $\overline{NQ} < d < \overline{MP}$, vychází 4-značné úlohy a v případě $d = \overline{MP}$ trojznačnost (je-li však bod R umístěn podle podmínky nahoře vyslovené) — 2 řešení pro O_1 a 1 pro O_2.

7. Když $\overline{MP} < d < \overline{MQ}$, pak úloha jest jen 2-značnou.

8. V případě $d = \overline{MQ}$, vyhovuje 1 koule, ovšem opět s podmínkou vhodného umístění bodu R.

Tato diskusse platí pro ten případ, že zmíněné kružnice k a k' protínají se ve dvou bodech. Kdyby se neprotínaly, počet řešení by se změnil.

b) Protínají-li se dané koule K_1 a K_2, pak může bod R ležeti buď vně obou koulí nebo uvnitř kterékoliv z nich. Je-li vně obou koulí, odpadá vyšetřování pro vnitřní střed podobnosti, je-li uvnitř, odpadá vyšetřování pro vnější.

Kdyby se dané koule dotýkaly, musil by bod R ležet mimo obě koule.

c) Případ, kdy z daných koulí K_1 a K_2 jedna ležela by uvnitř druhé, řešil a diskutoval se podobně vzhledem k tomu, že středy podobnosti jsou i v tomto případě reálné.

7.

Určete řídící kružnici rotační plochy kuželové o středu S, jestliže a) oblina prochází body A, B a dotýká se přímky m, b) oblina prochází bodem A a dotýká se přímek m a n.

Prof. *Jiří Archleb.*

Řešení. Zaslal p. *J. Faus*, st. VI. r v Pardubicích.

a) Protneme-li obě dané povrchové přímky hledaného kužele ($\overline{AS}$ a $\overline{BS}$) a rovinu dotyčnou ϱ, jdoucí středem S a přímkou m, koulí, o libovolném poloměru a středu v S, jest určitý rovinný průsek této koule řídící kružnicí hledané plochy kuželové. Tato kružnice musí však procházeti oběma průsečíky obou povrchových přímek s koulí a musí se dotýkati hlavní kružnice k, vzniklé průsekem roviny ϱ s koulí. — Abychom těmto podmínkám vyhověli, musíme proložiti přímkou jdoucí oběma průsečíky M_1 a M_2 povrchových přímek s koulí, rovinu takovou, aby se kružnice k dotýkala. Rovinu ϱ kružnice protneme přímkou $\overline{M_1M_2}$ a z takto vzniklého průsečíku vedeme tečny ke kružnici k. Roviny proložené přímkou $\overline{M_1M_2}$ a postupně první a druhou tečnou, protínají zvolenou kouli v řídících kružnicích rotač. ploch kuželových, vyhovujících dané podmínce. — Poněvadž roviny jsou možné dvě, jest úloha obecně dvojznačná.

b) Opět protneme *jednu* povrch. přímku $(\overline{SA})$ a dvě tečné roviny $\varrho \equiv (m, S)$ a $\sigma \equiv (n, S)$ koulí libovolného poloměru o středu S.

Abychom zde stanovili řídící křivku hledaného kužele musíme průsečíkem M přímky $\overline{SA}$ s koulí vésti rovinu takovou, aby se dotýkala obou kružnic, které vzniknou průsekem dotyčných rovin ϱ a σ s koulí. Oběma kružnicemi proložíme válec, jehož osa, vycházející ze středu S, leží v rovině souměrnosti obou kružnic. Válce jsou možné dva, ale tečné roviny z bodu M možno vésti pouze k jednomu válci, neboť bod M jest uvnitř válce druhého. Průseky těchto dvou tečných rovin s koulí jsou hledané řídící kružnice, dané podmínce vyhovujících. rotací ploch kuželových. Poněvadž roviny jsou opět dvě, jest úloha zase obecně dvojznačná.

Pan *Jaromír Mareš* převádí případ *b*) na *a*) tím způsobem, že sestrojí k površce $\overline{AS}$ površku symetrickou vzhledem k rovině souměrnosti daných rovnic jsoucí v témže úhlu jako je površka $\overline{SA}$,

Z fysiky.*)

1.

Na drsném stole se nachází řada stejných peníźů poloměrů r a hmoty m, jichž středy leží na přímce a ve stejné vzájemné vzdálenosti $2r + d$. Vyšineme-li prvý rychlostí V tak, aby narazil přímo na druhý, jaký bude výsledný pohyb? Co se stane, bylo-li $d = 0$? *Kučera.*

Řešení.

Nazveme-li koefficient tření mezi penízem a stolem μ, jest síla pohyb zpozďující $\mu m g$ a pohyb peníze po stole jest rovno-

*) Článkem v úlohách citovaným je článek prof. Kučery „O rázu těles" v tomto ročníku uveřejněný.

měrně zpozděný se zpozděním μg. Peníz prvý, vyšinutý z původní polohy rychlostí V, bude míti po proběhnutí vzdálenosti d rychlost u_1, kterou narazí na peníz druhý. Při tomto pohybu jest ztráta kinetické energie

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m u_1^2$$

rovna práci proti tření na trati d, t. j. $\mu m g d$, takže

$$V^2 - u_1^2 = 2 \mu g d.$$

Při srážce peníze prvého a druhého jsou rychlosti před rázem u_1 a $u_2 = 0$, po rázu pak v_1 a v_2, jež jsou vázány vztahem Newtonovým (viz článek „O rázu těles" rovnice (12))

$$v_1 - v_2 = - k u_1,$$

kde k je koefficient restituce, a větou o zachování hybnosti, jež zde zní

$$u_1 = v_1 + v_2.$$

Z toho

$$v_1 = \frac{1}{2} u_1 (1 - k) \quad v_2 = \frac{1}{2} u_1 (1 + k).$$

Po rázu má peníz prvý rychlost v_1 a vykonává pohyb rovnoměrně zpozděný, takže se zastaví po proběhnutí vzdálenosti s_1, dané vztahem

$$v_1^2 = 2 s_1 \mu g$$

čili

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2 \mu g} = \frac{u_1^2 (1 - k)}{8 \mu g},$$

ač nenarazil-li mezi tím na peníz druhý, který po rázu se počal pohybovati rychlostí v_2. Vztah mezi počáteční rychlostí peníze prvého a druhého jest dle

$$V^2 - u_1^2 = 2 \mu g d$$

a

$$v_2^2 = \frac{1}{4} u_1^2 (1 + k)^2$$

po vyloučení u_1

$$V^2 = 2 \mu g d + \frac{2 v_2^2}{(1 + k)^2}.$$

Stejně obdržíme počáteční rychlost v_3 peníze třetího a po nárazu peníze druhého, dosadíme-li za V nyní v_2, za v_2 pak v_3 a podobně i dále.

Pohyb v řadě penízů pokračuje tak dlouho, až počáteční rychlost peníze n-tého nestačí k proběhnutí vzdálenosti d, takže peníz n-tý proběhne vzdálenost s_n, která jest

$$s_n = \frac{v_n^2}{2\mu g} \leqq d.$$

Kdyby byl ráz dokonale pružný, koeficient restituce roven 1, pak z hořejších vztahů

$$v_1 = 0 \quad \text{a} \quad s_1 = 0,$$

t. j. peníz prvý po nárazu na druhý zůstane stát, druhý pak přejme celou jeho zbývající rychlost $v_2 = u_1$. Každým proběhnutím vzdálenosti d změní se čtverec původní rychlosti o $2\mu g d$, takže pohyb postoupí až k n-tému penízi, když

$$n \,.\, 2\mu g d \,.\geqq V^2 > (n-1)\, 2\mu g d.$$

Dotýkají-li se navzájem všechny nedokonale pružné mince, t. j. je-li $d = 0$, $0 < k < 1$, tu

$$u_1 = V, \quad v_2 = \frac{1}{2} V(1+k),$$

$$u_2 = v_2, \quad v_3 = \frac{1}{2} u_2 (1+k) = V \,.\left(\frac{1+k}{2}\right)^2,$$

a podobně dále, takže počáteční rychlost peníze posledního, n-tého jest

$$v_n = V\left(\frac{1+k}{2}\right)^{n-1}.$$

S touto rychlostí odskočí a doběhne do vzdálenosti

$$s_n = \frac{v_n^2}{2\mu g} = \frac{V^2(1+k)^{2(n-1)}}{2^n \mu g}.$$

Kdyby byly všechny mince dokonale pružné, bylo by $v_n = V$, poslední odskočila by s touž počáteční rychlostí, jakou měla při rázu mince prvá. Tento případ předvádívá se lépe na rázostroji, kde místo penízů užívá se koulí zavěšených, a rychlost koule prvé i poslední se měří elongací od polohy rovnovážné.

2.

Na ledovou hladinu dopadají kroupy ve směru o 30° odchýleném od svislice, a odskakují v úhlu 60°. Předpokládáme-li led absolutně hladký, jak veliký jest koeficient restituční? Od-

skočí-li kroupy do výše 60 cm, s jakou rychlostí dopadly na led? Do jaké výše odskočí, když byly podruhé na led dopadly?

Kučera.

Řešení.

Rychlost u dopadajících krup rozložme na složku vertikální $u_1 = u \,.\, \cos\alpha$ a horizontální $u'_1 = u \,.\, \sin\alpha$. Druhá složka se nárazem nezmění, takže po něm jest složka horizontální $v'_1 = u'_1$, složka vertikální dle článku $v_1 = -ku_1$. Výsledná rychlost tvoří s kolmicí dopadovou úhel β, daný vztahem

$$tg\,\beta = \left|\frac{v'_1}{v_1}\right| = \frac{u'_1}{ku_1} = \frac{tg\,\alpha}{k}.$$

Z toho $k = \dfrac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$ a dosazením $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$ plyne $k = \dfrac{1}{3}$.

K stanovení výšky h_1 po prvém odrazu stačí uvažovati vertikální složku rychlosti $v_1 = -ku_1$. Dle známého vzorce jest

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{k^2u_1^2}{2g}.$$

Dosazením

$$h_1 = 60\ cm,\quad k = \frac{1}{3},\quad g = 980\ cm/sec^2$$

plyne

$$u_1^2 = 1\cdot0584 \,.\, 10^6 \left(\frac{cm}{sec}\right)^2,\quad u_1 = 1028\cdot6\ \frac{cm}{sec}.$$

Celková rychlost dopadajících krup jest

$$u = \frac{u_1}{\cos\alpha} = 1188\,\frac{cm}{sec} = 11\cdot88\,\frac{m}{sec}.$$

Vertikální složka u_2 rychlosti při druhém dopadu je

$$u_2 = -v_1 = ku_1$$

a druhým odrazem se změní ve $v_2 = -ku_2 = -k^2u_1$.

Výška h_2 po druhém odraze jest pak

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{k^4u_1^2}{2g} = k^2h_1 = \frac{1}{9}\,60\ cm = 6\cdot66\ldots cm.$$

3.

Na vodorovnou půdu pustíme pružnou kouli. Jaký jest koefficient restituce, vyskočila-li po druhém nárazu do výše poloviční než byla výška, s níž jsme ji pustili? *Kučera.*

Řešení.

Podobně jako v úloze druhé máme rychlost při prvém dopadu u_1, při druhém $u_2 = ku_1$, a po druhém odraze

$$v_2 = - ku_2 = - k^2 u_1 .$$

Výška, z níž jsme kouli pustili, jest

$$h = \frac{u_1^2}{2g},$$

výška po druhém odrazu podobně

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{k^4 u_1^2}{2g} .$$

Je-li tedy $h_2 = \frac{1}{2} h$, je

$$\frac{k^4 u_1^2}{2g} = \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{2g} \quad \text{čili} \quad k = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} .$$

4.

Projektil narazil na drsnou stěnu v dopadovém úhlu 45°. Je-li odrazový úhel stejně veliký, dokažte, že koefficient tření μ jest

$$\mu = \frac{1 - k}{1 + k},$$

kde k jest koefficient restituční. *Kučera.*

Řešení.

Rychlost u projektilu rozdělíme na složku kolmou k stěně $u_1 = u \cos \alpha$, a složku tangenciální $u'_1 = u \sin \alpha$. Ježto $\alpha = 45^0$, je $| u_1 | = | u'_1 |$. Rázem změní se složka normalná na $| v_1 | = | ku_1 |$, složka tangenciální následkem tření ve

$$v'_1 = u'_1 - (1 + k) \mu u_1,$$

jak v článku jest dokázáno. Ježto však úhel odrazu jest $\beta' = 45^0$, je $| v_1 | = | v'_1 |$ t. j.

$$ku_1 = u_1 - (1 + k) \mu u_1 \quad \text{čili} \quad \mu = \frac{1 - k}{1 + k} .$$

Tento výsledek plyne ostatně okamžitě ze vztahu v článku dovozeného $k \, . \, tg \, \beta' = tg \, \alpha - (1 + k) \mu$, píšeme-li dle podmínky úlohy $tg \, \beta' = tg \, \beta = 1$.

5.

Projektil vystřelený ze vzdálenosti a dopadne na tvrdou vertikální stěnu kolmo a odrazí se. V jaké horizontální vzdálenosti od stěny spadne do téže horizontální roviny, z níž byl vystřelen? (Zanedbejte odpor vzduchu!) Koefficient restituce je k.

Kučera.

Řešení.

Projektil vystřelený ze vzdálenosti a počátečnou rychlostí V za elevace α, dopadne na stěnu rychlostí

$$u = V \, . \cos \alpha,$$

ježto horizontální složka rychlosti se nemění, a to za čas $t = \frac{a}{u}$. Odrazí se rychlostí $| v | = ku$. Po odrazu bude se pohybovati po dobu $t_1 = t$, než dorazí zpět do téže horizontální roviny, z níž vyšel, neboť výška pádu zůstala táž. Při tom urazí v horizontálním směru dráhu

$$x = v \, . \, t = ku \, . \, \frac{a}{u} = ka \, .$$

Jest patrno, že by $x = a$, kdyby $k = 1$, tělesa byla dokonale pružná, $x = 0$, kdyby $k = 0$, odraz byl dokonale nepružný.

6.

Koule hmoty m_1 srazí se s druhou hmoty m_2 a jejich dráhy po kollisi stojí na sobě kolmo. Dokažte, že $m_1 = km_2$, jsou-li koule dokonale hladké.

Kučera.

Řešení.

Z obr. 4. v citovaném dříve článku jest patrno, že podmínka, aby koule po nárazu se pohybovaly navzájem kolmo, se dá vyjádřiti, užijeme-li tamějšího označení, vztahem

$$\frac{v_{2n}}{v_{2t}} = \frac{v_{1t}}{v_{1n}} \, .$$

Ježto druhá koule před nárazem byla v klidu, je

$$u_2 = u_{2n} = u_{2t} = 0$$

a u koulí absolutně hladkých

$$v_{1t} = u_{1t}, \quad v_{2t} = u_{2t} = 0 \, .$$

Poslední podmínka vyžaduje, aby $v_{1n} = 0$, t. j.

$$u_{1n}(m_1 - km_2) = 0,$$

a ježto tomu má býti tak pro libovolné u_{1n}, musí $m_1 = km_2$.

7.

Dvě billardové koule stojí v klidu u sebe a třetí stejná narazí na obě současně. Tato třetí po kollisi zůstane v klidu. Dokažte, že koefficient restituce $k = \frac{2}{3}$. *Kučera.*

Řešení.

Postup řešení, který velmi často vede u složitějších úloh o rázu snadno k cíli, spočívá v užití rovnice (1) v článku „O rázu“ a rovnice (12) tamže. Prvá vyjádřuje stálost hybnosti před rázem a po něm, druhá změnu relativní rychlosti rázem. Obou vět můžeme užíti pro libovolné směry, neboť rovnice ty zůstávají v platnosti, násobí-li se obě strany kosinem libovolného úhlu.

V našem případě buď rychlost pohybující se koule před rázem a po něm U a $V = 0$, rychlosti obou koulí původně klidných před rázem $u_1 = u_2 = 0$ a po rázu v_1 a v_2. Ježto jsou koule hladké, budou rychlosti v_1 a v_2 tvořiti úhel 30^0 s rychlostí U, ležíce ve spojnici center koule pohyblivé a klidných v okamžiku rázu.

Prvá věta dává nám pro hybnost ve směru U

$$mU + mV = mu_1 + mu_2 + mv_1 \cos 30^0 + mv_2 \cos 30^0$$

čili

$$U = (v_1 + v_2) \cos 30^0.$$

Hybnost ve směru na U kolmém jest

$$mU \cos 90^0 + mV = mu_1 + mu_2 + mv_1 \cos 60^0 - mv_2 \cos 60^0$$

čili

$$v_1 = v_2 = v,$$

což dosazeno nahoru, dává

$$U = 2v \cos 30^0 = v \,.\, \sqrt{3}.$$

Rovnice (12) článku užita na směr spojnice center dává

$$v_1 - u_1 = - k(V - U \cos 30^0)$$

a stejně u koule druhé. Jest tedy

$$v = k \,.\, U \cos 30 = kU\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Spojením obou výsledků plyne

$$v = \frac{U}{\sqrt{3}} = kU\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{čili} \quad k = \frac{2}{3}\,.$$

8.

Částici vrhneme z některého bodu absolutně hladké horizontální roviny rychlostí V za elevace α. Ukažte, že její celková doba letu je

$$\frac{2V \sin \alpha}{g(1-k)}$$

a její celkový doběh

$$\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g(1-k)}\,.$$

Kučera.

Řešení.

Vržená částice bude se pohybovati po dráze parabolické a dopadne do původní roviny horizontální po době

$$t = \frac{2V \,.\, \sin \alpha}{g}\,,$$

a to rychlostí V pod úhlem α. Odrazem změní se rychlost V na V_1, úhel elevační na α_1, takže doba letu druhé parabolické dráhy bude

$$t_1 = \frac{2\,V_1 \sin \alpha_1}{g}\,.$$

Podobně jest tomu i dále.

Rozložíme-li rychlost V_1 na složku vertikální V'_1 a horizontální, jest

$$\sin \alpha_1 = \frac{V'_1}{V_1} \quad \text{a tedy} \quad t_1 = \frac{2\,V'_1}{g}\,.$$

Ale hodnota složky jest po rázu

$$V'_1 = k \,.\, V \sin \alpha\,,$$

takže celkem

$$t_1 = \frac{2k \,.\, V \sin \alpha}{g}.$$

Jest patrno, že doba letu od prvního nárazu k druhému jest $t_1 = kt$, a stejným způsobem i od druhého k třetímu

$$t_2 = kt_1 = k^2 t,$$

takže doby ty tvoří geometrickou nekonečnou řadu konvergentní ($k < 1$)

$$\frac{2 V \sin \alpha}{g}, \quad \frac{2 V \sin \alpha}{g} \,.\, k, \quad \frac{2 V \sin \alpha}{g} k^2, \text{ atd.},$$

jejíž součet, celková doba letu, jest

$$T = \frac{2 V \sin \alpha}{g(1-k)}.$$

Celkový doběh najdeme snadno, ježto se horizontální složka rychlosti nárazy nemění, násobíce dobu T touto složkou $V \cos \alpha$. Jest roven

$$V \cos \alpha \,.\, \frac{2 V \sin \alpha}{g(1-k)} = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g(1-k)},$$

jak bylo dokázati.

Tato úloha podává elementárnou theorii t. zv. rány ricochetové, které se dříve ve vojenství užívalo, a o níž se děje zmínka v článku prof. Kučery o vědeckých základech válečnictví v tomto čísle uveřejněném.

9.

Hráč stojí v horizontální vzdálenosti d od vertikální stěny a vyhodí pod úhlem α (k horizontále) míč směrem ku stěně. Ukažte, že, má-li se míč po odrazu k němu vrátiti, musí býti hozen rychlostí V danou vztahem

$$V^2 = \frac{(1+k)\,gd}{2k \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)},$$

kde k a μ jsou koefficienty restituce a tření. Diskutujte případy 1. $k = 0$, 2. $\mu = tang\ \alpha$, 3. $\mu > tang\ \alpha$.

Kučera.

Řešení.

Jest především patrno, že míč musí naraziti na stěnu v prvé polovici své dráhy, za pohybu vzestupného. Jen v případě stěny dokonale pružné mohl by naraziti právě uprostřed své dráhy. (Srov. úlohu 5.) Rozložme počáteční rychlost V míče na dvě složky, horizontální $u = V \cos \alpha$, a vertikální $u' = V \sin \alpha$. V okamžiku rázu sestává rychlost ze složky horizontální, ke stěně normální u_n, kteráž, ježto není odporu vzduchu, $u_n = u$, a vertikální, tangenciální u_t, kteréž rázem přejdou ve v_n a v_t. Dle vývodů článku bude

$$v_t = u_t - (1 + k)\mu u_n, \quad v_n = -k u_n = -ku.$$

Vertikální složka

$$u_t = u' - gt = u' - g \cdot \frac{d}{u},$$

kde t jest doba potřebná k stihnutí stěny, kteráž patrně $t = \frac{d}{u}$.

Dosazením máme tedy celkem

$$v_t = u' - g\frac{d}{u} - (1 + k)\mu u$$

$$v_n = -ku.$$

Výška h, v níž míč stihne stěnu, jest z rovnice paraboly vrhu

$$h = d \cdot tg\, \alpha - \frac{gd^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha}.$$

Zpětný pohyb míče od stěny můžeme považovati za šikmý vrh rychlostí V_1 pod elevací β, kde

$$V_1^2 = v_n^2 + v_t^2, \quad tg\,\beta = \frac{v_t}{v_n}, \quad \cos\beta = \frac{-v_n}{V_1}.$$

Dle podmínky úlohy musí stihnouti tento vrh ve vzdálenosti d výšku vrhu rovnou $-h$, takže

$$-h = d \cdot tg\,\beta - \frac{gd^2}{2 V_1^2 \cos^2 \beta} = d \cdot tg\,\beta - \frac{gd^2}{2 v_n^2}.$$

Celkem plyne pro V podmínka

$$d \cdot tg\,\alpha - \frac{gd^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha} = -d \cdot tg\,\beta + \frac{gd^2}{2 v_n^2}.$$

Dosadíme-li hodnoty za $tg\,\beta$ a v_t, v_n, jakož i $u = V \cos \alpha$ a $u' = V \sin \alpha$, plyne po poněkud zdlouhavé úpravě rovnice

$$V^2 = \frac{gd(1 + k)}{2k \cos\alpha (\sin\alpha - \mu \cos\alpha)},$$

již bylo dokázati.

Jest patrno, že pro $k = 0$, t. j. stěnu naprosto nepružnou, se stává $V = \infty$, úloha nemožnou; míč spadne podél stěny dolů. Je-li $\mu = tg\,\alpha$, jest podobně $V = \infty$, pro $u > tg\,\alpha$ pak V imaginárné, úloha fysikálně nemožná. Musí tudíž pro reálná řešení býti $\mu < tg\,\alpha$; čím drsnější jest stěna, tím větší elevace nutno užíti.

10.

Při zatloukání nepružného kůlu hmoty m vertikálně do země beranem hmoty M dopadajícím s výše h cm pozorujeme, že po každém nárazu pošine se kůl o a cm. Ukažte, že by kůl vnikal pomalu do země, kdyby na něm trvale spočívala hmota

$$M + \frac{M^2 h}{(M+m)a}.$$

Kučera.

Řešení.

Náraz beranu na kůl jest dle znění úlohy rázem hmot nepružných. Společná rychlost beranu i kůlu v okamžiku rázu bude

$$v = \frac{Mu_1 + mu_2}{M+m},$$

kde $u_1 = \sqrt{2gh}$ je konečná rychlost beranu před rázem a $u_2 = 0$ rychlost kůlu.

Jest tedy

$$v = \frac{M\sqrt{2gh}}{M+m}$$

a kinetická energie bezprostředně po rázu

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = \frac{M^2 gh}{M+m}.$$

Když po proběhnutí trati a se kůl i s beranem zastavil, spotřebovala se tato kinetická energie a zároveň i energie polohy v obnose $(M+m)g\,.\,a$. Táž energie spotřebovala by se na trati a, kdyby na kůlu spočívala hmota x a tento se pohyboval velice pomalu, se zanedbatelnou rychlostí a tedy i kinetickou energií, kdyby byla ztráta energie polohy

$$(x+m)ga = \frac{M^2 gh}{M+m} + (M+m)\,ga.$$

Z toho

$$x = M + \frac{M^2 h}{(M+m)a},$$

což bylo dokázati.

11.

S věže výšky h pustíme kouli a současně vyhodíme jí vstříc z horizontální roviny rychlostí $\sqrt{2gh}$ kouli zcela podobnou, která na kouli padající přímo narazí. Jak vysoko vyskočí odražená koule po novém dopadu na horizontální rovinu, je-li koefficient restituce roven k?

Kučera.

Řešení.

Obě koule se srazí po čase t, za který prvá proběhla dráhu $\frac{1}{2}gt^2$, druhá, letící jí vstříc, dráhu

$$t \cdot \sqrt{2gh} - \frac{1}{2}gt^2,$$

při čemž

$$\frac{1}{2}gt^2 + t\sqrt{2gh} - \frac{1}{2}gt^2 = h$$

čili

$$t = \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

Výška, v níž se koule srazí, je vzdálena od vrcholu věže o $h_1 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{4}h$, od její paty o $h_2 = \frac{3}{4}h$.

V okamžiku srážky má svrchní koule rychlost u_1 směrem dolů, kteráž

$$u_1 = gt = \sqrt{\frac{gh}{2}},$$

spodní koule pak rychlost směrem vzhůru rovnou

$$\sqrt{2gh} - gt = \sqrt{\frac{gh}{2}},$$

tedy směrem dolů rychlost

$$u_2 = -\sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

Relativní rychlost koulí před srážkou jest

$$u_1 - u_2 = 2\sqrt{\frac{gh}{2}} = \sqrt{2gh},$$

a po srážce dle vzorce (12) článku

$$v_1 - v_2 = -k\sqrt{2gh}.$$

Ježto koule jsou stejné a narazily na sebe touže rychlostí, bude rychlost druhé koule směrem dolů

$$v_2 = \frac{1}{2}k\sqrt{2gh} = k\sqrt{\frac{gh}{2}},$$

stejná, jako rychlost v_1 prvé koule směrem vzhůru. Koule prvá vystoupí nad místo srázu do výše

$$h'_1 = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} = \frac{1}{4}k^2h,$$

takže v nejvyšším místě své dráhy po odrazu je vzdálena od vrcholu věže o

$$\frac{1}{4}h - \frac{1}{4}k^2h = \frac{h}{4}(1 - k^2).$$

Nevšímáme-li si této prvé koule, myslíme-li ji zachycenu, aby nemohla znovu narazit na padající a dole odraženou kouli druhou, plyne pro tuto úvaha následující:

Padajíc s výše $h_2 = \frac{3}{4}h$ s počáteční rychlostí

$$v_2 = k\sqrt{\frac{gh}{2}},$$

stihne horizontální rovinu po čase t a s konečnou rychlostí

$$u'_2 = v_2 + gt,$$

kde

$$v_2t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{3}{4}h \quad \text{čili} \quad gt = -v_2 \pm \sqrt{v_2^2 + \frac{3}{2}gh}.$$

Fysikální smysl má v tomto případě pouze kladné znamení u odmocniny, aby čas vyšel kladný. Pak

$$u'_2 = \sqrt{v_2^2 + \frac{3}{2}gh} = \sqrt{\frac{gh}{2}(3 - k^2)}.$$

Po odrazu na rovině jest vertikální složka vzhůru rovna $v'_2 = ku'_2$, a výška, do níž koule vystoupí,

$$h'_2 = \frac{1}{2}\frac{v'^2_2}{g} = \frac{h}{4} k^2 (3 + k^2).$$

Snadná je zkouška správnosti: Pro $k = 0$ musí býti $h'_2 = 0$, pro $k = 1$ pak $h'_2 = h$, jak plyne z principu o zachování energie, uvážíme-li, že prvá koule vystoupila po nárazu do původní výše věže.

12.

Na hladké rovině leží dvě stejné hladké koule o středech A a B tak, že se navzájem dotýkají. Na kouli A narazí třetí stejná koule C, takže spojnice středů CA tvoří s AB tupý úhel $\sphericalangle CAB = \pi - \delta$. *Dokažte, že je-li*

$$\sin\delta > \frac{1-k}{1+k}$$

se dostane koule A do pohybu ve směru, který tvoří s AB úhel φ *daný vztahem*

$$\tan\varphi = \frac{2\tan\delta}{1-k},$$

kde k je koefficient restituce. *Kučera.*

Řešení.

Buď rychlost koule C (viz obr. 1.a) před nárazem u_3, jejíž směr při nárazu přímém jest CA, a po nárazu v_3 v témž směru. Buď dále v_1 rychlost koule A bezprostředně po nárazu koule C; touto rychlostí narazí A na kouli B a nárazem tímto změní se v_1 ve v'_1. Rychlost v_1 tvoří se spojnicí AB úhel δ, v'_1 pak úhel φ. Rychlost koule B po nárazu koule A je v_2 a ježto jsou koule hladké, leží v_2 ve směru AB.

Řešení provedeme stejně jako v úloze 7. na základě věty o zachování hybnosti a věty (12) článku. Prvá věta praví pro hybnosti ve směrech CA, AB a $AD \perp AB$

1. $$u_3 = v_3 + v_1,$$
2. $$v_1\cos\delta = v'_1\cos\varphi + v_2,$$
3. $$v_1\sin\delta = v'_1\sin\varphi.$$

Hmoty všude vypadly jsouce stejné u všech koulí. Z věty (12) plynou vztahy

4. $v_1 - v_3 = k u_3,$

5. $v'_1 \cos\varphi - v_2 = -k v_1 \cos\delta.$

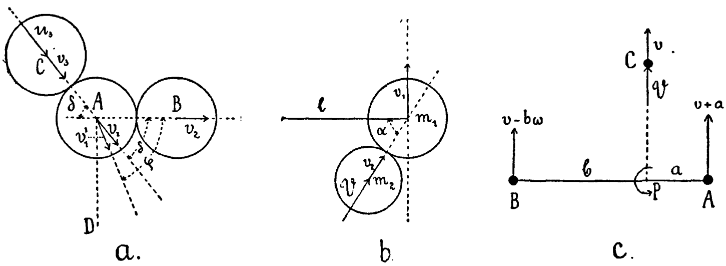
Z rovnic 1'. a 4. plyne

6. $2 v_3 = u_3 (1 - k),$

7. $2 v_1 = u_3 (1 + k),$

z 2. a 5. pak

8. $2 v'_1 \cos\varphi = (1 - k) v_1 \cos\delta.$



Obr. 1. *a*. Obr. 1. *b*. Obr. 1. *c*.

Spojením této rovnice a rovnice 3. konečně

$$\tan\varphi = \frac{2 \tan\delta}{1 - k}.$$

Koule A pohybuje se tedy, jak bylo v úloze vytčeno, předpokládaje ovšem, že nenastane nový náraz mezi koulemi A a C. Toho podmínkou jest

$$v'_1 \cos(\varphi - \delta) > v_3$$

čili dle rovn. 8., 3., 6. a 7.

$$\frac{1}{2}(1 - k) v_1 \cos^2\delta + v_1 \sin^2\delta > \frac{1 - k}{1 + k} v_1,$$

což po dosazení $\cos^2\delta = 1 - \sin^2\delta$ vede k podmínce v textu udané

$$\sin\delta > \frac{1 - k}{1 + k}.$$

13.

Od paty pevné nakloněné roviny (úhel ϑ) hodíme rychlostí V částici ve směru, který s horizontálou tvoří úhel $\alpha > \delta$. Najděte podmínku, aby mohla částice naraziti na nakloněnou rovinu n-kráte, při čemž n-tý dopad má býti na nakl. rovinu kolmý. Koefficient restituce je k.

Kučera.

Řešení.

V původním textu úlohy zůstal omyl tiskový, jak ostatně většina řešitelů poznala; má v něm státi $\alpha > \delta$ místo $\alpha < \delta$.

Ježto složka rychlosti rovnoběžná s nakloněnou rovinou se nárazy částice nemění, jest pohyb částice v tomto směru dán týmž vztahem, jako by nárazů nebylo, jako by částice se smýkala po nakloněné rovině vzhůru. Ku konci času t od počátku pohybu jest rychlost rovnoběžná s nakl. rovinou rovna

$$V \,.\, cos(\alpha - \delta) - gt \, sin\, \delta.$$

Buďte doby letu před prvým, mezi prvým a druhým, druhým a třetím atd. nárazem

$$t_1,\; t_2,\; t_3 \ldots t_n.$$

Čas t_1 jest dán rovnicí

$$Vt_1 \, sin(\alpha - \delta) - \frac{1}{2} g t_1^2 \, cos\, \delta = 0,$$

která znamená, že složka dráhy kolmá k nakloněné rovině se annullovala.

Z toho

$$t_1 = \frac{2\,V\, sin(\alpha - \delta)}{g\, cos\, \delta}.$$

Složka rychlosti kolmá k rovině při dopadu v okamžiku t_1 jest

$$V\, sin(\alpha - \delta) - gt_1 \, cos\, \delta = -\, V\, sin(\alpha - \delta).$$

Nárazem se změní na $kV\,sin(\alpha - \delta)$. Z toho je patrno, že $t_2 = kt_1$, $t_3 = kt_2 = k^2 t_1$ atd. a tedy máme pro celkový čas, až k n-tému nárazu

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \frac{1 - k^n}{1 - k} \cdot \frac{2\,V\, sin(\alpha - \delta)}{g\, cos\, \delta}.$$

Dle předpokladu úlohy má v tomto okamžiku býti složka rychlosti v nakloněné rovině rovna nulle, t. j.

$$V\cos(\alpha - \delta) - gt\sin\delta = 0,\quad \text{kde } t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$

a tedy

$$\frac{V\cos(\alpha-\delta)}{g\sin\delta} = \frac{1-k^n}{1-k}\cdot\frac{2V\sin(\alpha-\delta)}{g\cos\delta}$$

čili

$$tg\,\delta = 2\,.\,tg(\alpha-\delta)\,.\,\frac{1-k^n}{1-k}.$$

14.

Hladká koule hmoty m_1 spočívá na hladké rovině a jest přivázána napiatou nepružnou nití délky l k některému z její bodů. Na kouli tu narazí přímo jiná hmoty m_2 a rychlosti V, kteráž tvoří s nití ostrý úhel α. Najděte rychlost, s níž se počne prvá koule pohybovati.

Kučera.

Řešení.

Za přímého nárazu nezmění se směr rychlosti koule druhé, nýbrž jen její velikost, kteráž přejde ve v_2. (Viz obr. 1.*b*.) V niti vznikne impulsivní napětí a koule m_1 jest nucena pohybovati se po obvodě kruhu poloměru l. Počáteční rychlost její v_1 hned po nárazu bude kolmá k niti. Řešení vedené týmž způsobem jako v úloze 7. a 12., dává pro zachování momentu ve směru kolmém na nit

$$m_2 V\sin\alpha = m_2 v_2 \sin\alpha + m_1 v_1.$$

Vztah (12) článku praví, ježto počáteční rychlost koule prvé byla rovna nulle

$$v_2 - v_1\sin\alpha = -kV.$$

Dosadíme-li do prvé rovnice za v_2, plyne hledaná rychlost

$$v_1 = \frac{m_2\sin\alpha(1+k)}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}\,.\,V.$$

15.

Dvě stejné hmotné částice A a B jsou spojeny nehmotnou tyčí délky $a + b$ a k bodu P tyče ve vzdálenosti a od A, b od B jest přivázána neprodlužitelná nit, ku které na druhém *konci jest přivázána třetí částice C, stejně veliká s A a B. Vymrštíme částici C rychlostí V kolmou na směru tyče AB. Jaká bude rychlost částice C v tom okamžiku, když se nit právě úplně napiala?*

Kučera.

Řešení.

Budiž v hledaná rychlost částice C, v okamžiku, kdy se nit právě napiala (viz obr. 1.*c*). Ježto impuls na částici C má směr niti, bude mít v týž směr jako V. Bod P tyče dá se do pohybu směrem PC a rychlostí v. Tyč AB začne se otáčeti úhlovou rychlostí ω, ve směru od A přes C k B (viz obrazec).

Počáteční rychlost bodu A jest složena z rychlosti bodu P a z relativní rychlosti bodu A vzhledem k P, kteráž jest patrně $a\omega$. Celková rychlost bodu A jest tedy $v + a\omega$ a podobně rychlost bodu B jest $v - b\omega$.

Věta o zachování momentu skýtá tedy vztah

$$mv + m(v + a\omega) + m(v - b\omega) = mV,$$

kde m jsou stejné hmoty částic.

Nazveme-li okamžité rychlosti částic A a B všeobecně v_1 a v_2, jsou síly na ně působící

$$m\frac{dv_1}{dt} \quad \text{a} \quad m\frac{dv_2}{dt}$$

a otáčivé momenty těchto sil kolem bodu P proti směru ručiček hodinových

$$am\frac{dv_1}{dt} \quad \text{a} \quad -bm\frac{dv_2}{dt}.$$

Ježto však žádná vnější síla neotáčí systémem kolem bodu P, musí

$$am\frac{dv_1}{dt} - bm\frac{dv_2}{dt} = 0 \quad \text{čili} \quad amv_1 - bmv_2 = \text{stálé vzhledem k času.}$$

Ježto na začátku pohybu bylo v_1 i v_2 rovno nulle, musí stálá v poslední rovnici se rovnati trvale nulle a tedy

$$am(v + a\omega) - bm(v - b\omega) = 0.$$

Bližší vysvětlení o těchto poměrech najde se v článku prof. Kučery „O pohybu otáčivém“ v minulém ročníku.

Z poslední rovnice plyne

$$\omega = \frac{(b-a)v}{a^2+b^2}.$$

Eliminací ω z první rovnice plyne

$$3v - \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}v = V$$

čili hledaná rychlost

$$v = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+ab}V.$$

Kdyby se bod P nacházel uprostřed tyče, bylo by $v = \frac{V}{3}$, jak je patrno z přímého názoru.

Seznam řešitelů úloh.

Pánové:

Jos. Bezdíček, V. II. č. g. v Brně,
m. 1.—21.

Rostislav Boleloucký, VII. r. v Bučovicích,
m. 2., 6., 7., 12.

Eduard Buriánek, VII. r. v Litovli,
m. 1.—8., 10., 12.—15., 17.—21., d. 4., 6., f. 2.—6., 11.

Karel Drbal, na Žižkově,
m. 3., 8., 9., 13., 14., 15.

Josef Faus, VI. r. v Pardubicích,
m. 1.—22., d. 1.—7.

Jan Florian, VIII. I. g. v Brně,
m. 1., 2., 6., 7., 8., 10., 11., 13., 19.

Karel Fojt, r. v Praze v Ječné ul.,
m. 2., 3., 5., 6., 8., 11., 12., 13., 15., 17.

Josef Franc, VI. r. v Jevíčku,
m. 3., 7., 13., 14., 20., 21.

František Friedmann, VIII. g. v Benešově u Prahy,
m. 1.—4., 6.—9., 12., 13., f. 2.—5., 7.—11.

Josef Grim, VIII. g. v Čes. Budějovicích,
m. 1.—15., 17., 18, 19., f. 1.—12., 14.

Otakar Hašek, VII. r. v Pardubicích,
m. 1., 2, 3., 7., 8., 11., 14., 19., 20., d. 2.—6.

Ludvík Havlíček, VII*a* I. r. na Král. Vinohradech,
m. 1.—4., 6.—15., 17., 19.—22., d. 2.—5., f. 2.—5., 8., 10.—12., 14.

Milan Horák, VIII. g. na Král. Vinohradech,
m. 2., 3., 6.—9., 11.—13., 15., 17., 20., f. 1.—15.

Josef Hrníčko, ve Vys. Mýtě,
m. 1., 2., 3., 4., 12.—15.

Jan Chvátal, VI*b* r. v Praze III.,
m. 1., 2., 3., 5., 7., 8., 12., 13., 14., 19., 20.

Fr. Chytil, VI. g. v Kroměříži,
m. 2., 3., 8., 13., 14.

Miloslav Jakeš, VIII. r. g. v Chrudimi,
m. 1.—3., 6.—8., 10., 12.—14., 17.—21., d. 1., 3.—5.

Th. Jarchovský, VII*a* r. v Praze v Ječné ul.,
m. 2., 3., 13., 14., 15.

Karel Jaroš, VII. g. ve Vel. Meziříčí,
m. 2., 12., 13., 15., f. 2., 3, 4.

Ferdinand Jasný, VII. I. g. v Brně,
m. 1.—21.

František Jašek, stud. gymn. v Kroměříži,
m. 1.—15., 17.—20.

Josef Kábrlc, VI. r. g. v Praze v Truhlářské ul.,
m. 2., 3., 7., 10., 19.

Otto Karl, VIII. g. v Praze v Žitné ul.,
m. 1., 2., 6.—14., 17., 19., 20.

Jan Kodl, VII*a* r. v Písku,
m. 1.—22., f. 1.—15.

Václav Koldovský, VI. g. v Praze v Žitné ul.,
m. 8., 9., 11., 12., 14., 19.

Gustav Košťál, VI. g. v Praze v Žitné ul.,
m. 8., 9., 11., 12., 14., 19.

Stanislav Kulanda, VII. g. v Písku,
m. 1.—3., 6.—8., 10.—15., 19.

Walter Loos, VI. r. v Bučovicích,
m. 2., 3., 13., 14., 15.

Pavel Marek, VII. r. v Pardubicích,
m. 1., 2., 3., 8., 10., 14., 19.

Jaromír Mareš, VII. r. v Praze III.,
m. 1.—22., d. 1.—7., f. 1.—15.

Emil Martinec, VI. I. g. v Brně,
m. 2., 3., 7., 8., 12., 13., 15., 19.

František Merhaut, VIII. g. v Praze v Křemencově ul.,
m. 1., 2., 5., 7., 8., 12., 13, 14., 17., 19., 20.

Bohumil Mlateček, VII. r. v Pardubicích,
m. 2., 3., d. 1*b*., 2., 4., 5.

Jindřich Mourek, VIII. g. v Praze v Žitné ul.,
m. 1.—4., 6.—15., 19., 20., 21.

Josef Našinec, v Čes. Budějovicích,
m. 1., 2., 3., 6., 7., 8., 12., 13., 14., 17., 19.

Jaroslav Nebeský, VII. r. v Praze III.,
m. 1.—4., 6., 7., 8., 10., 12., 13., 14., 17., 19., 21.

Jan Novák, VI. g. v Brně,
2., 3., 7., 8., 12., 13., 15., 19.

Otakar Novák, VI. g. v Praze v Žitné ul.,
m. 3., 8., 9., 11., 12., 14., 15., 19., 20.

Alois Pešina, VIII. r. g. v Dvoře Králové n. L.,
m. 1.—8., 10., 12.—14., 17.—22.

Em. Pokorný, VIII. g. v Praze v Žitné ul.,
m. 1.—4., 6.—15., 19.—21.

Antonín Roháč, VI. g. v Praze III.,
m. 1., 2., 3., 5., 7., 8., 11.—14., 17.

Vilém Röll, V. r. v Příbrami,
m. 3., 7., 8., 9., 11., 13., 14., 15., 19.

Eugen Sieber, VIII. g. v Praze v Žitné ul.,
m. 1.—4., 6.—15., 19., 20, 21.

Kliment Smolka, VII. g. v Kroměříži,
f. 1.—4., 8.—14.

Václav Srba, VII. g. v Žitné ul.,
m. 1., 6.–13., 19., 20.

Jan Šebánek, VI. g. v Písku,
m. 8., 10.—14., 20.

Václav Šifalda, VII*b* r. g. v Praze v Křemencově ul.,
m. 1., 2., 6., 7., 10., 13., 15., 17., 19.

Slečna:

Marie Šouláková, VIII. r. g. v Brně,
m. 1.–8., 10., 12.—17., 19.

Pánové:

Josef Špelina, VII. I. r. v Plzni,
m. 1., 2., 4, 6., 10., 12., 13., 17.

Boh. Šternberk, VIII. r. g v Chrudimi,
m. 1.—3., 5.—8., 11.—15., 17., 19.—22., f. 1.–15.

Jan Tondl, VIII. g. ve Slaném,
m. 2.

Josef Uřidil, VI. r. v Rakovníce,
m. 1.–8., 10., 12.—15., 17., 19., 20., 21., 22.

Vladimír Vorlíček, VII. r. v Telči,
m. 1.—4., 12., 13., 15., 17., 19., d. 3., 4.

Jan Zralý, V. r. v Rakovníce,
m. 1.–8., 10.–15., 17.—21.

Frant. Žďárský, VI. g. v Pardubicích,
m. 1., 2., 7., 14., 17., 18., 19.

Udělení cen.

Redakce úloh, přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem „Jednoty českých mathematiků a fysiků“:

Z mathematiky:

Ceny první:

p. *Josef Bezdíček*, stud. V. tř. II. g. v Brně,
p. *Josef Faus*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích,
p. *Ludvík Havlíček*, stud. VIIa. tř. I. r. na Král. Vinohradech,
p. *Ferdinand Jasný*, stud. VII. tř. I. g. v Brně,
p. *František Jašek*, stud. gymn. v Kroměříži,
p. *Jan Kodl*, stud. VIIa. tř. r. v Písku,
p. *Jaromír Mareš*, stud. VII. tř. r. v Praze III.,
p. *Jan Zralý*, stud. V. tř. r. v Rakovníce.

Mimo to obdrží p. *J. Mareš* a p. *J. Zralý* spis: Servít, Eukleidovy základy.

Ceny druhé:

p. *Eduard Burianek*, stud. VII. tř. r. v Litovli,
p. *Josef Grim*, stud. VIII. tř. g. v Č. Budějovicích,
p. *Miloslav Jakeš*, stud. VIII. tř. r. g. v Chrudimi,
p. *Jindřich Mourek*, stud. VIII. tř. g. v Praze II. v Žitné ul.,
p. *Alois Peřina*, stud. VIII. tř. r. g. v Dvoře Králové n. L.,
p. *Em. Pokorný*, stud. VIII. tř. g. v Praze II. v Žitné ul.,
p. *Eugen Sieber*, stud. VIII. tř. g. v Praze II. v Žitné ul.,
sl. *Marie Šouláková*, stud. VIII. tř r. g. dívčího v Brně,
p. *Boh. Šternberk*, stud. VIII. tř. r. g. v Chrudimi,
p. *Josef Uřidil*, stud. VI. tř. r. v Rakovníce.

Ceny třetí:

p. *Karel Fojt*, stud. r. v Praze v Ječné ul.,
p. *František Friedmann*, stud. VIII. tř. r. g. v Benešově u Prahy,
p. *Milan Horák*, stud. VIII. tř. r. g. na Král. Vinohradech,
p. *Jan Chvátal*, stud. VIb. tř. r. v Praze III.,
p. *Otto Karl*, stud. VIII. tř. g. v Praze v Žitné ul.,

p. *Stanislav Kulanda*, stud. VII. tř. g. v Písku,
p. *František Merhaut*, stud. VIII. tř. g. v Praze v Křemencově ul.,
p. *Jaroslav Nebeský*, stud. VII. tř. r. v Praze III.,
p. *Josef Našinec*, stud. v Č. Budějovicích,
p. *Antonín Roháč*, stud. VI. tř. g. v Praze III.,
p. *Václav Srba*, stud. VI. tř. g. v Praze v Žitné ul.,
p. *Václav Šifalda*, stud. VIIb. tř. r. g. v Praze v Křemencově ul.

Z deskriptivní geometrie:

Všechny 3 spisy obdrží pánové:
Miloslav Jakeš, stud. VIII. tř. r. g. v Chrudimi,
Jaromír Mareš, stud. VII. tř. r. v Praze III.

Pouze spis: *Jarolímek*, Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné I., II., III. pánové:
Eduard Burianek, stud. VII. tř. r. v Litovli,
Josef Faus, stud. VI. tř. r. v Pardubicích,
Bohumil Mlateček, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Z fysiky:

Cenu prvou: *Strouhalovu* Thermiku obdrží
p. *Jan Kodl* ze VIIa. r. v Písku a
p. *Boh. Šternberk* z VIII. r. g. v Chrudimi.

Ceny druhé: *Briot-Pšenička*: Mechanická theorie tepla,
Čubr: O měření země,
Seydler: Izák Newton a jeho principia, obdrží
p. *M. Horák* z VIII. r. g. na Král. Vinohradech,
p. *Jar. Mareš* ze VII. r. v Praze-III.,
p. *Josef Grim* z VIII. g. v Čes Budějovicích,
p. *Ludv. Havlíček* ze VIIa. r. na Král. Vinohradech a
p. *Klim. Smolka* z VIII. g. v Kroměříži.

Pp. *Horák* a *Mareš* obdrží vedle toho ještě knihu *Studnička*: Základy nauky o číslech.