Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bedřich Procházka; Josef Žďárek

Harmonické středy soustavy trojbodové

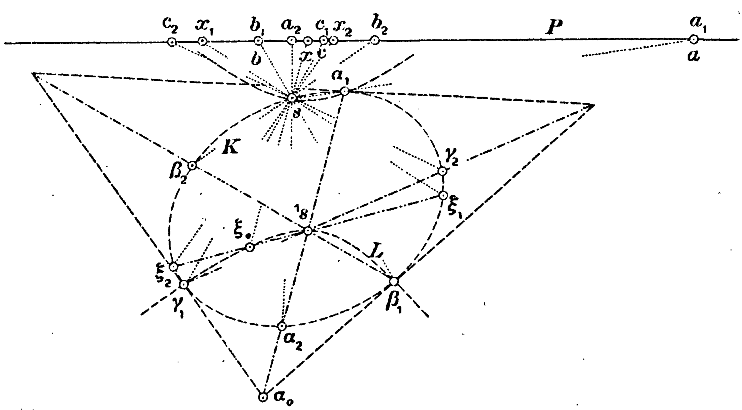
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 4-5, 321--337

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109107

Harmonické středy soustavy trojbodové.

Napsali dv. rada **B. Procházka** a assistent **J. Žďárek.**

Dvorní rada prof. Dr. *Emil Weyr* ve svém pojednání „*Über Polargruppen*“, uveřejněném v LXXXI. svazku Zpráv o zasedání cís. Akademie věd ve Vídni roč. 1880, vycházeje od známých vlastností harmonických středů, zmiňuje se také, mimo jiné, jako o zvláštním případě o sestrojení harmonických středů vůči soustavě tří bodů a uvádí některé zajímavé konstrukce.



Obr. 1.

Účelem tohoto článku je odvoditi konstrukce harmonických středů soustavy trojbodové zcela samostatně a provésti zevrubně všechny konstrukce, jež s touto úlohou souvisejí.

a) V té příčině předpokládejme na přímce P tři libovolné body $a_1\, b_1\, c_1$ (obr. 1.), jež nazveme *základní* a sestrojme k nim příslušné body $a_2\, b_2\, c_2$ tak, aby každá z dvojin $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ oddělovala zbylé dva body základní $b_1 c_1$, $c_1 a_1$, $a_1 b_1$ harmonicky.

Ke konstrukci této zvolme libovolnou kuželosečku K (obr. 1.) a na ní bod s, s něhož promítněme body $a_1\, b_1\, c_1$ na kuželosečku K, do bodů $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$. Protíná-li spojnice průsečného bodu α_0 tečen, v bodech β_1 a γ_1 ke křivce K sestrojených, s bodem α_1 kuželosečku K v bodě α_2, tvoří body $\beta_1\, \gamma_1\, \alpha_1\, \alpha_2$ na kuželosečce K harmonickou čtveřinu*), a tudíž spojnice $\overline{s\alpha_2}$ vytíná na přímce P žádaný bod a_2. Obdobně sestrojíme — pomocí další tečny křivky K v bodě α_1 sestrojené — body $\beta_2\, \gamma_2$, z nichž promítnutím s bodu s odvodíme body b_2 a c_2 na přímce P.

Ježto přímky $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, $\overline{\beta_1\beta_2}$, $\overline{\gamma_1\gamma_2}$ jakožto spojnice vrcholů trojúhelníka kuželosečce K opsaného s protilehlými body dotyčnými protínají se dle věty Brianchonovy v jediném bodě ${}^1s$, jsou body $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ na křivce K body *involuční řady* a proto i body a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 náležejí *téže řadě involuční* na přímce P.**)

Vytkněme dále na přímce P prostou a s touto řadou involuční a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 ... projektivnou řadu bodovou a, b, c ... tak, aby body: $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, $c \equiv c_1$, a aby tudíž byly samodružnými body***) obou těchto řad. Tím je jejich projektivný vztah úplně určen a můžeme k libovolnému bodu x řady prosté určiti příslušnou družinu bodovou x_1x_2 v řadě involuční.

K tomu cíli sestrojme kuželosečku L vytvořenou projektivnými svazky paprskovými $s(\overline{s\alpha_1}, \overline{s\beta_1}, \overline{s\gamma_1} \ldots)$ a ${}^1s(\overline{{}^1s\alpha_1}, \overline{{}^1s\beta_1}, \overline{{}^1s\gamma_1} \ldots)$, kteráž je pěti body s, ${}^1s$, α_1, β_1, γ_1 určena, a promítněme na tuto bod x s bodu s do bodu ξ_0. Tomuto paprsku $\overline{sx}$ odpovídá ve svazku druhém paprsek $\overline{{}^1s\xi_0}$, protínající kuželosečku K v bodech ξ_1, ξ_2, jež určují ve svazku s paprsky $\overline{s\xi_1}$, $\overline{s\xi_2}$ vytínající na přímce P hledané body x_1, x_2.

---

*) Bod α_0 jest středem řady involuční na křivce K, jejímiž samodružnými body jsou body β_1, γ_1 a body $\alpha_1\alpha_2$ jednou družinou, oddělující harmonicky tyto body samodružné. (Z toho zároveň plyne zajímavá věta: Každé dvě vůči kuželosečce sdružené poláry stanoví v ní harmonickou čtveřinu bodovou.)

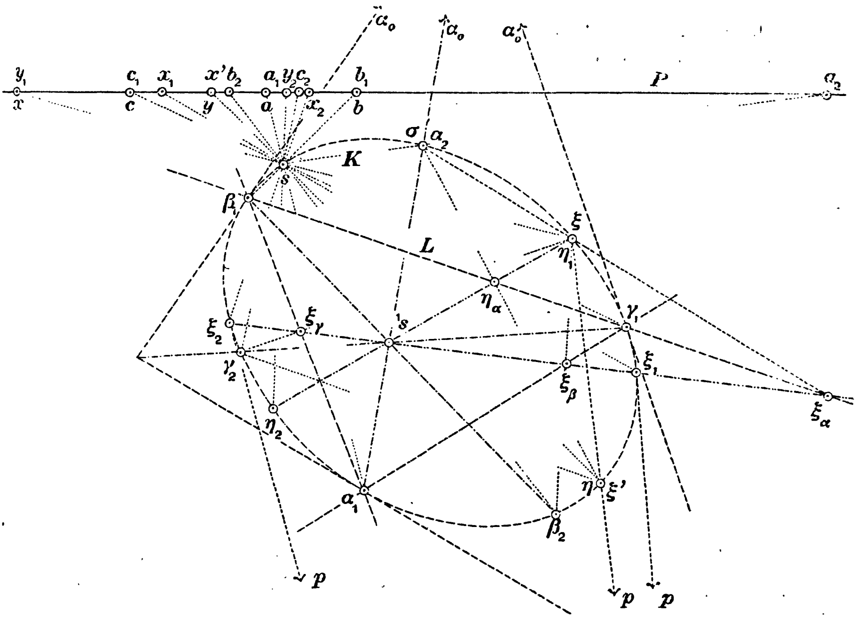
**) *v. Staudt, Geometrie der Lage*, Norimberk, 1847, str. 121, nebo *Cremona, Theorie der ebenen Kurven*, něm. překlad Curtze-ho, Greifswald, 1865, str. 36.

***) Známo, že soumístné projektivné řady prostá a involuční mají tři body samodružné (Dr. Emil Weyr: Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde, Lipsko 1869, str. 10.).

Takto sestrojené body x_1 x_2 jmenujeme *harmonické středy druhého stupně pro soustavu bodovou a_1 b_1 c_1 vzhledem na pól x.*

b) Paprsek $\overline{\xi_1 \xi_2}$ možno však sestrojiti jednodušeji.

Promítneme-li body α_1 β_1 γ_1 jakožto body řady prosté s libovolného bodu σ křivky K, povstane svazek $\sigma(\overline{\sigma\alpha_1}, \overline{\sigma\beta_1}, \overline{\sigma\gamma_1} \ldots)$



Obr. 2.

taktéž projektivný se svazkem ${}^1s\,(\overline{{}^1s\alpha_1}, \overline{{}^1s\beta_1}, \overline{{}^1s\gamma_1} \ldots)$, tvořící s tímto kuželosečku, kteréž možno ke konstrukci bodů x_1 x_2 použíti stejně jako kuželosečky L. Zvolíme-li však *za bod σ bod α_2* (obr. 2.), budou oba svazky σ a ${}^1s$ *perspektivné*, majíce v přímce $\overline{\alpha_2\,{}^1s}$ samodružný paprsek $\overline{\sigma\alpha_1} \equiv \overline{{}^1s\alpha_1}$ a přímku $\overline{\beta_1\gamma_1}$ za osu. Tato zastupuje kuželosečku L obrazu 1. a proto byla taktéž L označena. Bod x promítá se s bodu s na kuželosečku K do bodu ξ a paprsku $\overline{\alpha_2\xi} \equiv \overline{\sigma\xi}$ svazku σ odpovídá ve druhém svazku ${}^1s$ homologický paprsek $\overline{{}^1s\xi_\alpha}$ procházející bodem

$$\xi_\alpha \equiv (\overline{\alpha_2\xi}\ \overline{\beta_1\gamma_1}).$$

Paprsek tento protíná kuželosečku K v bodech $\xi_1 \xi_2$, jimiž procházejí paprsky $\overline{s\xi_1}$, $\overline{s\xi_2}$, stanovící v přímce P žádané body $x_1 x_2$ (jako v obr. 1.).

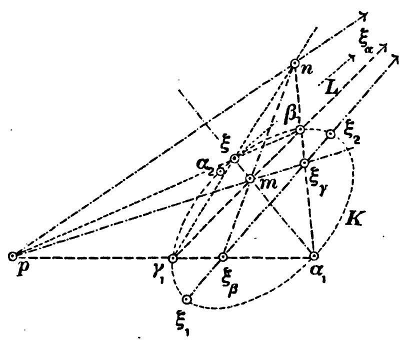
Ze stejných důvodů leží na paprsku $\overline{\xi_1 \xi_2}$ také body

$$\xi_\beta \equiv (\overline{\beta_2 \xi}\ \overline{\gamma_1 \alpha_1}) \text{ a } \xi_\gamma \equiv (\overline{\gamma_2 \xi}\ \overline{\alpha_1 \beta_1}).$$

Možno tudíž zároveň vysloviti větu:

Promítneme-li body α_2, β_2, γ_2 s bodu ξ křivky K na přímky resp. $\overline{\beta_1\gamma_1}$, $\overline{\gamma_1\alpha_1}$, $\overline{\alpha_1\beta_1}$, obdržíme tři body ξ_α, ξ_β, ξ_γ ležící s bodem ^1s na téže přímce.*)

Tyto tři body $\xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma$ lze též jinak sestrojiti.



Obr. 2a.

Promítneme-li harmonické body $\beta_1\gamma_1\ \alpha_1\alpha_2$ s bodu ξ na přímku $\overline{\beta_1\gamma_1} \equiv L$ (obr. 2a) do harmonických bodů $\beta_1\gamma_1\ m\xi_\alpha$ jest bod

$$m \equiv (\overline{\xi\alpha_1} \,.\, \overline{\beta_1\gamma_1})$$

jedním vrcholem diagonálného trojúhelníka mnp**) úplného čtyrúhelníka $\xi\alpha_1\beta_1\gamma_1$ vepsaného kuželosečce K a proto bod ξ_α jest průsečíkem strany $\overline{\beta_1\gamma_1}$ tohoto čtyrúhelníka se stranou $\overline{np}$ diagonálného trojúhelníka mnp. Obdobně je bod ξ_β průsečíkem spojnic $\overline{\gamma_1\alpha_1}$ a $\overline{mn}$ a bod $\xi_\gamma \equiv (\overline{\alpha_1\beta_1}\ \overline{mp})$. Tedy *na přímce $\xi_1 \xi_2$ protínají se strany diagonálného trojúhelníka mnp se stranami trojúhelníka $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, v žádaných bodech $\xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma$****).

*) *Dr. Emil Weyr* „Über Polargruppen", str. 3.

**) $n \equiv (\overline{\alpha_1\beta_1} \,.\, \overline{\xi\gamma_1})$, $p \equiv (\overline{\gamma_1\alpha_1} \,.\, \overline{\xi\beta_1})$.

***) K téže konstrukci dospěl jiným způsobem prof. *Th. Monin*, ve „Drobné Zprávě" uveř. v Čas. pro pěst. math. a fys. roč. XVI. str. 242.

c) Že tato geometrická definice harmonických středů pro soustavu tří bodů souhlasí s obecnou analytickou definicí *Jonquières-ovou,**) plyne z následního:

Obecný vztah pro vyjádření projektivnosti involuční řady bodové na přímce a s ní soumístné řady prosté lze vyjádřiti výrazem:

$$x_1^2 x + \alpha x_1^2 + \beta x_1 x + \gamma x_1 + \delta x + \varepsilon = 0, \qquad (1)$$

kde $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon$ jsou číselné součinitele, proměnná x_1, dle níž je rovnice kvadratická, je společným znakem vzdáleností $\overline{ox_1}$, $\overline{ox_2}$ bodů x_1, x_2 jakožto dvojin řady involuční od počátku o a proměnná x, dle níž je rovnice lineárná, značí vzdálenost $\overline{ox}$ této družině příslušného bodu x řady prosté od téhož počátku.

Pro náš uvažovaný případ vypočteme hodnoty pěti koefficientů $\alpha \ldots \varepsilon$, dosadíme-li do této rovnice hodnoty vzdáleností pěti bodů řady involuční a příslušných pěti sdružených bodů řady prosté od počátku o, zvoleného na přímce P. Ježto body $a_1 \equiv a, b_1 \equiv b, c_1 \equiv c$ jsou samodružné body těchto řad, dosaďme nejprve $x_1 \equiv x = \overline{oa}$, $x_1 = x = \overline{ob}$, $x_1 = x = \overline{oc}$; tím nabudeme tří rovnic. Avšak bodům a, b řady prosté odpovídají ještě v involuční řadě tři body a_2 resp. b_2 (odst. *a*). Obdržíme tudíž dalšími substitucemi $x_1 = \overline{oa_2}$, $x = \overline{oa}$ a $x_1 = \overline{ob_2}$, $x = \overline{ob}$ ještě dvě rovnice.

Vyloučíme-li z těchto pěti podmínečných rovnic a z rovnice (1) koefficienty $\alpha \ldots \varepsilon$, obdržíme rovnici platnou pro náš případ projektivných řad. Splývá-li bod x s počátkem o, obdržíme podmínku pro vzdálenosti obou tomuto počátku jako pólu příslušných harmonických středů 2. stupně $x_1\, x_2$ soustavy bodové $a_1\, b_1\, c_1$, dosadíme-li do této rovnice $x = 0$.

Úsečky $\overline{oa_2}$, $\overline{ob_2}$ vyjádřeme danými úsečkami $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, $\overline{oc}$. Pro bod a_2 jest $(bca\,a_2) = -1$ čili

$$\frac{\overline{ba}}{\overline{ca}} + \frac{\overline{ba_2}}{\overline{ca_2}} = 0$$

*) *Jonquières: „Mémoire sur la théorie des pôles et polaires etc."* (Journal de M. Liouville 1857) str. 266. Česky zpracována analyticky theorie harmonických středů ve spise: *Cremona „Geometrická theorie křivek rovinných"* (přeložil Dr. Emil Weyr), Praha 1873.

a odtud

$$\frac{\overline{oa} - \overline{ob}}{\overline{oa} - \overline{oc}} + \frac{\overline{oa_2} - \overline{ob}}{\overline{oa_2} - \overline{oc}} = 0,$$

a píšeme-li zkráceně a místo $\overline{oa}$, a_2 místo $\overline{oa_2}$, obdržíme

$$a_2 = \frac{ab + ac - 2bc}{2a - b - c}$$

a cyklickou záměnou

$$b_2 = \frac{bc + ba + 2ca}{2b - c - a}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (1), obdržíme po náležité úpravě rovnici

$$x_1^2(a + b + c) - 2x_1(bc + ca + ab) + 3abc = 0, \quad (1')$$

kteroužto rovnici po zavedení obšírnějšího označení úseček ($\overline{oa}$ místo a atd.), lze uvésti na tvar

$$\frac{\overline{x_1a}}{\overline{oa}} \cdot \frac{\overline{x_1b}}{\overline{ob}} + \frac{\overline{x_1b}}{\overline{ob}} \cdot \frac{\overline{x_1c}}{\overline{oc}} + \frac{\overline{x_1c}}{\overline{oc}} \cdot \frac{\overline{x_1a}}{\overline{oa}} = 0. \quad (2)$$

Označíme-li soustavu bodů $a_1 b_1 c_1$ znaky $a_1 a_2 a_3$, obdržíme podmínku, již lze vyznačiti symbolem

$$\Sigma\left(\frac{\overline{x_1a}}{\overline{oa}}\right)_2 = 0 \quad (3)$$

a kteráž je zvláštním případem symbolického označení

$$\Sigma\left(\frac{x_1a}{oa}\right)_r = 0,$$

jak je uvádí Cremona*) pro *harmonické středy r-tého stupně soustavy n bodů* $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ *vzhledem ku pólu* $o \equiv x$.

Vzhledem k tomuto označení je tudíž rovnice

$$\Sigma\left(\frac{x_1a}{oa}\right)_2 = 0$$

podmínkou pro harmonické středy stupně 2. soustavy bodů $a_1 a_2 a_3$.

---

*) Cremona Weyr: Geom. theor. křiv. rov. str. 18.

d) V případě, že pól $o \equiv x$ jakožto bod řady jednoduché splývá s jedním z bodů základních na př. $c_1 \equiv c$, stane se — jak z rovnice (1') vyplývá, učiníme-li v ní $c = 0$ — jeden kořen pro x_1 rovný nulle, a v důsledku toho splývá s tímto bodem $x \equiv c_1$ taktéž jeden z obou harmonických středů $x_1 x_2$ na př. x_1, jakožto jeden z příslušných bodů v involuci a druhý $x_2 \equiv c_2$ odděluje body $a_1 b_1$ harmonicky.

Tento bod $x_2 \equiv c_2$, který je s bodem c_1 harmonicky sdružen vůči bodům $a_1 b_1$, lze označiti jako *harmonický střed soustavy dvojbodové* $a_1 b_1$ pro pól c_1, ježto v tomto případě platí Cremonovy rovnice (2) a (3), redukované pro dva body $a_1 b_1$ jako základní.

Neboť ježto jest $(c_2 c_1 a_1 b_1) = -1$, platí

$$\frac{\overline{c_2 a_1}}{c_1 a_1} + \frac{\overline{c_2 b_1}}{c_1 b_1} = 0$$

a po zavedení znaků $a_1 a_2$ místo $a_1 b_1$ a znaku o místo c_1, obdržíme

$$\Sigma \left(\frac{c_2 a}{oa} \right)_1 = 0,$$

což je Cremonova rovnice (3) pro harmonický střed c_2 soustavy dvojbodové $a_1 a_2$ vzhledem ku pólu o.

e) Sestrojíme-li na přímce P bod x' tak, aby byl harmonickým středem soustavy $x_1 x_2$ pro pól $x \equiv o$ — již jsme sestrojili jako harmonické středy 2. stupně soustavy $a_1 b_1 c_1$ pro tentýž pól — t. j. sestrojíme-li takový bod x', který s bodem x odděluje body $x_1 x_2$ harmonicky, potom je, jak dokážeme, tento bod x' zároveň dle Cremonovy definice harmonickým středem prvého stupně soustavy bodové $a_1 b_1 c_1$ pro pól x.

Spojíme-li tudíž (obr. 2.) průmět ξ bodu x s bodu s na křivku K s průsečíkem p tečen v bodech $\xi_1 \xi_2$ ke kuželosečce K vedených, protne tento paprsek podruhé křivku K v bodě ξ'*), jenž se promítá paprskem $\overline{s\xi'}$ do žádoucího bodu x' přímky P.

*) Bod ξ' je, jak zřejmo, harmonicky sdruženým k bodu ξ vůči bodům $\xi_1 \xi_2$.

Že tento bod x' splňuje Cremonovu definici harmonických středů 1. stupně pro soustavu tří bodů, totiž rovnici

$$\Sigma\left(\frac{x'a}{oa}\right)_1 = 0,$$

již lze v našem označení psáti

$$\frac{\overline{x'a}}{\overline{oa}} + \frac{\overline{x'b}}{\overline{ob}} + \frac{\overline{x'c}}{\overline{oc}} = 0, \tag{4}$$

dokážeme takto:

Podmínku $(ox'x_1x_2) = -1$ pišme ve tvaru:

$$\frac{\overline{ox_1}}{\overline{x'x_1}} + \frac{\overline{ox_2}}{\overline{x'x_2}} = 0$$

aneb

$$\overline{ox'}(ox_1 + ox_2) - 2\,\overline{ox_1}\,.\,\overline{ox_2} = 0. \tag{5}$$

Ježto veličiny $\overline{ox_1}$, $\overline{ox_2}$ jsou kořeny kvadratické rovnice (1), platí pro součet a součin kořenů:

$$\overline{ox_1} + \overline{ox_2} = \frac{2(ab + ac + bc)}{a + b + c}, \quad \overline{ox_1}\,.\,\overline{ox_2} = \frac{3abc}{a + b + c}.$$

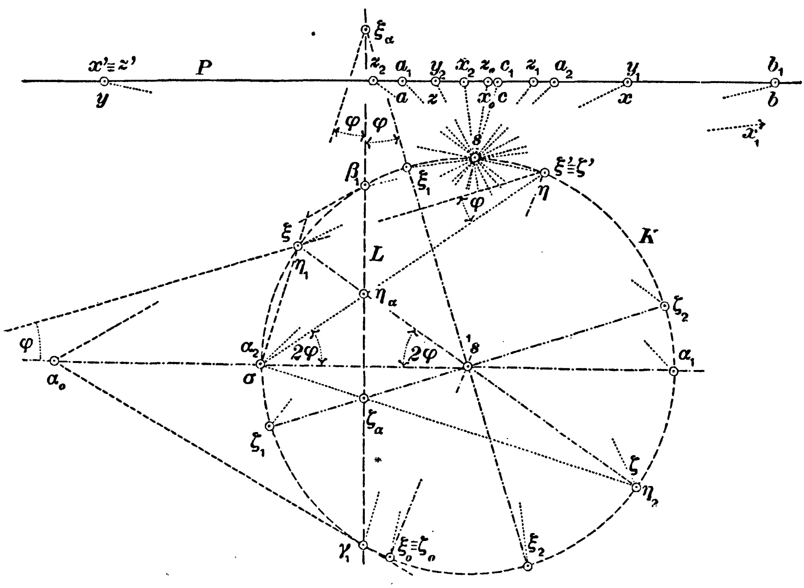
Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (5), obdržíme (píšíce $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, $\overline{oc}$ místo a b c) uvedený vztah (4), čímž podán důkaz, že *čtvrtý harmonický bod x' ku pólu x vzhledem ku harmonickým středům stupně druhého x_1x_2 soustavy $a_1b_1c_1$ jest harmonickým středem stupně prvého téže soustavy bodové pro týž pól.**)

f) Pokládejme dále právě sestrojený střed prvého stupně x' za pól $y \equiv x'$ a hledejme jemu příslušné harmonické středy stupně druhého $y_1\,y_2$ konstrukcí odvozenou v odst. *b*) (obr. 2.). Bodu $x' \equiv y$ přísluší bod $\xi' \equiv \eta$ na kuželosečce K; dále třeba spojiti bod η_α, v němž paprsek $\overline{\alpha_2\eta} \equiv \overline{\sigma\eta}$ protíná přímku $L \equiv \overline{\beta_1\gamma_1}$ s bodem ${}^1s$ a průsečíky $\eta_1\,\eta_2$ této spojnice s kuželoseč-

*) Věta tato je jako zvláštní případ obsažena ve větě Cremonově: „Jsou-li $m_1m_2m_3 \ldots m_\nu$ harmonické středy stupně ν-tého dané soustavy $a_1a_2 \ldots a_n$ pro pól o, pak jsou harmonické středy stupně $s\,(s < \nu)$ soustavy $m_1m_2 \ldots m_\nu$ pro pól o současně harmonickými středy stupně s pro původně danou soustavu $a_1a_2 \ldots a_n$ vzhledem k témuž pólu o." Cremona-Weyr l. cit. str. 20.

kou K promítnouti s bodu s do žádaných bodů $y_1 y_2$ na přímku P. Ježto však, jak níže dokážeme, jeden — v obr. 2. η_1 označený — z těchto bodů $\eta_1 \eta_2$ spadá s bodem ξ, v němž dříve sestrojený paprsek $\overline{sx}$ protnul kuželosečku K, jest dřívější pól x jedním z obou hledaných harmonických středů $y_1 y_2$. Můžeme tedy vysloviti větu:

*Je-li x' harmonickým středem stupně prvního soustavy bodů základních $a_1 b_1 c_1$ pro pól x, jest x jedním z obou harmonických středů stupně druhého téže soustavy bodové vzhledem ku pólu x'.**)



Obr. 3.

Že bod $\eta_1 \equiv \xi$, čili *že přímka $\overline{\xi\, {}^1s}$ jde bodem η_α*, dokážeme předem pro případ zvláštní (obr. 3.), kdy kuželosečka K jest kružnicí, již body $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ dělí na tři stejné díly. Potom paprsek, na němž v tomto zvláštním případě leží body α_0, α_1, α_2

*) Věta tato je zvláštním případem věty obecné: „Je-li bod m jedním z harmonických středů stupně ν-tého pro soustavu $a_1 a_2 \ldots a_n$ vzhledem k pólu o, je naopak o jedním z harmonických středů stupně $n-\nu$-tého téže soustavy pro pól m.“ Cremona-Weyr, l. cit. str. 19.

$\equiv \sigma$, $\overline{{}^1s}$ (porovnej s obr. 2.) jest průměrem kružnice K, přímka $L \equiv \overline{\beta_1\gamma_1}$ je symetrálou úsečky $\overline{\alpha_2{}^1s}$ a bod ${}^1s$ středem kružnice K. Protíná-li paprsek $\overline{\alpha_2\xi\xi_\alpha}$ libovolně bodem $\alpha_2 \equiv \sigma$ vedený kružnici K v bodě ξ (obr. 3.) a přímku $L \equiv \overline{\beta_1\gamma_1}$ v bodě ξ_α, svíraje s touto úhel φ, vytíná průměr $\overline{\xi_\alpha{}^1s}$ na kružnici K vzhledem k odst. b) (obr. 2.) body $\xi_1\xi_2$ a bod ξ' jest, jakožto harmonicky sdružený ku bodu ξ vůči bodům $\xi_1\xi_2$ (odst. předchozí), průsečíkem kružnice K s paprskem $\overline{\xi\xi'} \perp \overline{\xi_\alpha{}^1s}$, kterýž svírá s přímkou $\overline{\sigma{}^1s}$ taktéž úhel φ. Ježto dále jest $\sphericalangle\, \sigma{}^1s\xi = \sphericalangle\, \sigma\xi_\alpha{}^1s = 2\varphi$, jest $\sphericalangle\, \sigma\xi'\xi = \varphi$ a tedy $\sphericalangle\, {}^1s\sigma\xi' = 2\varphi$; trojúhelník $\sigma\eta_\alpha{}^1s$ jest však rovnoramenný a proto jest též $\sphericalangle\, \eta_\alpha{}^1s\sigma = 2\varphi$ a tudíž skutečně (vzhledem k již uvedené relaci $\sphericalangle\, \sigma{}^1s\xi = 2\varphi$) jde přímka $\overline{\xi{}^1s}$ bodem η_α jakožto průsečíkem přímek L a $\overline{\sigma\xi'}$.

Že právě odvozená projektivná vlastnost má platnost i v obr. 2. plyne z toho, že přiřadíme-li čtyřúhelníku $\alpha_1\beta_1\alpha_0\gamma_1$ v obr. 3. stejně označený čtyrúhelník v obr. 2. kollineárně, odpovídá v této kollineaci kružnici v obr. 3. kuželosečka K v obr. 2.; neboť tečnám kružnice $\overline{\beta_1\alpha_0}$ $\overline{\gamma_1\alpha_0}$ v obr. 3. odpovídají stejně označené tečny kuželosečky K v obr. 2., kteráž prochází dále, stejně jako kružnice v obr. 3., bodem α_1, čímž je úplně stanovena.*)

g) Z obr. 2. vyplývá dále následní *direktní konstrukce harmonického středu x' prvního stupně* pro pól x bez použití harmonických středů stupně druhého:

Protnouce paprsek $\overline{sx}$ (obr. 2.) kuželosečkou K v bodě ξ, promítněme tento s bodu ${}^1s$ na přímku $L \equiv \overline{\beta_1\gamma_1}$ do bodu η_α. Potom spojnice $\overline{\alpha_2\eta_\alpha}$ protíná křivku K v bodě ξ' a spojnice $\overline{s\xi'}$ přímku P v hledaném bodě x'.

Cyklickou záměnou bodů α_2, β_2, γ_2 a. přímek $\overline{\beta_1\gamma_1}$, $\overline{\gamma_1\alpha_1}$, $\overline{\alpha_1\beta_1}$ obdržíme větu: Promítneme-li bod ξ s bodu ${}^1s$ na paprsky $\overline{\beta_1\gamma_1}$, $\overline{\gamma_1\alpha_1}$, $\overline{\alpha_1\beta_1}$, tu spojnice těchto průmětů s body resp. α_2, β_2, γ_2, procházejí vesměs bodem ξ'.

h) Kdyby bod x jakožto pól splýval s jedním z bodů základních na př. a_1, tedy i $\alpha_1 \equiv \xi$, tu, jak vyplývá z konstrukce v předchozím odstavci uvedené, je i $\xi' \equiv \alpha$, a proto splývá

*) Kdybychom byli místo libovolného paprsku $\overline{\alpha_2\xi\xi_\alpha}$ v obr. 3. vedli onen, který v právě uvedené kollineaci odpovídá stejně označenému paprsku v obr. 2., byly by tyto obrazce — nehledě k přímce P a bodu s — ve všech částech kollineárné.

s tímto bodem základním i příslušný harmonický střed 1. stupně. Splývá-li pól s jedním z bodů $a_2 b_2 c_2$, na př. a_2, tu jak tatáž konstrukce ukazuje, stotožňuje se tomuto pólu příslušný harmonický střed 1. stupně taktéž s bodem α_1.*) Vidíme tedy, že každé ze tří družin involuce $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ uvažované v odst. a), považujeme-li oba její body za póly, odpovídá jediný harmonický střed 1. stupně resp. $a_1 b_1 c_1$ totožný s oním bodem prosté, v témže odstavci uvažované řady $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, $c \equiv c_1 \ldots$, kterýžto této družině projektivně příslušel. Dokážeme, že právě vyslovený vztah platí všeobecně, t. j. pokládáme-li body kterékoliv družiny $x_1 x_2$ involuce $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2 \ldots$ za póly, přísluší jim oběma vzhledem ku soustavě $a_1 b_1 c_1$ tentýž harmonický střed 1. stupně, a sice onen bod x, jenž v prosté, s touto involucí projektivné řadě bodové $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, $c \equiv c_1$ přísluší této družině $x_1 x_2$.

K provedení důkazu stačí ukázati, že libovolný bod x' přímky P, pokládaný za harmonický střed 1. stupně soustavy $a_1 b_1 c_1$, resultuje ze *dvou* pólů, a naopak, že každému z těchto obou pólů přísluší tento *jediný* harmonický střed 1. stupně. Neboť potom takové uvažované dvojiny pólů, odpovídající jednotlivým harmonickým středům 1. stupně, tvoří involuční řadu a příslušné harmonické středy stupně 1. řadu jednoduchou, s onou projektivnou. Tím povstanou na přímce P dvě řady v příbuznosti jednodvojznačné se nalézající a tato příbuznost je, jak dokážeme, s onou v odst. a) uvažovanou totožná.

Že ku libovolnému bodu x' jakožto harmonickému středu 1. stupně soustavy $a_1 b_1 c_1$ lze dospěti vždy a toliko ze *dvou* pólů, plyne z následního:

Budiž ξ' (obr. 2.) průmětem bodu x' s bodu s na křivku K. Průmět ξ tomuto bodu příslušného pólu x vyhledáme — vzhledem ke konstrukci odst. e), jdouce cestou vratnou, najdeme-li na přímce $\overline{\beta_1 \gamma_1} \equiv L$ takový bod ξ_α, jenž je jednak průmětem bodu ξ s bodu $\alpha_2 \equiv \sigma$ na tuto přímku a za druhé, jehož spojnice s bodem ${}^1s$ protíná křivku K v bodech $\xi_1 \xi_2$ oddělujících body $\xi \xi'$ harmonicky.

*) K týmž výsledkům taktéž snadno dospějeme (zejména z obr. 3.) sestrojujíce harmonické středy 1. stupně těchto bodů pomocí harmonických středů 2. stupně konstrukcí uvedenou v odst. e).

Abychom body těchto vlastností na přímce $\overline{\beta_1\gamma_1} \equiv L$ vyhledali, protněme tuto svazkem paprskovým o středu $'s$ v řadě bodové s tímto svazkem perspektivné. Sestrojíme-li ke každému paprsku tohoto svazku onen bod křivky K, který odděluje harmonicky bod ξ' od průsečíků uvažovaného paprsku s kuželosečkou K, vznikne na této křivá se svazkem $'s$ promětná řada, jejíž body promítněme s bodu $\alpha_2 \equiv \sigma$ na přímku $\overline{\beta_1\gamma_1} \equiv L$. Tím vznikne na této druhá řada bodová s prvou projektivná a oba samodružné body těchto řad promítají se s bodu σ do dvou bodů křivky K, kteréž oba lze pokládati tudíž za průměty oněch dvou pólů na přímce P, kteréž vedou k témuž harmonickému středu stupně prvého

Tím dokázáno, že takovéto družiny pólů a jim příslušných harmonických středů 1. stupně skutečně tvoří příbuznost *jednodvojznačnou*, o níž dále dovodíme, že je totožná s onou, která prosté řadě pólů $a\, b\, c \ldots x \ldots$ přiřazovala projektivně involuční řadu harmonických středů 2. stupně a_1a_2, b_1b_2, $c_1c_2 \ldots x_1x_2, \ldots$ (odst. a).

Ježto třem bodům $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$. $c \equiv c_1$, pokládáme-li je za body jednoduchých řad v jedné (odst. d) i druhé příbuznosti, odpovídají v obou případech tytéž družiny a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 řad involučních, odpovídají i každému dalšímu bodu x pokládanému za bod prosté řady jedné i druhé příbuznosti stotožněné družiny příslušných řad involučních, *tedy obě příbuznosti jsou totožny.*

Tudíž lze vysloviti větu:

*Dvěma pólům tvořícím družinu involuční řady a_1a_2, b_1b_2, $c_1c_2 \ldots$ přísluší jediný harmonický střed 1. stupně, a to onen bod, jehož harmonickými středy 2. stupně jsou body stotožňující se s těmito póly.**)

Také mezi oběma družinami harmonických středů 2. stupně pro takovéto dvojiny pólů existuje zajímavý vztah, kterýž snadno odvodíme v obr. 3.

*) Také tuto lze pokládati za specielní případ obecnější věty Cremonovy odst. f).

Bodu $\eta \equiv \xi'$ jakožto průmětu*) pólu $y \equiv x'$ přísluší body η_1, η_2 jakožto průměty harmonických středů 2. stupně (odst. *b*), kteréž pokládejme za průměty pólů. Bod η_1 jest již jako průmět pólu x označen znakem ξ, bod η_2 označme ζ jakožto průmět nového bodu z. Bodu $\xi \equiv \eta_1$ přísluší známé již průměty $\xi_1\xi_2$ harmonických středů 2. stupně x_1x_2. Abychom obdrželi průměty $\zeta_1\zeta_2$ harmonických středů 2. stupně pro pól ζ, promítněme (odst. *b*) bod ζ s bodu $\sigma \equiv \alpha_2$ na přímku $L \equiv \overline{\beta_1\gamma_1}$ do bodu ζ_α, načež spojnice $\overline{\zeta_\alpha{}^1 s}$ protíná kružnici K v průmětech $\zeta_1\zeta_2$ hledaných harmonických středů z_1z_2 na přímce P. Ježto však úhel $\zeta_\alpha\sigma\xi_\alpha$ jakožto obvodový nad průměrem $\overline{\xi\zeta}$ kružnice K je pravý a roven dle přímky L souměrnému úhlu $\zeta_\alpha{}^1 s\,\xi_\alpha$, jsou paprsky $\overline{\xi_1\xi_2}$ a $\overline{\zeta_1\zeta_2}$ k sobě kolmé průměry kruhu K a *průměty* x_1x_2, z_1z_2 *jejich průsečných bodů* $\xi_1\xi_2$, $\zeta_1\zeta_2$ *s křivkou* K *tvoří tedy na přímce* P *harmonickou čtveřinu bodovou.*

Dle věty v tomto odstavci odvozené oběma pólům x, z příslušné harmonické středy 1. stupně stotožňují se v bodě

$$x' \equiv z' \equiv y$$

majícím za průmět bod $\xi' \equiv \zeta' \equiv \eta$.

Sestrojíme-li onen bod ξ_0 na kružnici, který s bodem ξ odděluje body $\zeta_1\zeta_2$ harmonicky, stotožňuje se tento s bodem ζ_0, který odděluje bod ζ od bodů $\xi_1\xi_2$ harmonicky, jak z obr. 3. bezprostředně vyplývá.**) Mimo to je zřejmo, že bod $\xi_0 \equiv \zeta_0$ *leží s bodem* $\eta \equiv \xi' \equiv \zeta'$ *na průměru kružnice* K.

Výsledky v tomto odstavci odvozené lze shrnouti větou:

Dvěma sdruženým bodům x, z *involuční řady* $a_1a_2, \ldots$ *jako pólům přísluší jako harmonické středy* x_1x_2 *resp.* z_1z_2 *druhého stupně družiny téže involuce, které se oddělují harmonicky a společný harmonický střed 1. stupně* $x' \equiv z'$; *tomuto jakožto pólu přísluší družina* xz *jako harmonické středy 2.*

*) Průmětem rozumíme zde vždy průmět nějakého bodu přímky P s bodu s na kružnici K.

**) Věta tato je opět důsledkem obecnější věty Cremonovy: „Jsou-li $m_1m_2 \ldots m_{n-1}$ harmonické středy stupně $n-1$ soustavy $a_1a_2 \ldots a_n$ pro pól o a $m'_1m'_2 \ldots m'_{n-1}$ harmonické středy rovněž $n-1$ stupně téže soustavy pro pól o', stotožňují se harmonické středy stupně $n-2$ soustavy $m_1m_2 \ldots m_{n-1}$ pro pól o' s harmonickými středy téhož stupně soustavy $m'_1m'_2 \ldots m'_{n-1}$ pro pól o.“ (Cremona-Weyr, l. cit. str. 22.)

stupně. Sestrojíme-li pro družinu $x_1 x_2$ k bodu z harmonicky sdružený bod x_0, odděluje tento s bodem x také družinu $z_1 z_2$ harmonicky a tvoří s bodem $x' \equiv z'$ jednu družinu involuce $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ ...

i) Doposud sestrojovali jsme harmonické středy soustavy trojbodové za předpokladu, že všechny základní body $a_1 b_1 c_1$ jsou *reálné.*

Při konstruktivním použití stává se však, že z těchto tří bodů toliko *jeden je reálný, druhé dva jsou sdružené imaginárné**).

Budiž (obr. 4.) a_1 reálný bod základní, druhé dva, $b_1 c_1$, buďtež určeny jakožto samodružné body elliptické involuce dané družinami ${}^1k^2k$, ${}^1l^2l$. Promítněme bod a_1 s libovolného bodu s křivky K na tuto křivku do bodu α_1. Značí-li ${}^1\varkappa^2\varkappa$, ${}^1\lambda^2\lambda$ průměty bodů ${}^1k^2k$, ${}^1l^2l$ s téhož bodu s na křivku K, jest bod

$$\alpha_0 \equiv (\overline{{}^1\varkappa^2\varkappa}\ \overline{{}^1\lambda^2\lambda})$$

— střed involuce ${}^1\varkappa^2\varkappa$, ${}^1\lambda^2\lambda$ ... — průsečíkem imaginárných tečen, v oněch, taktéž imaginárných bodech $\beta_1 \gamma_1$, v nichž jeho polára L, direkční osa téže involuce, protíná křivku K. Sestrojujíce bod α_2, který s bodem α_1 odděluje body $\beta_1 \gamma_1$ harmonicky, protněme křivku K spojnicí $\overline{\alpha_1 \alpha_0}$ v bodě α_2. Body $\beta_2 \gamma_2$ jsou ovšem imaginárné a taktéž i spojnice $\overline{\beta_1 \beta_2}$, $\overline{\gamma_1 \gamma_2}$, kteréž se však protnou na přímce $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ v reálném bodě ${}^1s$. Abychom tento sestrojili, promítněme harmonickou čtveřinu bodovou $\beta_1 \beta_2 \alpha_1 \gamma_1$ (odst. *a*) s bodu β_1 na přímku $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$. Promítající paprsek bodu β_1 stotožňuje se s imaginárnou tečnou křivky K v tomto bodě,

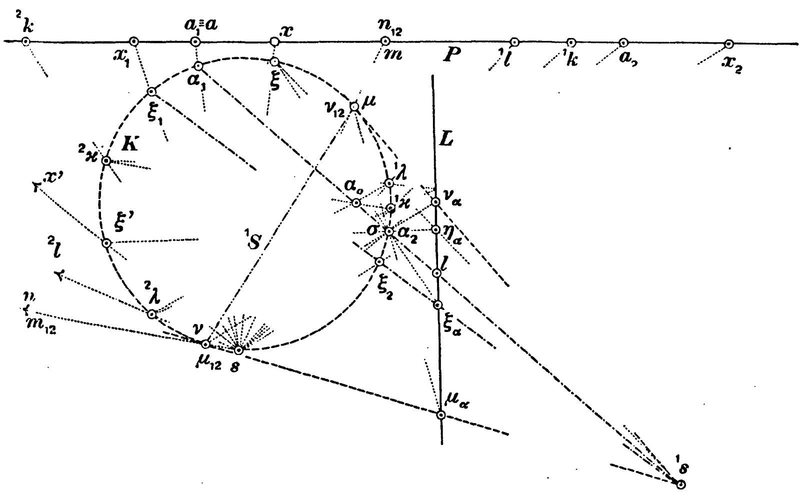
*) Případ tento vyskytuje se na př. při sestrojování první poláry ke křivce 3. stupně, určené svazkem involučním a s tímto projektivním svazkem prostým (B. Procházka: „Vybrané statě z deskriptivní geometrie," svazek IV., odst. 242 *c*), když sečna protíná křivku jen v jednom reálném bodě. Body průsečné sečny s křivkou obdržíme, protneme-li oba zmíněné svazky touto sečnou v řadách nalézajících se v příbuznosti jedno—dvojznačné a sestrojíme-li samodružné elementy těchto řad. Tyto body sestrojíme pomocí dvou kuželoseček, (z nichž jednu můžeme libovolně voliti), jichž jeden průsečný bod je znám. V našem případě budou dva ze zbývajících tří průsečíků imaginárné a jich (reálná) spojnice indukuje ve zvolené kuželosečce involuční řadu elliptickou, která vede nás k oné, jíž jsou stanoveny ony dva imaginárné průsečíky sečny s křivkou 3. stupně.

protínající přímku $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ v reálném bodě α_0, bod β_2 promítá se do bodu ${}^1s$, bod α_1 sám v sebe a bod γ_1 do průsečíku

$$l \equiv (L\overline{\alpha_1\alpha_2}).$$

Bod ${}^1s$ odděluje tedy harmonicky bod α_0 od bodů α_1 a l.

Znajíce bod ${}^1s$, můžeme pomocí něho, bodu $\alpha_2 \equiv \sigma$ a přímky $L \equiv \overline{\beta_1\gamma_1}$ sestrojiti ku průmětu ξ bodu x libovolně na přímce P zvoleného jakožto pólu příslušné harmonické středy stupně druhého. Promítneme-li tento (dle konstrukce v odst. *b*) uvedené) s bodu $\alpha_2 \equiv \sigma$ na přímku L do bodu ξ_α, protne paprsek $\overline{{}^1s\xi_\alpha}$ kuželosečku K v bodech $\xi_1\xi_2$, kteréž promítají se s bodu s na přímku P do hledaných bodů x_1x_2.

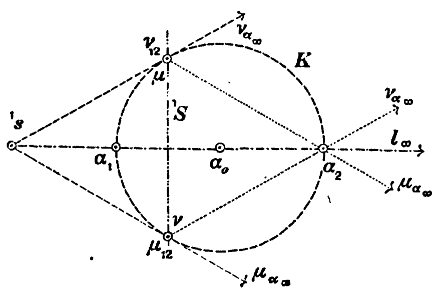


Obr. 4.

Hledajíce pro tentýž pól x harmonický střed 1. stupně x', obdržíme (dle odst. *h*) průmět tohoto ξ' na křivce K, promítneme-li bod ξ s bodu ${}^1s$ na přímku L do bodu η_α a vyhledáme druhý průsečík ξ' paprsku $\overline{\alpha_2\eta_\alpha}$ s kuželosečkou K.

Bod ${}^1s$ jakožto střed involuční řady $\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2 \ldots$ průmětů harmonických středů 2. stupně, jest vnějším bodem kuželosečky K.

Polára ${}^1S$ tohoto bodu vůči kuželosečce K protíná tuto ve dvou reálných bodech μ_{12}, ν_{12} (obr 4.) jakožto průmětech samodružných bodů m_{12}, n_{12} involuční řady a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 ... Abychom sestrojili pro tyto spadající družiny této involuční řady harmonických středů jim příslušné body m, n prosté řady pólů abc ... (odst. a), protněme — provádějíce vratnou konstrukci ku oné v odst. b) uvedené — spojnice $\overline{\mu_1\mu_2}$, $\overline{\nu_1\nu_2}$, t. j. tečny v bodech μ_{12} resp. ν_{12} ke křivce K sestrojené přímkou L v bodech μ_α resp. ν_α, kteréž se promítají s bodu α_2 na křivku K do bodů μ resp. ν, jichž průměty s bodu s na přímku P jsou hledané póly m resp. n. Tu pak, jak dokážeme, prochází spojnice $\overline{\mu_\alpha\alpha_2}$ bodem ν_{12} a spojnice $\overline{\nu_\alpha\alpha_2}$ bodem μ_{12} t. j. bod μ stotožňuje se s bodem ν_{12} a bod ν s bodem μ_{12}.



Obr. 5.

Neboť transformujeme-li obraz 4. kollineárně tak, aby kuželosečce K odpovídala kružnice a přímce L přímka úběžná, bude (obr. 5.) bod α_0 středem kružnice a paprsek $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ jejím průměrem, na němž sestrojíme bod ^1s, oddělující harmonicky bod α_0 od bodu α_1 a bodu úběžného l_∞, učiníme-li $\overline{\alpha_0\alpha_1} = \overline{\alpha_1\,{}^1s}$. Polára ^1S tohoto bodu ^1s jest symetrálou poloměru $\overline{\alpha_1\alpha_0}$ Tečny $\overline{^1s\mu_{12}}$, $\overline{^1s\nu_{12}}$ vytínají na přímce úběžné L_∞ body $\mu_{\alpha_\infty}\nu_{\alpha_\infty}$ a spojnice $\overline{\mu_{\alpha_\infty}\alpha_2}$, $\overline{\nu_{\alpha_\infty}\alpha_2}$ tvoří s těmito tečnami kosočtverec, a ježto je přímka ^1S symetrálou úsečky $\overline{^1s\alpha_2}$, leží na ní dva vrcholy tohoto kosočtverce, a proto jeho strany skutečně procházejí body μ_{12}, ν_{12} jak bylo tvrzeno.

Tím dokázána věta:

*Pól příslušný jednomu ze samodružných bodů involuční řady a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 ... stotožňuje se s druhým jejím samodružným bodem.**)

Tyto samodružné body m_{12}, n_{12} dělí přímku P ve dvě části. Toliko pólům ležícím v oné části, na níž připadá bod a_1 náleží reálná družina harmonických středů 2. stupně.

Harmonický střed 1. stupně jest však vždy reálný a připadá pro póly reálné do části právě uvedené, pro póly však sdruženě imaginárné, tvořící družiny involuce a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 ... padá do druhé části přímky P.

Strojení středu křivosti křivek methodou analyticko-deskriptivní.

Dr. Ant. **Pleskot**, professor v Plzni.

Konstrukce středu křivosti křivek užitím methody ryze deskriptivní uvedeny jsou ve spise Machovcově „Zobrazování tečen a středu křivosti křivek na základě nové methody.“ V článku tomto užijeme jak geometrie deskriptivní tak i analytické; dospějeme tím k jednoduchým konstrukcím středu křivosti důležitějších křivek jakož i k důkazu některých geometrických vět týkajících se středu křivosti křivek.

Normály křivky rovinné možno považovati za pravoúhlé průměty do roviny křivky površek jisté přímočáré plochy, jejíž řídící rovinou jest rovina křivky. Podél površky dotýká se plochy té hyperbolický paraboloid o téže řídící rovině, za jehož dvě povrchové přímky soustavy druhé možno voliti kterékoli dvě tečny přímočáré plochy vedené ve dvou libovolných bodech A a B površky. I možno za pravoúhlé průměty těchto dvou tečen vzíti dvě libovolné přímky v rovině řídící, jež procházejí průměty A_1 a B_1 bodů A a B; na jedné z těchto přímek možno stopník příslušné tečny voliti docela libovolně, kdežto stopník tečny druhé jest volbou prvého stanoven.

---

*) V případě všech reálných bodů základních byly tyto samodružné body imaginárné.