Vladimír Novák

Měření konstanty gravitační a střední specifické hmoty země

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 1, 10--28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109091

Měření konstanty gravitační a střední specifické hmoty země.

Napsal

Dr. Vlad. Novák,
docent c. k. české university v Praze.

Dle Newtonova zákona gravitačního působí dvě hmoty vzájemně na sebe silou úměrnou přímo součinu jich velikostí a nepřímo čtverci vzdálenosti. Mathematicky zní tento zákon

$$(1) \qquad \text{Síla} \equiv f = C \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

kde m_1 a m_2 značí velikosti obou hmot, r vzdálenost jich hmotných středů a C konstantu. Platnost zákona potvrzují, jednak co se týče přímé úměrnosti hmot, pokusy s kyvadlem, jednak vzhledem k nepřímé úměrnosti se čtvercem vzdálenosti, zákony Keplerovy. Ukazuje se, že doba kyvu nezávislá jest na hmotě kývající, z čehož následuje, že síla pohyb působící musí býti přímo hmotě úměrna. Vzájemnost gravitačního působení vyžaduje pak tutéž závislost pro m_1 jako pro m_2. Zákony Keplerovy vyhovují měřením, byvše odvozeny ze zákona Newtonova, nepřímo jej potvrzují. Při rozboru rovnice (1) zbývá tedy otázka, jaký význam má konstanta C.

Poněvadž ostatní veličiny v rovnici přicházející jsou definovány, patrno, že *konstanta gravitační* C není *pouhé číslo, pouhý koefficient*, nýbrž veličina mající *rozměr*. Síla je totiž definována rovnicí

$$(2) \qquad f = m \,.\, g,$$

kde m je hmota a g urychlení silou působené. Představme si, že země naše majíc hmotu M přitahuje těleso hmoty m na povrchu země, jejíž poloměr nazveme R; pak z rovnic (1) a (2) plyne

$$mg = C \frac{mM}{R^2}$$

čili

$$C = \frac{R^2 g}{M} . \tag{3}$$

Dosadíme-li sem rozměry příslušných veličin, vychází rozměr konstanty gravitační

$$C \ldots \frac{L^3}{M . T^2},$$

kde L, M, T značí základní jednotky délky, hmoty a času.

Z výsledku toho plyne, že by bylo *možno* učiniti konstantu gravitační rovnu jedné omezením se na dvě základní jednotky. Jednotka hmoty byla by pak odvozená, derivovaná a měla by rozměr $\frac{L^3}{T^2}$.

Zavedeme-li na místě M hmoty naší země součin z objemu V a *střední hmoty specifické* δ, dává rovnice (3) spojení této veličiny δ s konstantou gravitační C

$$C = \frac{R^2 . g}{V . \delta} . \tag{4}$$

Poskytuje tedy měření veličiny jedné zároveň veličinu druhou. Účelem těchto řádků jest popsati a vylíčiti methody, kterými gravitační konstanta, respective střední specifická hmota země byla stanovena. Byl to problém, který již v minulém století zajímal astronomy a zeměpisce právě tak jako fysiky a mnozí z nich snažili se na základě určitých hypothes střední specifickou hmotu země vypočítati. Výsledky takových úvah však nikterak neuspokojovaly. Teprve v letech 1774—76 *Maskelyne* *) a *Hutton* **) uspořádali v Perthshire měření na obou bocích pohoří Shehallien (ve Skotsku), na jehož základě vypočtena pro střední specifickou hmotu země hodnota pravděpodobná.

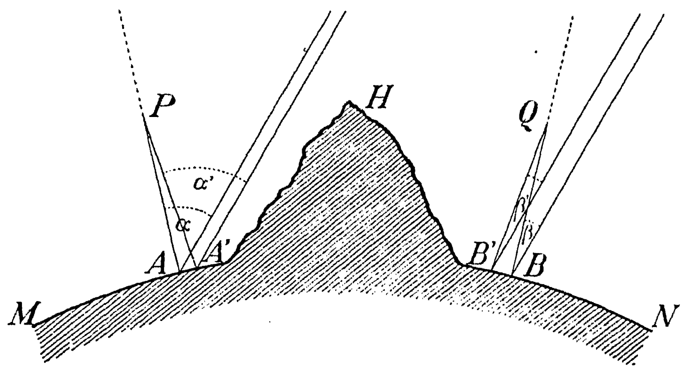
---

*) *Nevil Maskelyne* (1732—1811) byl astronomem v Greenwich. Měření jeho uveřejněno ve Philos. Transaction r. 1777 pod názvem: „An account of observations made on the mountain Shehallien for finding its atraction.“

**) *Charles Hutton* (1737—1823) prof. mathematiky ve Woolwich u Londýna. Survey of the Shehallien to ascertain the earth's mean density (1778). The point of greatest attraction of a hill (1780). On the mean density of the earth (1821); všechna pojednání ve Philos. Transaction.

Základ methody uvedených pozorovatelů jest tento. V obr. 1. naznačuje MN povrch zemský, H horu neb průřez hřbetu horského oddělujícího místa A a B, jichž poloha na povrchu země jest známa.

Olovnice v P neb v Q zavěšená ustálila by se do směru vertikálního, t. j. normálního vzhledem k MN, kdyby na hmotu olovnice působila pouze přítažlivost země bez hmoty H. Působením horstva vyšine se olovnice ze směru PA resp. QB do směrů PA′ resp. QB′. Díváme-li se z míst A, B, A′, B′ k téže stálici, tedy předmětu prakticky ve vzdálenosti nekonečné, jest úhlová vzdálenost míst AB. $\varphi = \alpha - \beta$ (veličina známá); působením přítažlivosti horstva H změní se však α na α' a β na β'. Měřením ustanoví se úhel α' a β'. Jest však $\alpha' - \beta' = \varphi + \varepsilon$, z čehož se ε určí.



Obr. 1.

Když by v jednoduchém případě olovnice v P a v Q zavěšená nalézala se ve stejném niveau jako těžiště hory H a když by obě pozorovací stanice byly stejně od tohoto těžiště vzdáleny, pak svírá směr olovnice skutečný se směrem u A (neb u B) normálním (čili takovým, který je podmíněn pouze přitahováním ostatní země) úhel $\frac{\varepsilon}{2}$. Jest tedy

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\text{přítažlivá síla horstva}}{\text{přítažlivá síla země}}.$$

Vyjádříme-li čítatele i jmenovatele dle zákona Newtonova příslušnými výrazy, obdržíme

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\frac{\mathrm{C}\,.\,m}{r^2}}{\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{R}^2}},$$

kde C značí gravitační konstantu, m hmotu horstva a M hmotu země.

Máme tudíž

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi\mathrm{R}r^2\delta}\,. \tag{5}$$

Ve vzorci tomto přichází však *hmota* hory m, kterou lze jen velmi nejistě a přibližně stanoviti z objemu a střední hmoty specifické, kteráž se ovšem posuzuje dle hornin zde se nalézajících. Byť by tedy i úhel ε, který v případě Maskelynově byl 11·66″, byl změřen dosti přesně, není možná naměřiti m stejně přesně a methoda omezuje se pouze na *orientaci* o veličině hledané. Výsledek měření Maskelynova jest $\delta = 4{\cdot}7$.

Jinou methodu určení střední specif. hmoty země navrhl *Airy**). Značí-li (obr. 2.) AB důl, b jeho hloubku, $a+b$ poloměr země R, jest možno ze známého urychlení tíže v A a B odvoditi vztah mezi specifickou hmotou koule opsané poloměrem a a specif. hmotou σ vrstvy o tloušťce b.

Budiž urychlení v A na povrchu země g_1 a urychlení v B na dně důlu g_2. Hmota koule o poloměru a jest $\frac{4}{3}\pi a^3\delta$; hmota ostatního tělesa $\frac{4}{3}\pi\,\{(a+b)^3-a^3\}\,\sigma$.

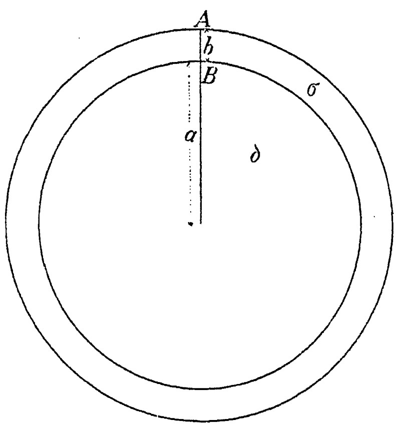
*) *Airy* (*George Biddell*), původně professor fysiky a astronomie v Cambridge (v Anglii), později stal se (1836) královským astronomem v Greenwich. Myšlénku, užiti kyvadla ke stanovení střední sp. hmoty země, provedl již dříve (1824) *Carlini*, (ředitel hvězdárny v Miláně), jenž pozoroval dobu kyvu téhož kyvadla jednou na vrcholu a podruhé na úpatí hory. Pokusy provedené na hoře Mont Cenis poskytly výsledek $\delta = 4{\cdot}84$.

Jest tudíž

$$g_1 = \frac{C.\frac{4}{3}\pi\{(a+b)^3 - a^3\}\sigma}{(a+b)^3},$$

dále pak

$$g_2 = \frac{C.\frac{4}{3}\pi a^3 \delta}{a^2} = C.\frac{4}{3}\pi a \delta .$$



Obr. 2.

Zkrátíme-li výraz pro g_1, uváživše, že členy $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ jsou velmi malé, obdržíme z poměrů obou výrazů rovnici

$$\frac{\delta}{\sigma} = \frac{1}{\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g_1}{g_2}\right)\frac{a}{3b}} . \tag{6}$$

Dlužno tedy měřiti *poměr* urychlení tíže na povrchu dûlu a na jeho dně, dále hloubku dûlu a odhadnouti střední specif. hmotu povrchu zemského. Poměr $\frac{g_1}{g_2}$ určil Airy kyvadlem, jehož dobu kyvu měřil jak na povrchu, tak i na dně dûlu.

Je-li doba kyvu na povrchu t_1 a na dně důlu t_2, pak

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Při pokusu Airy-ho lišil se poměr $\frac{g_1}{g_2}$ od jedničky o $\frac{1}{19000}$; $\frac{a}{b}$ činilo 16600. Za σ *zvoleno* 2·75. Z těchto dat číselných vychází

$$\delta = 6{\cdot}62.$$

Methoda zase obsahuje veličinu, která se pouze *odhaduje,* totiž specifickou hmotu vrchních vrstev země. Odtud také vychází číslo poněkud veliké.

Skutečně také S. Haughton, posuzuje výsledek tento, opravil číslo σ hodnotou $= 2{\cdot}059$, ježto prý větší část důlu nalézala se *pod hladinou* mořskou. Pak se číslo Airy-ho změní na

$$\delta = 5{\cdot}48.$$

Obě uvedené methody *předpokládají* specifickou hmotu země alespoň za částečně *známou.* V dalším uvedeny budou methody *bez* tohoto předpokladu. Tyto lze rozděliti ve dvě hlavní skupiny, v prvé užívá se kyvadla v rovině horizontalní se pohybujícího, v druhé pak vah.

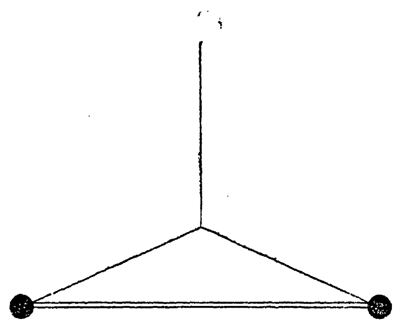
Způsob, kterým lze konstantu gravitační stanoviti *přímo,* kde tudíž není oné neurčitosti a nejistoty ve veličinách k stanovení δ potřebných, zavedl *Cavendish* *) uživ torsního kyvadla. Myšlénka jeho byla, srovnávati přítažlivost dvou známých hmot *přímo* se silou známou.

Známou silou byla torse tenkého drátu na stropě upevněného, na němž byla zavěšena (obr. 3.) lehounká tyč 6 stop dlouhá (asi 183 *cm*), nesoucí na koncích dvě stejné olověné koule 2 libry těžké. K těmto koulím mohly býti zvláštním zařízením přiblíženy dvě veliké těžké koule olověné (po 432 librách)

---

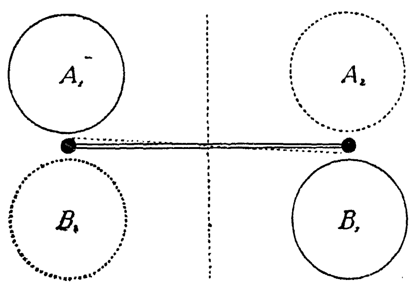
*) *Henry Cavendish* (1731—1810) byl bohatý soukromník cele oddaný vědám. Pojednání jeho viz Phil. Transact. (1798) „Experiments to determine the density of the earth".

až do vzdálenosti 9 palců (22·8 *cm*) těžišť obou koulí velké a malé, aneb také (viz obr. 4.) postaveny do polohy k vahadlu kolmé, tudíž indifferentní (v obr. tečkované).



Obr. 3.

Celý přístroj byl v místnosti uzavřené, pozorování se dálo dvěma dalekohledy zapuštěnými do zdí a namířenými proti menším koulím, u nichž připevněny byly škály. Závěs a kyvadlo chráněny ještě zvláštním dřevěným obalem před proudy vzduchovými a změnami temperatury.



Obr. 4.

Pozorování záleželo jednak v pozorování doby kyvu kyvadla, když obě velké koule byly v poloze indifferentní, jednak v měření úchylky, způsobené přiblížením obou velkých koulí ke kyvadlu. Aby byl vymýtěn vliv přítažlivosti skříně, stěn atd., byla tato úchylka pozorována též z polohy *symmetrické*, to jest obě velké koule stočeny zvláštním zařízením tak, jak jest v obr. 4. tečkami naznačeno. Budiž zmíněná doba kyvu t, moment torse závěsu T, délka kyvadla $2a$ a hmota malých koulí m, pak jest

$$t = \pi \sqrt{\frac{2ma^2}{T}}$$

čili

$$\text{(7)} \qquad T = \frac{2\pi^2 m a^2}{t^2}.$$

Předpokládá se při tom, že moment setrvačnosti dřevěného vahadla jest proti momentu hmot na konci upevněných nepatrný.

Přiblížíme-li nyní velké koule do polohy A_1, B_1 bude kyvadlo kývati kolem nové rovnovážné polohy, již lze z pozorovaných obratů na škále velmi dobře určiti. Podobně určíme rovnovážnou polohu, když velké koule jsou v poloze symmetrické v A_2, B_2. Jsou-li rozdíly těchto dvou poloh na škále od polohy, kol níž kývalo kyvadlo bez účinku velkých koulí α_1 a α_2, pak jest $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = n$ úchylka způsobená přítažlivostí velké koule.

Úhel torse jest pak $\frac{n}{a}$, předpokládaje, že dílky na škále znamenají jednotky délkové.

Jsou-li těžiště všech přitahujících se těles v téže horizontální rovině, pak

moment přitažlivé síly = momentu otáčivé síly

čili

$$2fa = T\frac{n}{a} \text{ aneb } f = T\frac{n}{2a^2}.$$

Dosadíme-li sem hodnotu (7) pro T nalezenou, vychází

$$\text{(8)} \qquad f = \frac{\pi^2 m n}{t^2}.$$

Dle zákona Newtonova jest však

$$f = C\frac{m_1 m}{b^2},$$

kde m_1 značí hmotu velké koule, b pak vzdálenost středů hmotných koule malé i velké.

Působení země na malou kouli m lze vyjádřiti podobně

$$f = mg = C\frac{Mm}{R^2}.$$

Spojením posledních rovnic vychází

$$f = mg\frac{m_1 R^2}{M b^2}$$

a dosazením tohoto výsledku do (8)

$$\frac{m_1}{M} = \frac{b^2}{R^2}\frac{\pi^2 n}{gt^2}.$$

Tak obdržíme poměr hmoty známé ke hmotě země vyjádřený jednak konstantami, jednak veličinami měřenými.

Dosadíme-li konečně $M = \frac{4}{3}\pi R^2 \delta$ a počítáme-li z rovnice hořejší δ, vychází

$$\delta = \frac{3m_1 gt^2}{4\pi^3 R b^2 n}. \tag{9}$$

Doba kyvu kyvadla Cavendishova byla 14 minut, n činilo 0·766 palce (asi 1·9 *cm*), výsledek 29 pokusů provedených se dvěma závěsy jednak s drátem tenkým, jednak silnějším, jest

$$\delta = 5{\cdot}48.$$

Důmyslnou methodu Cavendishovu hleděli pozdější pozorovatelé zlepšiti odstraněním mnohých rušivých vlivů a zvýšením citlivosti přístroje. Tak experimentoval *Reich* *) v dolech Freibergských v letech 1837 a 1849 kyvadlem Cavendishovým a nalezl střední spec. hmotu země

$$\delta = 5{\cdot}48 - 5{\cdot}58.$$

Francis Baily **) hleděl docíliti větší citlivosti dlouhora-

---

*) *Ferd. Reich* (1799—1882), professor fysiky a chemie na horní akademii ve Freibergu. „Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage", 1838. „Neue Versuche mit. d. Drehwage über die mittlere Dichtikgeit der Erde" (Abhandl. d. k. Sächs. Gessell. d. Wiss., I, 1852).

**) *Francis Baily* (1774—1844). „Experiments with the torsion rod for Determining the Mean Density of the Earth" (Mem. Astr. Soc., XIV).

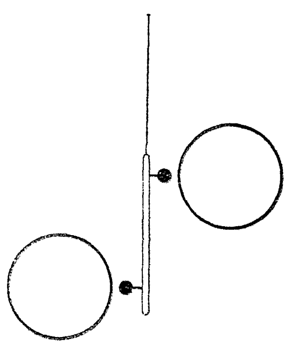
menným kyvadlem, a těžšími hmotami úchylku působícími. Výsledek jeho z roku 1841 jest

$$\delta = 5{\cdot}675.$$

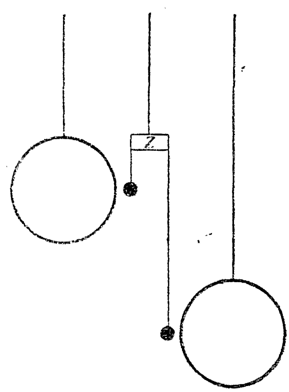
Cornu a *Baille**) (1870) užili vahadla krátkého, za to však velmi dlouhého závěsu (4·2 *m*), drátu velmi tenkého, čímž citlivost značně vzrostla. Uchylujícími hmotami byly duté koule železné naplněné rtutí. Výsledky pohybují se v mezích

$$\delta = 5{\cdot}50\,, \qquad \delta = 5{\cdot}56.$$

Veliká různost uvedených výsledků měla příčiny své v některých vadách užitého stroje. Při dlouhých závěsech nebylo možno eliminovati vliv proudění vzduchu a nestejné temperatury, při závěsech kratších byla zase citlivost uspořádání přirozeně menší a tím více vystupovala *nedokonalá* pružnost drátu.



Obr. 5.



Obr. 6.

Každý kovový závěs totiž kroucen *nevrací* se do původní své polohy rovnovážné, nýbrž po velmi dlouhém *dopružování* teprve se k ní *přibližuje*. Proto byl skutečně velmi cenným

*) *Cornu a Baille,* Cont.-Rend., LXXXVI, 1878. Zpráva o prvních pokusech byla publikována r. 1873.

nález *Vernona Boyse,* *) který vynalezl vlákna *křemenná.* Krystalický material tento osvědčil se znamenitě, vlákno křemenné jest skutečně *dokonale* pružné. Výhoda velmi tenkého a dokonale pružného vlákna křemenného spočívala v tom, že bylo možno *rozměry* kyvadla Cavendishova *značně zmenšiti,* takže rameno vahadla činilo pouze 1·3 *cm.*

Formu kyvadla Boysova **) ukazuje obr. 5. resp. obr. 6.

Krátkost ramene vahadla vyžadovala uspořádati jinak přitahující se hmoty. Proto upevněny malé 1 gram těžké olověné kuličky pod sebe ve vzdálenosti asi 5 *cm* a do horizontálních rovin procházejících jich středy hmotnými postavena také těžiště velikých hmot přitahujících (koulí olověných v průměru 5 *cm*). Vlákno křemenné bylo 40 *cm* dlouhé a úchylka vahadla 18 krát větší než při uspořádání předešlých pozorovatelů.

Doba kyvu tohoto kyvadla byla pouze 160 sek. Nepatrné rozměry celého apparatu, který je opatřen zrcadlem (viz obr. 6. z) pro odečítání dalekohledem a škálou a jenž má podobu i rozměry zrcadlového galvanometru, odstranily úplně rušivé vlivy proudění vzduchu a změn temperaturních, takže měření Boysovo patří mezi *nejpřesnější* určení střední specif. hmoty země.

Výsledek V. Boyse jest

$$\delta = 5{\cdot}527 \;^{***}).$$

Téměř téhož času, kdy Boys zanášel se měřením střední specif. hmoty země, provedl velmi zajímavé měření této veličiny pater *Braun* †), jenž rovněž jako Boys zvýšil citlivost kyvadla

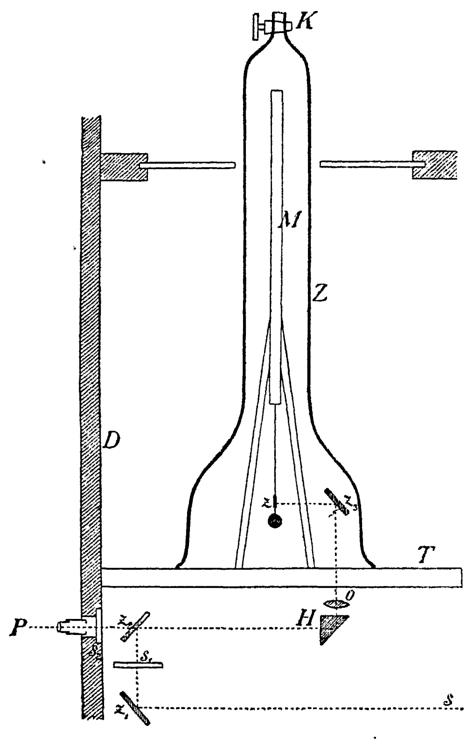
*) *C. V. Boys* [Phil. Mag. (5) 45, pg. 489, 1887]. Hotovení vláken křemenných jest velmi zajímavé. Na sklářský stolek připevní se luk, jehož spoušť se uvádí v činnost nohou; na konec šípu, slaměného to stébla asi 6—8 *cm* dlouhého upevní se jehla jako hrot. Na stéblo přilepí se pak pečetním voskem malá tyčinka křemenná, již rukou na sklářském stolku vytažená. Druhý konec podrží se v ruce, zúžený střed se ostrým a horkým plamenem zahřeje a šíp se vystřelí. Boys obdržel vlákna přes 25 metrů dlouhá, jichž téměř stejnoměrný průměr obnášel pouze $\frac{1}{3000}$ *mm.*

**) Apparat Boysův popsán v Proc. Roy. Soc., 46, pg. 293, 1889.

***) C. V. Boys, Proc. Roy. Soc., 56, p. 131, 1894.

†) Pater *Braun,* jesuita, druhdy ředitel arcibiskupské hvězdárny

Cavendishova značným zmenšením jeho rozměrů a vedle toho připadl na velmi šťastnou myšlénku, kterak vzduchové proudy a vliv temperatury vymýtiti. Postavil totiž svůj přístroj pod skleněný vysoký zvon a prostor, v němž kyvadlo kývalo, učinil *vzduchoprázdným.*



Obr. 7.

Kyvadlo Braunovo 24·5 *cm* dlouhé zhotoveno bylo z drátu

---

v Kološi v Uhrách, uchýlil se, vzdav se úřadu svého, do kláštera Šejnovského v Čechách, kde měření svá v letech 1884—1894 provedl.

Velmi pěkné pojednání o jeho práci viz v „Himmel u. Erde", 1898, pg. 385. „Ueber eine neue Bestimmung der mittleren Dichte der Erde durch Pater Braun" od F. K. Ginsela.

měděného, na jehož koncích zavěšeny kovové kuličky 54 *g* těžké. Vahadlo bylo tak zařízeno, aby bylo možno zavěšené kuličky přivésti do téže roviny horizontální. Hmoty uchylující byly jednak dvě koule 5·1 *kg* těžké mosazné, jinak duté železné, jež naplněny rtutí vážily 9·15 *kg*. Tyto koule byly *mimo* skleněný zvon poklopený přes kyvadlo a byly zavěšeny na děleném kruhu, který nahoře skleněný zvon obklopoval a podél obvodu silnou deskou dřevěnou kruhově vyříznutou a pevně ke stěně přidělanou náležitě upevněn byl. Celkovou úpravu měření ukazuje v hlavních rysech obr. 7. Závěs tvoří mosazná roura M na třech nohách stojící na silném talíři skleněném T, k němuž skleněný zvon Z těsně přiléhá. Kohout K se po vyčerpání uzavře. Vakuum udržovalo se po několik *let* velmi dobře.

Pozorování kyvu kyvadla dálo se zvláštním zařízením, poněvadž není možno dívati se dalekohledem přímo silnými stěnami zvonu. Od *S* přicházející světlo denní, odraženo vzhůru zrcádkem Z_1, dopadalo na skleněnou destičku S_1, na níž vyryt ostrý index, dále padalo světlo tak na zrcádko S_2, odrážela se odtud na hranol totalně reflektující II, procházelo objektivem O a po novém odrazu na zrcádku Z_3 na zrcádko kyvadla *z*. Pozorovatel v *P* promítá index z S_1 na škálu u S_2 položenou, neboť od zrcádka *z* odráží se světlo zpátky na Z_3 hranolem II na destičku Z_2, kterou na části hořejší, nepokryté projde přímo do oka pozorovatelova.

Skleněný zvon byl pečlivě chráněn před vlivem temperatury, obklopen dřevěným pláštěm a plechovým válcem, mimo to dřevěná stěna D oddělovala pozorovatele od přístroje úplně.

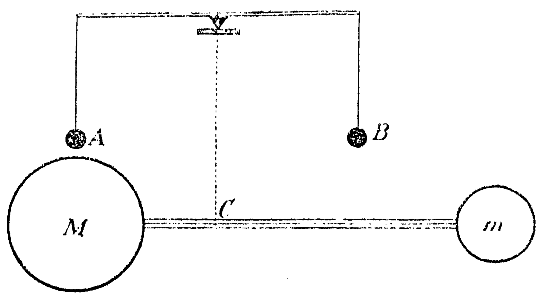
Při pozorování vyskytly se některé obtíže, kterým pater Braun čelil velmi důmyslně. Tak na př. následkem nedokonalé pružnosti kovového závěsu pošinovala se během času rovnovážná poloha kyvadla, takže se index S_1 ze středu škály S_2 neustále vzdaloval. Vadu tuto odstranil Braun velmi duchaplně tímto zařízením: Na stojanu kyvadla připevněn byl hodinový stroj, který uveden v činnost otáčel zvolna závěsem. Spouštění hodinového stroje dálo se zvenčí působením silného magnetu na malou magnetku uvnitř, která hodinový stroj v chod uváděla. Pater Braun věnoval všemožnou péči vlastnímu měření, které vyžadovalo určení mnohých konstant stroje a zařízení samého. Výsledek jeho práce jest velmi dokonalý, neboť obdržel

$$\delta = 5{\cdot}527 \text{ až } 5{\cdot}528,$$

tedy číslo, které s Boysovým měřením úplně souhlasí.

Uváží-li se, že potřebné stroje a zařízení většinou sám vlastníma rukama sobě zhotovil, že pozorování svá konal v klášterním pokoji nijak pro podobné práce nezařízeném a že pozorovatel vysokého stáří a nevalného zdraví byl, jest zásluha patera Brauna tím větší a práce tím více obdivu a chvály hodnější.

Třetí methoda měření konstanty gravitační vrací se k myšlénce původní, srovnávati přítažlivost *země* s přítažlivostí hmoty známé. Způsob tento neužívá kyvadla pohyblivého kol osy vertikální, nýbrž kyvadla pohyblivého kol osy horizontalní čili váh.



Obr. 8.

Methodu tuto zavedl *Poynting.* *) Schema uspořádání jeho pokusu jest znázorněno obrazcem 8. Dvě menší koule vyvážené na vahách v A a B podrobují se střídavě přítažlivosti veliké hmoty M (153 *kg* těžké), již možno kolem osy C otáčeti tak, že buďto se přitahuje A nebo B.

Hmota M jest equilibrována menší hmotou *m*, která jest v tolikrát větší vzdálenosti od osy C, kolikrát jest obsažena v M.

Výsledky staršího měření Poyntingova jsou navzájem tak

*) J. H. Poynting, Proc. Roy. Soc., 28, p. 2, 1878 a Phil. Trans. Roy. Soc., London, 182, pg. 565, 1891.

rozdílné, že autor uznal sám za vhodné pokusy své opakovati s lepšími vahami a pozorováním všech rušivých vlivů. Číslo z r. 1891 jest

$$\delta = 5{\cdot}4934.$$

V jiné formě užil váh *Jolly* *) v Mnichově. Ve vysoké věži, jejíž vnitřní volná prostora měla 25 *m* výše, postaveny byly váhy, jež nesly na každé straně dvě misky, od sebe na závěsu 21 *m* dlouhém vzdálené.

Pod jednou dolejší miskou nalézala se veliká koule olověná průměru 1 *m*. Pozorovací místo bylo rovinou ve výši V nad hladinou mořskou. Poloměr koule olověné budiž r. Na misce jest dutá koule skleněná naplněná rtutí, její střed hmotný nalézá se ve vzdálenosti a od hmotného středu koule olověné. Podle zákona gravitačního způsobuje přítažlivost koule olověné urychlení

$$\alpha = \mathrm{C} \, . \, \frac{4}{3} \pi r s \, \frac{r^2}{a^2} \, , \tag{10}$$

kde s značí specif. hmotu olova.

Urychlení tíže v bodu, jenž jest ve výši $a + r$ nad náhorní rovinou, jest dáno dle Jollyho výrazem

$$g_2 = g \left(1 - 2 \, \frac{\mathrm{V} + a + r}{\mathrm{R}} + \frac{3}{2} \, \frac{\delta'}{\delta} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}\right) , \tag{11}$$

kde g značí urychlení bodu na hladině mořské, R jest jako dříve poloměr země, δ a δ' střední specif. hmota země a oné vrstvy nad hladinou moře položené. Dále jest dle zákona Newtonova

$$g = \mathrm{C} \, \frac{4}{3} \pi \mathrm{R} \delta \, , \tag{12}$$

tudíž dělením (10) a (11)

$$\frac{\alpha}{g_2} = \frac{rs}{\mathrm{R}\delta} \, \frac{r^2}{a^2} \, \frac{1}{1 - 2 \, \frac{\mathrm{V} + a + r}{\mathrm{R}} + \frac{3}{2} \, \frac{\delta'}{\delta} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}} .$$

---

*) *Ph. v. Jolly*, „Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation“ (Wied. Ann., 14, 1881, pg. 331).

Značí-li m hmotu koule rtutí naplněné, jest $q = m\alpha$ její váha působená pouze přítažlivostí koule olověné, $Q = mg_2$ váha působená pouhou přítažlivostí země, pak zanedbáním ostatních členů

$$\frac{q}{Q} = \frac{rs}{R\delta}\,\frac{r^2}{a^2}$$

a tudíž

$$\delta = \frac{rs}{R}\,\frac{r^2}{a^2}\,\frac{Q}{q}.$$

Pozorování dálo se tímto způsobem. Na miskách vždy nalézaly se čtyři*) koule stejného objemu, dvě prázdné (vzduchem naplněné), dvě naplněné rtutí, všechny zatavené. Předně pozoruje se rovnovážná poloha vah, když obě plné koule jsou v hořejších, ostatní v dolejších miskách. Pak se na jedné straně vymění koule plná s dolejší prázdnou, rozdíl na váze vyrovná se závažím a určí se zase poloha rovnovážná. Totéž se opakuje pak na straně druhé. Přidávaná závaží měla pouze 10—50 *mg*.

Z pozorovaných obratů na škále, odečtených dalekohledem, počítány byly polohy rovnovážné, určen význam dílce a tak stanoveno q.

Přeložením závaží (koule naplněné rtutí) s misky hořejší do dolejší shledán přírůstek na váze 32·275 *mg* za společného působení země a koule olověné. Podobný přírůstek na straně druhé, kde tedy koule olověné nebylo, činil 31·686 *mg*. Jest tudíž

$$q = 32{\cdot}275 - 31{\cdot}686 = 0{\cdot}589.$$

Ostatní data byla:

$$Q = 5\,009\,450\,mg, \quad R = 6\,365\,722\,m,$$

$$r = 0{\cdot}4975\,m, \quad a = 0{\cdot}5686\,m, \quad s = 11{\cdot}186,$$

tudíž

$$\delta = 5{\cdot}692 \pm 0{\cdot}068.$$

*) Tím se eliminovala redukce na prostor vzduchoprázdný.

Pravděpodobná chyba vchází téměř do prvé decimály, měření ukazuje se poměrně málo přesným.

Methoda Jollyho nejvíce trpí vlivy temperatury a vlhkosti vzduchu, neboť není možná poměry atmosférické udržovati v tak vysokém prostoru konstantními.

Daleko přesnější měření vykonal v Postupimi r. 1888 *Wilsing**), jenž sestrojil kovové kyvadlo 1 *m* dlouhé pohyblivé kol horizontální osy, jež se téměř uprostřed nalézala. Na konec kyvadla mohly býti nasazeny koule 540 *g* těžké, po případě hmoty značné formy i velikosti k určení momentu setrvačnosti.

Hmoty působivé byly 325 *kg* těžké válce litinové a tak na drátěných lanech zavěšené, aby je bylo možno blízko postaviti ke kruhům na kyvadle. Odečítání dálo se dalekohledem a škálou. Výsledek Wilsingův jest 5·594 ± 0·032.

K váhám vrátili se v době nejnovější *Richarz*, *König* a *Krigar-Menzel* **).

Měření poslední byla provedena v letech 1884—1896 v kasematě citadelly Špandavské se značným nákladem. Methoda liší se od methody Jollyho jednak tím, že závěsy „dvojitých" vah byly daleko kratší (pouze 2·26 *m* tedy skoro 10krát), dále, že bylo váženo methodou *Gaussovou* (závaží přeměňována tedy nejen ve smyslu vertikálním, ale i horizontálním) a konečně hmota měnící přítažlivost země, veliký to hranol olověný vystavěný z menších hranolů, nalézal se mezi oběma miskami. Touto úpravou docílí se nejen zvětšení tíže na misce hořejší, ale i zároveň zmenšení tíže na misce dolejší, jest tudíž zmenšení ury-

---

*) *J. Wilsing*: „Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde mit Hülfe eines Pendelapparates." (Publik. d. Astrophysikal. Observ. zu Potsdam, 22. VI. 2. pag. 35, 1887 a 23. VI. p. 133, 1889).

**) *A. König* u. *F. Richarz*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1884, p. 1202

Fr. Richarz u. *Ot. Krigar-Menzel*: „Die Abnahme der Schwere mit der Höhe, bestimmt durch Wägungen" (Wied. Ann., 51, pg. 559, 1894).

Fr. Richarz u. *Ot. Krigar-Menzel*: „Gravitations Konstante und mittlere Dichtigkeit der Erde bestimmt durch Wägungen" (Wied. Ann., 66, pg. 177, 1898).

chlení ve směru vzhůru menší o dvojnásobné přítažlivé působení veliké hmoty mezi miskami.

Hmota přitahující obnášela asi 100 000 *kg* olova, litého do hranolů rozměrů $10 \times 10 \times 30$ *cm*, z nichž byla vystavěna ve sloup 2 metry vysoký o základně $2{\cdot}1 \times 2{\cdot}1\ m^2$. Tyče obě misky spojující procházely ochrannými trubicemi, pro něž v příslušných kusech olova vyříznuty otvory. Váhy byly krátkoramenné, délka celého vahadla pouze 23·32 *cm*. Difference, jež se vážením určovaly, byly asi 1·3 *mg*.

Zatížení bylo obyčejně asi 1 *kg*, při čemž citlivost obnášela 30 dílců na škále. Váhy byly ve skříni zinkové, před změnami temperatury jednak podzemní místností a jednak dvojitými stěnami dřevěnými chráněny.

Veliká péče věnována mechanickému zařízení a provedení váh, dále mechanickému přeměňování závaží v obou směrech — horizontálním i vertikálním — v té příčině budiž poukázáno na práce původní aneb na pěkný článek „Waage zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde“ od autorů samých v Zeitsch. f. Instrumentenkunde XIX. pg. 40. 1898. 52 měření poskytlo tento výsledek:

Dvojnásobný přírůstek na váze způsobený přenesením závaží 950 *g* s misky hořejší na dolejší byl

při působení velké hmoty olověné $+ (1{\cdot}2453 \pm 0{\cdot}0016)\ mg$,
bez „ „ „ „ $- (0{\cdot}1211 \pm 0{\cdot}0014)\ mg$,

z čehož dvojnásobné působení gravitační olověného hranolu

$$1{\cdot}3664 \pm 0{\cdot}0021$$

a konečně střední specif. hmota země

$$\delta = 5{\cdot}505 \pm 0{\cdot}009.$$

Všechny uvedené výsledky ukazuje přehledně tabulka následující:

Pozorovatel	Methoda	δ	Pravděpodobná chyba
Maskelyne 1774–1776	Přítažlivost horstva	4·7	
Carlini 1824	Kyvadlo na vrchu a paty hory	4·84	
Airy 1836	Měření v důlu	5·48	
Cavendish 1798	Kyvadlo horiz.	5·48	
Reich 1852	"	5·48 – 5·58	
Baily 1846	"	5·675	
Cornu a Baille 1873	"	5·50—5·56	
V. Boys 1887 – 1894	Kyvadlo malých rozměrů, křemenové vlákno	5·527	
Pater Braun 1886–1894	Kyvadlo malé ve vakuu	5·527—5·528	
Poynting 1878, 1891	Váhy	5·4934	
Jolly 1881	Váhy s dlouhými závěsy	5·692	± 0·068
Wilsing 1887	Vahadlo	5·594	± 0·032
Wilsing 1889	"	5·577	± 0·013
Richarz a Krigar-Menzel 1884—98	Váhy s krátkými závěsy	5·505	± 0·009

Poznámka o některých integrálech omezených.

Sdílí

M. Lerch,

professor university ve Fribourgu švýcarském.

Buď C oblouk určité křivky, a znamenejme $\varphi(z)$ funkci komplexní proměnné z, která se na oblouku C chová pravidelně a hoví podmínce