Matyáš Lerch

# Poznámka o jistém vzorci z počtu integrálního

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 29 (1900), No. 1, 39--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109090

# Poznámka o jistém vzorci z počtu integrálního.

Sdílí **M. Lerch,**
professor na universitě ve Fribourgu švýcarském.

Ve svém článku „O některých integrálech omezených" v 28. ročníku tohoto Časopisu odůvodnil jsem vzorec známý

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{dz}{u^2+z^2} = \frac{\pi}{2u^2}\left(1-e^{-u}\right).$$

Integrací dle $u$ plyne z něho

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z^2} \operatorname{arctg} \frac{z}{u}\, dz = \frac{\pi}{2u} - \frac{\pi}{2}\int_u^\infty e^{-z}\frac{dz}{z^2}.$$

Ježto částečnou integrací se obdrží

$$\int_u^\infty e^{-z}\frac{dz}{z^2} = \frac{e^{-u}}{u} - \int_u^\infty e^{-z}\frac{dz}{z},$$

máme z něho rovnici

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z^2} \operatorname{arctg} \frac{z}{u}\, dz = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-u}}{u} + \frac{\pi}{2}\int_u^\infty e^{-z}\frac{dz}{z}.$$

Transformujeme-li oba integrály zavedením proměnné $x = \frac{z}{u}$, obdržíme

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ux}{ux^2} \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{1-e^{-u}}{u} + \int_1^\infty e^{-ux}\frac{dx}{x}.$$

Násobme nyní na obou stranách $e^{-au}\,du$ a integrujme od nully do nekonečna, předpokládajíce ovšem $a > 0$. Tak obdržíme

$$\int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-au}\frac{\sin ux}{ux^2} \operatorname{arctg} x\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-au}-e^{-(a+1)u}}{u}\, du + \int_0^\infty du \int_1^\infty e^{-(a+x)u}\frac{dx}{x}.$$

Oba dvojnásobné integrály konvergují absolutně i lze v nich pořad integrační vyměniti. Provedeme-li to, obdržíme

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg} x \frac{dx}{x^2} \int_0^\infty e^{-au} \frac{\sin ux}{u}\, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-au} - e^{-(a+1)u}}{u}\, du + \int_1^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty e^{-(a+x)u}\, du.$$

Tu jest však dle známých vzorců

$$\int_0^\infty e^{-au} \frac{\sin ux}{u}\, du = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a}{x} = \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-au} - e^{-(a+1)u}}{u}\, du = \log \frac{a+1}{a},$$

$$\int_0^\infty e^{-(a+x)u}\, du = \frac{1}{a+x},$$

a tedy vyjde

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg} x \,.\, \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \cdot \frac{dx}{x^2} = \log \frac{a+1}{a} + \int_1^\infty \frac{dx}{x(x+a)}.$$

Pomocí rozkladu

$$\frac{1}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right)$$

obdržíme dále

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \left[ \log \frac{x}{x+a} \right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{a} \log (a+1),$$

takže výsledek náš zní

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{arctg} x \,.\, \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \cdot \frac{dx}{x^2} = \log \frac{a+1}{a} + \frac{1}{a} \log (a+1).$$

Píšeme-li zde $u$ za $\frac{1}{a}$, obdržíme

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{arctg} x \,.\, \operatorname{arctg} ux \frac{dx}{x^2} = \log (u+1) + u \log \frac{u+1}{u}.$$

Pišme nyní v integrálu $x = az$, $u = \frac{b}{a}$, při čemž $a$. a $b$ značí kladné veličiny realné; tím způsobem obdrží se výsledek

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx \,\frac{dx}{x^2} = a \log \frac{a+b}{a} + b \log \frac{a+b}{b},$$

který lze po substituci $\frac{1}{x}$ za $x$ psáti

$$(1)\qquad \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{a}{x} \,.\, \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\, dx = \log \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a\, b^b}.$$

Je-li zvláště $a = b = 1$, máme

$$\int\limits_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \log 2.$$

# Poznámka o jistém determinatu mocninném.

Napsal

**Vilém Jung,**

professor v Praze.

Rozložíme-li mocninný determinant tvaru

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1^1, & 2^1, & 3^1, & \ldots n^1, & \frac{n^1}{2} \\ 1^2, & 2^2, & 3^2, & \ldots n^2, & \frac{n^2}{3} \\ 1^3, & 2^3, & 3^3, & \ldots n^3, & \frac{n^3}{4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^n, & 2^n, & 3^n, & \ldots n^n, & \frac{n^n}{n+1} \\ 1^{n+1}, & 2^{n+1}, & 3^{n+1}, & \ldots n^{n+1}, & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{vmatrix},$$

jenž jest $(n+1)$ho stupně, dle elementů posledního sloupce a užijeme-li *Studničkova theorému* o determinantech mocninných, můžeme po krátké redukci psáti

$$(1)\quad \Delta_{n+1} = n \,.\, n\,!\,(n-1)\,!\ldots 2\,!\,1\,!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\frac{n^k}{k+2}\,K_{n-k}.$$

Symbol $K_{n-k}$ znamená součet kombinací bez opakování $(n-k)$té třídy čísel $1, 2, 3, \ldots, n$, při čemž jest $K_0 = 1$.