Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vilém Pexider

Příspěvek k infinitesimálnímu počtu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 1, 33--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109089

Příspěvek k infinitesimálnímu počtu.

Napsal

Dr. Jan Pexider v Paříži.

Z funkcionální rovnice lze v jednoduchých případech odvoditi integrál příslušné funkce, aniž by bylo třeba znáti funkci samu. Z následujících příkladů vysvitne, za jakých podmínek odvození integrálu z funkcionální rovnice jest možné. Co se týče methody, tu lze všeobecně říci, že funkcionální rovnice — vyjadřující vztah mezi hodnotami funkce pro tři argumenty, z nichž třetí jest úkonem prvých dvou — násobí se differenciálem třetího argumentu, integruje se v určitých mezích, načež z výrazu takto obdrženého, resp. po vhodné volbě mezí, určí se hodnota integrálu oné funkce.

Příklady.

1. Budiž funkce $f(z)$ definována funkcionální rovnicí

$$f(uz) = f(u) \,.\, f(z).$$

Násobíce relaci tuto differenciálem

$$d\omega = d(uz) = zdu + udz$$

a integrujíce v mezích $\omega_0 = u_0 z_0$, $\omega = uz, \ldots$ obdržíme vztah

$$(1) \qquad \int_{\omega_0}^{\omega} f(\omega) d\omega = zf(z) \int_{u_0}^{u} f(u) du + u_0 f(u_0) \int_{z_0}^{z} f(z) dz.$$

Jelikož vzájemnou záměnou argumentů u a z levá strana rovnice (1) se nemění, platí

$$uf(u) \int_{z_0}^{z} f(z) dz + z_0 f(z_0) \int_{u_0}^{u} f(u) du$$
$$= zf(z) \int_{u_0}^{u} f(u) du + u_0 f(u_0) \int_{z_0}^{z} f(z) dz$$

čili

$$\frac{\int\limits_{u_0}^{u} f(u)du}{uf(u) - u_0 f(u_0)} = \frac{\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz}{zf(z) - z_0 f(z_0)} = \text{konstantě A},$$

takže

$$\text{(I)} \qquad \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = \mathrm{A}\,[zf(z)]_{z_0}^{z}\,.$$

Výsledek tento obdržíme i bez ohledu na hodnotu výrazu levé strany funkcionální rovnice. Z toho jde, že každá funkce $f(z)$ hovící rovnici

$$f(u)\,.\,f(z) = \varphi(uz)$$

má integrál tvaru (I).

Derivuje-li se rovnice (I) dle horní meze, obdržíme relaci

$$f(z) = \mathrm{A}\,[zf'(z) + f(z)]$$

a z ní pro $z =$ konstantě, k vůli jednoduchosti volené $= 1$, hodnotu konstanty A, t. j.

$$\mathrm{A} = \frac{f(1)}{f(1) + f'(1)},$$

takže lze též psáti

$$\text{(I')} \qquad \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = \frac{f(1)}{f(1) + f'(1)}\,.\,[zf(z)]_{z_0}^{z}\,.$$

Z rovnice (1) neplyne další konkluse, jest-li $zf(z) =$ konstantě a, t. j. je-li

$$f(z) = \frac{a}{z}\,.$$

Tato funkce hoví rovnici $f(u)\,.\,f(z) = \varphi(uz)$ a může tudíž funkci f značiti. V tomto případě má však rovnice (1) tvar

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega} f(\omega)d\omega = \int\limits_{u_0}^{u} f(u)du + \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$$

čili

$$F(uz) = F(u) + F(z),$$

funkcionální to rovnice logarithmu.

Funkce, jež vyhovují rovnici

$$f(u) \,.\, f(z) = \varphi(uz),$$

lze blíže stanoviti takto. Pro $u = 1$ plyne z relace této

$$\varphi(z) = f(1) \,.\, f(z),$$

t. j. funkce ony mají funkcionální rovnici

$$f(u) \,.\, f(z) = f(1) \,.\, f(uz).$$

Na příklad $f(z) = Az^m$.

2. Funkce $f(z)$ definována buď funkcionální rovnicí

$$f(z + u) = f(z) \,.\, f(u).$$

Násobíme-li relaci tuto differenciálem

$$d\omega = d(u + z) = du + dz$$

a integrujeme-li v mezích $\omega_0 = u_0 + z_0$, $\omega = u + z, \ldots$, obdržíme

$$\int_{\omega_0}^{\omega} f(\omega) d\omega = f(u) \int_{z_0}^{z} f(z) dz + f(z_0) \int_{u_0}^{u} f(u) du$$

a vzhledem k symmetričnosti levé strany vůči argumentům u a z vztah

$$\frac{\int_{u_0}^{u} f(u) du}{f(u) - f(u_0)} = \frac{\int_{z_0}^{z} f(z) dz}{f(z) - f(z_0)} = \text{konstantě } B,$$

takže

$$\text{(II)} \qquad \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = B\, [f(z)]_{z_0}^{z}.$$

Z téhož důvodu, jako v příkladě prvním, každá funkce $f(z)$, hovící relaci

$$f(z) \,.\, f(u) = \varphi(z + u),$$

má integrál tvaru (II).

Differencujeme-li výraz (II) dle horní meze, obdržíme

$$f(z) = \mathrm{B}f'(z)$$

a tudíž pro $z =$ konstantě, na př. $z = 0$, hodnotu

$$\mathrm{B} = \frac{f(0)}{f'(0)}.$$

Lze tedy též psáti

$$\text{(II')} \qquad \int f(z)dz = \frac{f(0)}{f'(0)} f(z) + \mathrm{C}.$$

Funkce, jež hoví rovnici

$$f(z) \, . \, f(u) = \varphi(z + u),$$

z níž jde pro $u = 0$

$$\varphi(z) = f(0) \, . \, f(z),$$

mají za funkcionální rovnici

$$f(z) \, . \, f(u) = f(0) \, . \, f(z + u).$$

Této rovnici vyhovuje na př. funkce $f(z) = \mathrm{A}a^{b+cz}$; tu nabudeme

$$f(0) = \mathrm{A}a_b, \; f'(0) = \mathrm{A}a^b c \, . \, lga$$

a dle vzorce (II')

$$\int \mathrm{A}a^{b+cz} dz = \frac{\mathrm{A}}{c \, . \, lga} a^{b+cz} + \mathrm{C},$$

výsledek zajisté správný.

3. Funkcionální rovnice

$$f(uz) = f(u) + f(z),$$

násobena differenciálem $d\omega = d(uz) = zdu + udz$ a integrována v mezích $\omega_0 = u_0 z_0$, $\omega = uz, \ldots$ poskytuje relaci

$$\int_{\omega_0}^{\omega} f(\omega)d\omega = zf(z)[u - u_0] + z \int_{u_0}^{u} f(u)du$$
$$+ u_0 \int_{z_0}^{z} f(z)dz + u_0 f(u_0)[z - z_0].$$

Klademe-li k vůli jednoduchosti $u_0 = 0$, $u = 1$, obdržíme

$$\int_0^z f(z)dz = zf(z) + z\int_0^1 f(z)dz$$

čili, značí-li

$$K = \int_0^1 f(z)dz,$$

(III)
$$\int_{z_0}^z f(z)dz = [zf(z) + zK]_{z_0}^z.$$

Derivujeme-li rovnici tuto dle horní meze, plyne z relace takto obdržené pro $z =$ konstantě, k vůli jednoduchosti $= 1$, hodnota

$$K = -f'(1),$$

takže lze psáti

(III′)
$$\int f(z)dz = zf(z) - f'(1)z + C.$$

Netřeba snad podotýkati, že tu lze přesně dokázati, že omezený integrál $\int_0^1 f(z)dz$ jest konečná hodnota a že

$$\lim_{z=0} zf(z) = 0.$$

4. Funkcionální rovnice

$$f(u\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-u^2}) = f(u) - f(z),$$

z níž plynou vztahy

$$f(0) = 0,\ f(-z) = -f(z),\ f(\sqrt{1-z^2}) = f(1) - f(z),$$

a z parciálné derivace dle u pro $u = 0$

$$f'(z) = \frac{f'(0)}{\sqrt{1-z^2}},$$

násobena differenciálem třetího argumentu, t. j. výrazem

$$d\omega = [\sqrt{1-z^2} + \frac{zu}{\sqrt{1-u^2}}]\,du - [\sqrt{1-u^2} + \frac{zu}{\sqrt{1-z^2}}]\,dz,$$

a integrována v mezích $u_0 = 0$, $u = 1$, $z_0 = z$, podává relaci

$$\int_{-z}^{\sqrt{1-z^2}} f(\omega)d\omega = \sqrt{1-z^2}\int_0^1 f(u)du + z\int_0^1 \frac{uf(u)}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$- f(z)\sqrt{1-z^2} - zf(z)\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$= \sqrt{1-z^2}\,K_1 + zK_2 - f(z)\sqrt{1-z^2} - zf(z),$$

z níž pro $z = 1$ jde

$$-K_1 = \int_{-1}^{0} f(z)dz = K_2 - f(1),$$

takže

$$\int_{-z}^{\sqrt{1-z^2}} f(\omega)d\omega = \sqrt{1-z^2}\,[f(1) - f(z)] + zK_2 - zf(z) - \sqrt{1-z^2}\,K_2$$

$$= [zf(z) + \sqrt{1-z^2}\,K_2]_{-z}^{\sqrt{1-z^2}}$$

čili

$$\int f(z)dz = zf(z) + \sqrt{1-z^2}\,K_2 + \varphi(z), \tag{3}$$

kdež o neznámé funkci φ předem platiti musí

$$\varphi(\sqrt{1-z^2}) = \varphi(-z).$$

Jelikož pak

$$K_2 = \int_0^1 \frac{uf(u)}{\sqrt{1-u^2}}du = f'(0),$$

plyne z derivace rovnice (3)

$$\varphi'(z) = 0, \text{ t. j. } \varphi(z) = C,$$

načež obdržíme

$$\int f(z)dz = zf(z) + f'(0)\sqrt{1-z^2} + C.$$

Jak známo, hoví předložené funkcionální rovnici funkce arc sin.

V Paříži, v květnu 1899.