jimž náleží určitá intensita vzhledem k rovnoběžným paprskům, jichž směr jest dán přímkou S.

5. *Sestrojení obrazu perspektivného pomocí půdorysu a nárysu.* Jsou-li dány sdružené obrazy: půdorys a nárys, můžeme jich užiti dle dříve uvedeného způsobu ku sestrojení perspektivného obrazu následním způsobem.

Je-li bod d vyjádřen obrazy d_1 a d'_1, odvodíme si známým způsobem obraz d' sklopeného půdorysu (obr. 5.). Obrazy d' a d''_1 můžeme pak považovati za půdorys a nárys bodu d, kteréž jsou sdruženy dle osy $X_{1.2} \equiv H_1$ a sestrojeny dle měřítka příslušného rovině ν, obsahující přímku hlavní H.

V obraze 5. sestrojeny nyní sdružené obrazy krychle, jejímž jedním vrcholem jest zobrazený bod d a jejíž jedna úhlopříčna stojí ku rovině základní μ kolmo. (Obraz první jest čerchán a druhý čárkován).

Jakých zjednodušení lze při sestrojování obrazu perspektivného z těchto sdružených obrazů orthogonalných užiti, jest z obrazu patrno.

V obrazu tomto zároveň sestrojen vlastní a vržený stín zobrazené krychle na rovinu základní a rovinu ν vzhledem k paprsku S, jehož obrazy sdružené jsou dány.

O poučce polynomické a binomické, jakož i o některých identitách na nich založených.

Pro studující napsal

Vilém Jung, professor v Praze.

1. Poučka polynomická odvozuje se obyčejně na základě binomické*).

---

*) Viz na př.: Dr. *F. J. Studnička*, Všeobecné tvarosloví algebraické, pag. 41—52. Praha, 1880.

F. Hoza, Algebra pro vyšší reálky, pag. 230. Praha, 1892.

H. Weber, Lehrbuch der Algebra, I. Bd, pag. 53—54, 2. Auflage. Braunschweig, 1898.

V následujícím odvodíme polynomickou poučku přímo, binomická pak vyplyne jako její zvláštní případ.

Utvořme součin n různých mnohočlenů, z nichž každý obsahuje m členů, totiž

$$\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{m} a_{1k} \cdot \sum_{k=1}^{m} a_{2k} \ldots \sum_{k=1}^{m} a_{nk} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \right).$$

Položíme-li

$$a_{1k} = a_{2k} = \ldots = a_{nk} = a_k,$$

přejde součin P v mocninu

$$\mathrm{Q} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k \right)^n.$$

Libovolný člen součinu P má formu

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{\nu_1} a_{i1} \cdot \prod_{i=\nu_1+1}^{\nu_1+\nu_2} a_{i2} \ldots \prod_{i=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{m-1}+1}^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{m-1}+\nu_m} a_{im},$$

při čemž

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k = n.$$

Tomuto členu součinu P přísluší v mocnině Q člen

$$(2) \qquad a_1^{\nu_1} \cdot a_2^{\nu_2} \ldots a_m^{\nu_m} = \prod_{k=1}^{m} a_k^{\nu_k}.$$

Exponent ν^k může míti některou z hodnot 0, 1, 2, ... n, neboť se činitel a_k nemusí vyskytnouti ani jednou, takže $a_k^0 = 1$; může se vyskytnouti jednou, dvakráte, atd. až $n$kráte.

Permutujeme-li v součinu (1) zadní indexy

$$\underbrace{1, \ldots 1}_{\nu_1}, \ \underbrace{2, \ldots 2}_{\nu_2}, \ldots, \ \underbrace{m, \ldots m}_{\nu_m}$$

činitelů a_{ik}, ponechávajíce přední indexy $i = 1, 2, \ldots, n$ v přirozeném pořádku, obdržíme celkem

$$\frac{n!}{\nu_1! \, \nu_2! \ldots \nu_m!}$$

členů součinu P, jimž přislušejí v mocnině Q vesměs stejné členy $\prod_{k=1}^{m} a_k^{\nu_k}$. Sloučením jich obdržíme pro mocninu Q člen

$$\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_m!}\;a_1^{\nu_1}\,a_2^{\nu_2}\ldots a_m^{\nu_m}\,,$$

při čemž platí $0! = 1$.

Kombinace exponentů $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ jest m-té třídy s opakováním utvořena z čísel 0, 1, 2, ..., n takovým způsobem, aby

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k = n.$$

Permutujeme-li dále prvky v kombinaci*) $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$, obdržíme různé členy mocniny Q, jež mají společný součinitel

$$\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_m!}\,.$$

Možno tedy polynomickou poučku psáti ve stručné formě

$$(3)\qquad (\sum_{k=1}^{m} a_k)^n = \Sigma\,\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_m!}\;a_1^{\nu_1}\,a_2^{\nu_2}\ldots a_m^{\nu_m}\,,$$

při čemž symbol sčítání Σ vztahuje se ke všem *variacím* $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ m-té třídy *s opakováním*, utvořeným z čísel 0, 1, 2, ..., n takovým způsobem, aby $\sum_{k=1}^{m} \nu_k = n$.

Počet těchto variac jest $(m + n - 1)_n$.

Násobíme-li totiž n stejných mnohočlenů o m členech a sloučíme-li ve výsledku stejné členy $\prod_{k=1}^{m} a_k^{\nu_k}$, obdržíme tolik různých členů, kolik jest kombinac s opakováním n-té třídy z m prvků, totiž $(m + n - 1)_n$. Tato okolnost nám poskytne kontrolu při počítání.

Na př. pro $m = 3$, $n = 5$ utvoříme z prvků 0, 1, 2, 3, 4, 5

*) Nejpohodlněji vytvoří se kombinace (ν), jimž přísluší pokaždé skupina členů mocniny Q se stejným součinitelem, v pořádku sestupném, načež se permutují prvky těchto kombinac.

variace 3tí třídy s opakováním, aby součet prvků obnášel pokaždé 5; těchto variac jest

$$(3+5-1)_5 = (7)_5 = 21$$

a to:

500, 050, 005; **410**, 401, 140, 104, 041, 014; **320**, 302, 230, 203, 032, 023; **311**, 131, 113; **221**, 212, 122.

Můžeme tedy psáti

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right)^5 = {} & \frac{5!}{5!\,0!\,0!}\left(a_1^5 a_2^0 a_3^0 + a_1^0 a_2^5 a_3^0 + a_1^0 a_2^0 a_3^5\right) \\
& + \frac{5!}{4!\,1!\,0!}\left(a_1^4 a_2^1 a_3^0 + a_1^4 a_2^0 a_3^1 + a_1^1 a_2^4 a_3^0 + a_1^1 a_2^0 a_3^4\right. \\
& \left. + a_1^0 a_2^4 a_3^1 + a_1^0 a_2^1 a_3^4\right) + \frac{5!}{3!\,2!\,0!}\left(a_1^3 a_2^2 a_3^0\right. \\
& \left. + a_1^3 a_2^0 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^0 + a_1^2 a_2^0 a_3^3 + a_1^0 a_2^3 a_3^2 + a_1^0 a_2^2 a_3^3\right) \\
& + \frac{5!}{3!\,1!\,1!}\left(a_1^3 a_2^1 a_3^1 + a_1^1 a_2^3 a_3^1 + a_1^1 a_2^1 a_3^3\right) \\
& + \frac{5!}{2!\,2!\,1!}\left(a_1^2 a_2^2 a_3^1 + a_1^2 a_2^1 a_3^2 + a_1^1 a_2^2 a_3^2\right) \\
= {} & \frac{5!}{5!\,0!\,0!}\,\Sigma a_1^5 a_2^0 a_3^0 + \frac{5!}{4!\,1!\,0!}\,\Sigma a_1^4 a_2^1 a_3^0 \\
& + \frac{5!}{3!\,2!\,0!}\,\Sigma a_1^3 a_2^2 a_3^0 + \frac{5!}{3!\,1!\,1!}\,\Sigma a_1^3 a_2^1 a_3^1 \\
& + \frac{5!}{2!\,2!\,1!}\,\Sigma a_1^2 a_2^2 a_3^1 ,
\end{aligned}
$$

při čemž se symbol Σ vztahuje ke všem permutacím dotyčných exponentů.

Pro $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ obdržíme identitu

$$
\begin{aligned}
3^5 = {} & \frac{5!}{5!\,0!\,0!}\cdot\frac{3!}{2!} + \frac{5!}{4!\,1!\,0!}\cdot 3! + \frac{5!}{3!\,2!\,0!}\cdot 3! \\
& + \frac{5!}{3!\,1!\,1!}\cdot\frac{3!}{2!} + \frac{5!}{2!\,2!\,1!}\cdot\frac{3!}{2!},
\end{aligned}
$$

t. j.

$$243 = 3 + 30 + 60 + 60 + 90;$$

mimo to platí

$$\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=(3+5-1)_5=(7)_5,$$

t. j.

$$3+6+6+3+3=21.$$

Patrno, že platí obecně

$$\Sigma \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_m!}\cdot\frac{m!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_m!}=m^n,$$

při čemž se symbol Σ vztahuje ke všem *kombinacím* m-té třídy s opakováním $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$, utvořeným z čísel $0, 1, 2, \ldots, n$ tak, aby $\sum_{k=1}^{m}\nu_k=n$; $\varkappa_k$ znamená počet*) stejných prvků ν_k v příslušné kombinaci (ν).

Mimo to platí

$$\Sigma \frac{m!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_m!}=(m+n-1)_n.$$

Na př. pro $m=4$, $n=7$ platí

$$\frac{7!}{7!\,0!\,0!\,0!}\cdot\frac{4!}{3!}+\frac{7!}{6!\,1!\,0!\,0!}\cdot\frac{4!}{2!}+\frac{7!}{5!\,2!\,0!\,0!}\cdot\frac{4!}{2!}$$
$$+\frac{7!}{5!\,1!\,1!\,0!}\cdot\frac{4!}{2!}+\frac{7!}{4!\,3!\,0!\,0!}\cdot\frac{4!}{2!}+\frac{7!}{4!\,2!\,1!\,0!}\,4!$$
$$+\frac{7!}{4!\,1!\,1!\,1!}\cdot\frac{4!}{3!}+\frac{7!}{3!\,3!\,1!\,0!}\cdot\frac{4!}{2!}+\frac{7!}{3!\,2!\,2!\,0!}\cdot\frac{4!}{2!}$$
$$+\frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!}\cdot\frac{4!}{2!}+\frac{7!}{2!\,2!\,2!\,1!}\cdot\frac{4!}{3!}=4^7,$$

t. j.

$$4+84+252+504+420+2520+840+1680$$
$$+2520+5040+2520=4^7=16384.$$

Mimo to platí

*) Nevyskytne-li se prvek ν_k v jisté kombinaci (ν) ani jednou, jest $\varkappa_k!=0!=1$; vyskytne-li se pouze jednou, jest $\varkappa_k!=1!=1$, proto není potřebí tyto činitele ve jmenovateli výrazu $\frac{m!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_m!}$ psáti.

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+4!+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}$$
$$+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{3!}=(4+7-1)_7,$$

t. j.

$$4+12+12+12+12+24+4+12+12+12$$
$$+4=(10)_7=120.$$

2. Poučka binomická plyne z polynomické pro $m=2$. Na základě schematu

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} n,0 & (n-1),\ 1 & (n-2),\ 2 & \dots & (n-k),\ k & \dots \\ 0,n & 1,\ (n-1) & 2,\ (n-2) & \dots & k,\ (n-k) & \dots \end{array}$$

můžeme vzhledem k tomu, že

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=(n)_k,\quad \frac{n!}{k!\,(n-k)!}=(n)_{n-k},$$

psáti

$$(4)\qquad (\sum_{k=1}^{2} a_k)^n=\sum_{k=0}^{n}(n)_k\, a_1^{n-k} a_2^k.$$

Vzhledem k vlastnosti exponenciálních funkcí, vyjádřené vzorcem

$$a^{x_1} a^{x_2} \dots a^{x_m}=a^{x_1+x_2+\dots+x_m},$$

můžeme psáti

$$(5)\qquad (1+z)^{\sum_{i=1}^{\lambda} m_i}=\prod_{i=1}^{\lambda}(1+z)^{m_i}.$$

Srovnáním koëfficientů při z^k na obou stranách rovnice (5) obdržíme identickou rovnici

$$(6)\qquad (\sum_{i=1}^{\lambda} m_i)_k=\Sigma\left[\prod_{i=1}^{\lambda}(m_i)_{\mu_i}\right],\quad \sum_{i=1}^{\lambda}\mu_i=k.$$

Symbol sčítání Σ na pravé straně vztahuje se ke všem *variacím* $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\lambda)$ *s opakováním* λté třídy*), utvořeným

---

*) Napřed utvoříme z prvků 0, 1, 2, ... k kombinace λté třídy, aby součet prvků obnášel k, v pořádku sestupném, při čemž se mohou ovšem některé prvky opakovati; načež v každé této kombinaci prvky permutujeme.

z čísel 0, 1, 2, ..., k takovým způsobem, aby součet prvků obnášel k; při tom nutno k tomu bráti zřetel, že $(\omega)_\sigma = 0$, když $\omega < \sigma$, jsou-li obě čísla ω, σ kladná a celistvá*). Počet těchto variac jest $(k + \lambda - 1)_k$.

Na př. pro $m_1 = 5$, $m_2 = 4$, $m_3 = 3$, tedy $\lambda = 3$ a pro $k = 4$ jsou žádané variace

400, 040, 004; **310**, 301, 130, 103, 031, 013; **220**, 202, 022; **211**, 121, 112.

Těchto variac jest $(4 + 3 - 1)_4 = (6)_4 = 15$.

Dle vzorce (6) potom platí identita

$$(5 + 4 + 3)_4 = \Sigma(5)_4 (4)_0 (3)_0 + \Sigma (5)_3 (4)_1 (3)_0 + \Sigma (5)_2 (4)_2 (3)_0 + \Sigma (5)_2 (4)_1 (3)_1,$$

při čemž symbol Σ vztahuje se k permutacím dotyčných veličin μ_i.

Provedeme-li naznačené početní výkony, obdržíme

$$(12)_4 = 495 = 5 + 1 + 0 + 40 + 30 + 20 + 5 + 12 + 4 + 60 + 30 + 18 + 120 + 90 + 60.$$

---

*) Definujeme-li veličinu $(\omega)_\sigma$ rovnicí

$$(\omega)_\sigma = \frac{\omega!}{(\omega - \sigma)!\,\sigma!},$$

má to smysl pouze pro celistvé a kladné $\omega \gtreqless \sigma$.

Na základě definice

$$(\omega)_\sigma = \frac{\omega(\omega - 1)\ldots(\omega - \sigma + 1)}{1.2\ldots\sigma}$$

můžeme však pojem této veličiny rozšířiti pro jakékoliv *realné* i *komplexní* ω při *kladném* a *celistvém* σ.

Na základě relace

$$(\omega)_{\sigma-1} = \frac{\sigma.(\omega)_\sigma}{\omega - \sigma + 1}$$

obdržíme pro $\sigma = 1$ hodnotu

$$(\omega)_0 = 1.$$

Pro $\sigma = 0$ obdržíme $(\omega)_{-1} = 0$; z toho plyne, že $(\omega)_\sigma = 0$, je-li

$$\sigma < 0.$$

Identická rovnice (6) platí pro jakékoliv realné i komplexní m_i a pro celistvé a kladné k.

Na př.

$$\alpha)\quad \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)_3=\left(\frac{3}{4}\right)_3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)_0+\left(\frac{3}{4}\right)_0\left(-\frac{1}{2}\right)_3 + \left(\frac{3}{4}\right)_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)_1+\left(\frac{3}{4}\right)_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)_2,$$

t. j.

$$\left(\frac{1}{4}\right)_3=\frac{7}{128}=\frac{5}{128}\cdot 1+1\cdot\left(-\frac{5}{16}\right)+\left(-\frac{3}{32}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) +\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{5}{128}-\frac{40}{128}+\frac{6}{128}+\frac{36}{128}=\frac{7}{128}.$$

$$\beta)\quad [(4+3i)+(2-5i)]_3=(4+3i)_3\cdot(2-5i)_0 +(4+3i)_0\cdot(2-5i)_3 +(4+3i)_2\cdot(2-5i)_1 +(4+3i)_1\cdot(2-5i)_2,$$

t. j.

$$(6-2i)_3=\frac{30-70i}{3}=\frac{-57+51i}{6}+\frac{-75+115i}{6} +\frac{3+21i}{2}(2-5i)+(4+3i)\cdot\frac{-23-15i}{2} =\frac{-57+51i-75+115i+333+81i-141-387i}{6} =\frac{30-70i}{3}.$$

Je-li $\sum\limits_{i=1}^{\lambda} m_i=k$, jest

$$\Sigma[\prod_{i=1}^{\lambda}(m_i)_{\mu_i}]=1.$$

Je-li $\sum\limits_{i=1}^{\lambda} m_i<k$ a zároveň celistvé a kladné číslo, jest

$$\Sigma[\prod_{i=1}^{\lambda}(m_i)_{\mu_i}]=0.$$

Je-li $\sum\limits_{i=1}^{\lambda} m_i=-1$, jest

$$\Sigma\left[\prod_{i=1}^{\lambda}(m_i)_{\mu_i}\right]=(-1)^k.$$

Je-li

$$m_1=m_2=\ldots=m_\lambda=m,$$

jsou na pravé straně rovnice (6) veškeré členy $\prod_{i=1}^{\lambda}(m)_{\mu_i}$, příslušné *variacím* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda)$, utvořeným z *téže kombinace*, sobě rovny.

Těchto stejných členů jest

$$\frac{\lambda!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_\lambda!},$$

znamená-li $\varkappa_k$ počet stejných prvků μ_k v příslušné kombinaci.

Potom platí identita

$$(7)\qquad (\lambda m)_k=\Sigma\frac{\lambda!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_\lambda!}(m)_{\mu_1}(m)_{\mu_2}\ldots(m)_{\mu_\lambda}.$$

Symbol Σ se vztahuje ke všem *kombinacím* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda)$ *λ-té třídy s opakováním*, utvořeným z čísel 0, 1, 2, ..., k tak, aby $\sum_{i=1}^{\lambda}\mu_i=k$.

Na př.

$$\begin{aligned}(4m)_5&=\frac{4!}{3!}(m)_5(m)_0(m)_0(m)_0+\frac{4!}{2!}(m)_4(m)_1(m)_0(m)_0\\&+\frac{4!}{2!}(m)_3(m)_2(m)_0(m)_0+\frac{4!}{2!}(m)_3(m)_1(m)_1(m)_0\\&+\frac{4!}{2!}(m)_2(m)_2(m)_1(m)_0+\frac{4!}{3!}(m)_2(m)_1(m)_1(m)_1.\end{aligned}$$

Pro $m=3$ obdržíme

$$\begin{aligned}(12)_5&=\frac{4!}{3!}(3)_5+\frac{4!}{2!}(3)_4(3)_1+\frac{4!}{2!}(3)_3(3)_2+\frac{4!}{2!}(3)_3(3)_1(3)_1\\&+\frac{4!}{2!}(3)_2(3)_2(3)_1+\frac{4!}{3!}(3)_2(3)_1(3)_1(3)_1,\end{aligned}$$

t. j.

$$792 = 0 + 0 + 36 + 108 + 324 + 324.$$

Dodatek. *Dr. F. J. Studnička* odvodil *binomickou* poučku *deduktivným* způsobem v *„Časop. pro pěstov. math. a fys.“* R. VIII., č. IV., pag. 145—150.

Mimo to odvodil v témže Časopise R. IX., č. II. pag. 49—54 zvláštní způsob, kterým lze přímo a nezávisle vyjádřiti kterýkoliv koefficient A_k danými koefficienty a_k ve vzorci

$$(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k)^n = \sum_{k=0}^{mn} A_k x^k .$$

O letavicích.

Žákům škol středních napsal

Josef Malíř,
assistent českého astronomického ústavu v Praze.

Viděli jste už někdy „padati hvězdy“? Jistě všimli jste si aspoň jednotlivých úkazů podobných, kdy při jinak zcela klidné obloze najednou zasvitne jasná, jindy opět slabší hvězda, letí — „padá“ — po nebi, až zase náhle zanikne. Padne tu hvězda — (a za celou noc ne jen jedna, nýbrž mnohem více) — a přece na nebi zbývá jich potom zrovna tolik, co jich bylo dříve; neschází žádná, jak snadno pohledem na mapu hvězdnou přesvědčiti se můžeme.

Uvědomili jste si tento úkaz (do jisté míry ještě podivuhodnější tím, že někdy na zem docela spadne cizí těleso, povětroň), a uvažovali jste o něm?

Za dob dřívějších si lidé tím příliš hlavy nelámali. Buď si úkazu toho vůbec ani nevšímali, (takže ze starších dob máme jen nepatrný počet zpráv), nebo vidouce padati hvězdu věřili, že skutečně hvězdy padají, „čistí se“, nebo že jsou to bludičkám podobné zjevy v atmosféře naší země vznikající.