František Procházka

Poznámka ku perspektivnému zobrazování

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 1, 49--59

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109081

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Poznámka ku perspektivnému zobrazování.

Napsal

Bedřich Procházka,
ředitel realky v Náchodě.

Poznámka tato jest pokračováním článku uveřejněného pod týmž titulem v tomto časopise z r. 1897. Účelem jejím jest rozřešiti ještě některé metrické úlohy v obraze perspektivném pomocí perspektivného půdorysu a nárysu.

Používajíce pomůcek v uvedeném článku odvozených a označení téhož rozřešme následující úlohy:

1. *Stanoviti odchylku přímky od roviny.*

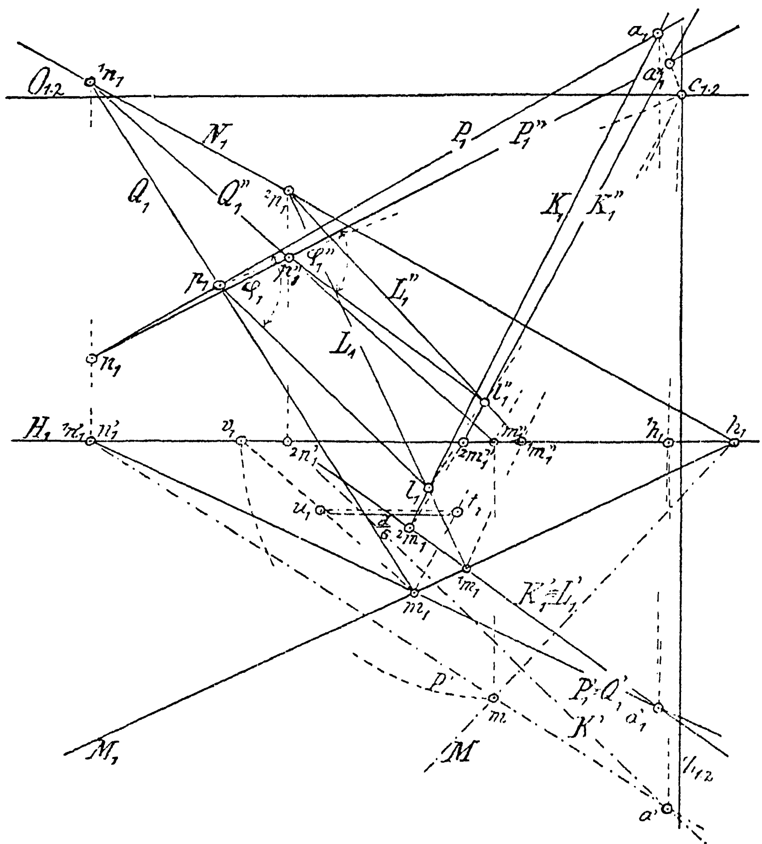
Přímka P budiž vyjádřena perspektivným obrazem P_1 a perspektivným půdorysem P'_1 (obr. 1.), rovina ϱ obrazy perspektivnými stopy M v rovině základní μ a stopy N v rovině svislé ν, rovnoběžné s průmětnou perspektivnou π a protínající rovinu základní ve přímce H.

Abychom určili odchylku φ přímky P od roviny ϱ, stanovíme odchylku oné přímky od jejího orthogonalného průmětu do této roviny.

Za tím účelem promítněme dva body přímky P do roviny ϱ. Vytkněme si na přímce této bod a (a_1 a'_1) a spusťme z něho k rovině ϱ kolmici K, jejíž perspektivný půdorys K'_1 a nárys K''_1 sestrojíme.

Abychom sestrojili perspektivný půdorys K'_1, sklopíme rovinu základní μ kolem přímky hlavní do roviny ν. Sklopme na př. bod m, v němž protíná průmět P' stopu M, tím, že spojíme obraz m_1 s $c_{1.2}$, rozdělíme délku m_1 $c_{1.2}$ na n stejných dílů (v obraze tomto z voleno $n = 6$) a prvým bodem dělícím t_1 veďme rovnoběžku s obrazem H_1, na níž naneseme úsečku $t_1\ u_1$ rovnou jedné šestině distance oka*).

Spojnice $m_1 u_1$ určuje v obraze H_1 délku $m_1''v_1$ jakožto souřadnici y_m bodu m vzhledem k rovině v (obsahující hlavní přímku H), vyjádřenou dle měřítka pro tuto rovinu.



Obr. 1.

Sestrojíme-li nyní bodem m_1'' přímku rovnoběžnou se $Z_{1.2}$ a naneseme-li od tohoto bodu odvozenou délku y_m, obdržíme

*) Tamtéž v poznámce 4. odst. 1.

sklopený bod m, který spojen byv s obrazem h_1, v němž obraz M_1 obraz H_1 protíná, nám sklopenou stopu M podává.

Podobně sestrojíme sklopený půdorys a' bodu a, když vedeme přímku $a'_1 c_{1.2}$, která H_1 v obraze ${}^1h_1$ protíná, a sestrojíme čáru ${}^1h_1\, a' \,||\, Z_{1.2}$, kteráž obraz P' v obraze a' protíná. Kolmice s bodu a' ku stopě M sestrojená bude sklopeným perspektivným půdorysem K' kolmice K.

Perspektivný nárys K''_1 bude obsahovati perspektivný nárys a''_1 a bude kolmý k obrazu stopy N_1. (Perspektivný nárys a''_1 bodu a sestrojíme konstrukcí uvedenou v 1. odst. dotýčného článku tím, že spojíme a'_1 s $c_{1.2}$ čarou, která obraz H_1 v obraze ${}^1h_1$ protíná. Čára ${}^1h_1\, a''_1 \,||\, Z_{1.2}$ protíná spojnici $a_1 c_{1.2}$ v obraze a''_1).

Z bodu ${}^2m''_1$, ve kterém perspektivný nárys K''_1 protíná obraz H_1 odvádíme čarou ${}^2m''_1\, c_{1.2}$ v obraze K'_1 obraz ${}^2m_1$ stopy ${}^2m$ kolmice K, kteráž s bodem a kolmici tuto určuje.

Abychom průsečík l přímky K s rovinou ϱ sestrojili, použijme přímky L, která ležíc v rovině ϱ s přímkou K má společný průmět půdorysný*).

Přímka L protíná stopy M a N roviny ϱ v bodech ${}^1m$ a ${}^2n$, jichž perspektivné půdorysy jsou v ${}^1m_1$ a ${}^2n'_1$. Z bodu ${}^2n'$ odvodíme si ve stopě N bod ${}^2n$, který s bodem ${}^1m$ přímku L určuje.

V průsečíku l přímky L s přímkou K obdrželi jsme orthogonalný průmět bodu a do roviny ϱ.

Místo abychom ještě druhý bod přímky P do roviny ϱ orthogonalně promítali, vyhledejme průsečík p přímky P s rovinou ϱ, jehož průmět do této roviny s ním v jedno spadá.

Průsečík tento p vyhledáme týmž způsobem jako bod l pomocí přímky Q v rovině ϱ ležící, jejíž průmět Q' se s průmětem P' stotožňuje.

Spojnice bodů p a l jest průmětem přímky P do roviny ϱ, který s přímkou P žádaný úhel φ určuje.

Abychom velikost tohoto úhlu určili, přihlížíme k pravoúhelnému trojúhelníku apl, v němž se žádaný úhel φ jakožto úhel apl vyskytuje. Třeba jen trojúhelník tento sestrojiti z pravé

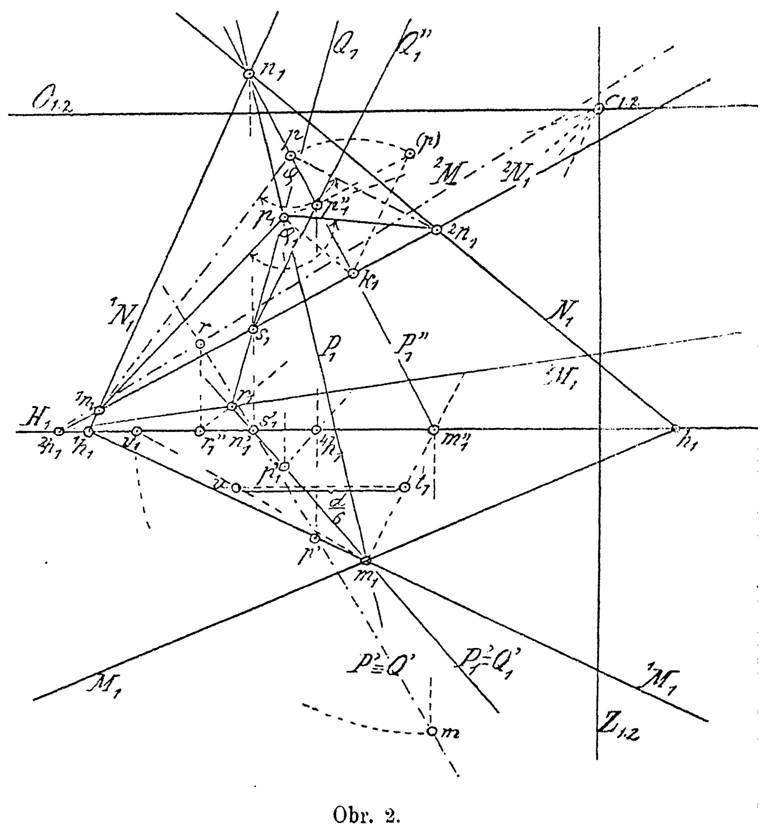
---

*) Tamtéž, odst. 4. c.

velikosti obou odvěsen *al* a *pl*, které si známým způsobem odvodíme*). —

2. *Sestrojení odchylky dvou rovin.*

Ku stanovení odchylky φ rovin ϱ a σ, vyjádřených stopami M, N a ^{1}M, ^{1}N (obr. 2.) použijeme roviny τ kolmé ku průsečnici P obou těchto rovin, určené průsečíky *m* a *n* stop.



Obr. 2.

Abychom stopu půdorysnou ^{2}M roviny τ, kolmou ku průmětu P' sestrojili, sklopíme rovinu základní kolem přímky hlavní H do roviny ν, způsobem několikráte již uvedeným. Spojíme

*) Tamtéž, odst. 5b.

obraz m_1 s $c_{1.2}$ a rozdělíme $m_1 c_{1.2}$ na n stejných dílů (v obraze na šest). Prvým bodem dělícím t_1 vedeme rovnoběžku $t_1\ u_1$ s obrazem H_1, na níž naneseme šestinu dištance oka. Spojnice $m_1\ u_1$ protíná H_1 v bodu v_1, určujícím délku $m_1''\ v_1$ jakožto délku souřadnici y_m bodu m vůči rovině ν v měřítku platném pro tuto rovinu. Vztýčíme-li v bodě m_1'' kolmici ku H_1 a naneseme na ni délku $m_1''\ m$ rovnou $m_1''\ v_1$ obdržíme sklopený bod m, který spojen s půdorysným průmětem n' bodu n přímky P, sklopený průmět P′ této přímky určuje.

Zvoleným bodem ${}^2h_1$ na přímce H_1 sestrojíme kolmici ^{2}M jakožto sklopenou horizontalní stopu roviny τ kolmé ku přímce P. Stopu ^{2}N této roviny obdržíme, vedeme-li s bodu ${}^2h$ kolmici ku průmětu P″, určenému bodem n a nárysným průmětem m'' bodu m.

Abychom průsečnice roviny τ s rovinami ϱ a σ obdrželi, sestrojíme průsečík p roviny prvé s průsečnicí P rovin druhých.

Za tím účelem použijeme přímky Q, ležící v rovině τ, jejíž průmět Q' se s průmětem P' stotožňuje. Přímka Q protíná stopy ^{2}M a ^{2}N roviny τ v bodech r a s, jichž průměty půdorysné r' a s', a z těchto i přímku Q samu si odvodíme. Přímka tato protíná se s přímkou P v hledaném průsečíku p přímky P s rovinou τ, jehož průměty p' a p'' si v průmětech P' a P″ odvodíme.

Spojnice průsečíku p s body ${}^1n$ a ${}^2n$, v nichž stopa ^{2}N roviny τ stopy N a ^{1}N obou rovin ϱ a σ protíná, jsou průsečnice roviny oné s rovinami těmito, kteréž hledaný úhel φ svírají.

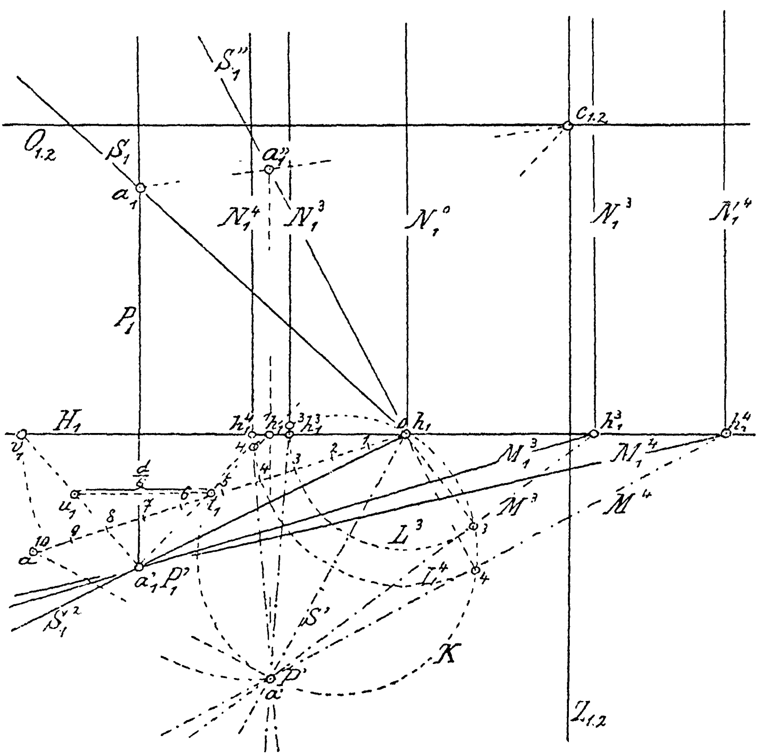
Abychom pravou velikost tohoto úhlu ${}^1np^2n = \varphi$ určili, sklopme rovinu τ do roviny ν použijíce známé konstrukce*).

Spustíme s bodu p ku stopě ^{2}N roviny τ kolmici pk, jejíž perspektivný nárys s obrazem P_1'' se stotožňuje a vyhledejme její délku jakožto přeponu pravoúhlého trojúhelníka, jehož jednou odvěsnou jest úsečka $p''\ k$ v obraze perspektivném dle měřítka pro rovinu ν vyjádřená a druhou souřadnice y_p bodu p vzhledem k téže rovině ν. Souřadnici tuto určíme pomocí perspektivného půdorysu p_1' bodu p a jeho sklopení p' v úsečce $p'\ {}^4h_1$.

*) Tamtéž, odst. 5. c.

Sestrojíme-li ku $p''_1 k_1$ kolmici $p''_1 (p)$, na niž souřadnici y_p naneseme, obdržíme v přeponě $(p)\,k_1$ hledanou délku kolmice pk. Přenesše tuto délku na obraz P''_1, obdržíme bod p, který s body ^1m a ^1n určuje hledaný úhel φ obou rovin ϱ a σ. —

3. *Sestrojiti svislou přímkou rovinu svírající s danou přímkou určitý úhel.*



Obr. 3.

Máme-li přímkou svislou P (P_1 P'_1) sestrojiti rovinu ϱ svírající s danou přímkou S (S_1 S'_1) úhel daný, sklopíme rovinu základní μ kol hlavní přímky H do roviny ν obsahující tuto hlavní přímku (obr. 3.). Tak odvodíme sklopený půdorys bodu a a přímky S sestrojený dle měřítka pro rovinu ν.

Položme přímkou P rovinu ϱ^4, jejíž půdorysná stopa budiž ve přímce M^4.

Abychom určili odchylku φ^4, kterou rovina tato tvoří s přímkou S, promítněme přímku S do této roviny. Za tím účelem promítneme stopu h přímky S v rovině základní se nalézající do roviny ϱ^4. Pak přímka spojující tento průmět 4 s bodem a jest orthogonalním průmětem přímky S do roviny ϱ.

Pokládáme-li úsečku ah za jednotku, kterou měříme, pak nám délka úsečky $h_1 4$ udává sinus hledaného úhlu φ^4. Abychom délku tu mohli měřiti, sestrojíme si pravou délku úsečky ah, která jest přeponou v pravoúhelném trojúhelníku, jehož jednou odvěsnou jest úsečka $a'h$ a druhou aa'. Vztyčíme-li v bodě a kolmici ku S' a naneseme-li na ni úsečku aa' dle měřítka pro rovinu ν vyjádřenou, t. j. délku ${}^1h_1\, a_1''$, obdržíme bod a, který s bodem h_1 žádanou přeponu ah dle téhož měřítka vyjadřuje.

Rozdělíme-li délku $h_1\, a$ na deset dílů můžeme délku sinusu h_1 4 hledaného úhlu pomocí kružnice L^4 na ní změřiti. Z obrazu patrno, že sinus ten 0·4 obnáší.

Kdybychom měli sestrojiti z rovin procházejících přímkou P onu ϱ^3, která tvoří s přímkou S úhel, jehož sinus má určitou hodnotu, na př. 0·3, opíšeme s bodu h_1 poloměrem $h_1 3$ kružnici L^3, k níž sestrojíme tečnu $a'3$ s bodu a' jakožto sklopenou stopu M^3 roviny žádané ϱ^3. Jelikož lze sestrojiti takové tečny dvě, budou takové roviny ϱ^3 možny také dvě.

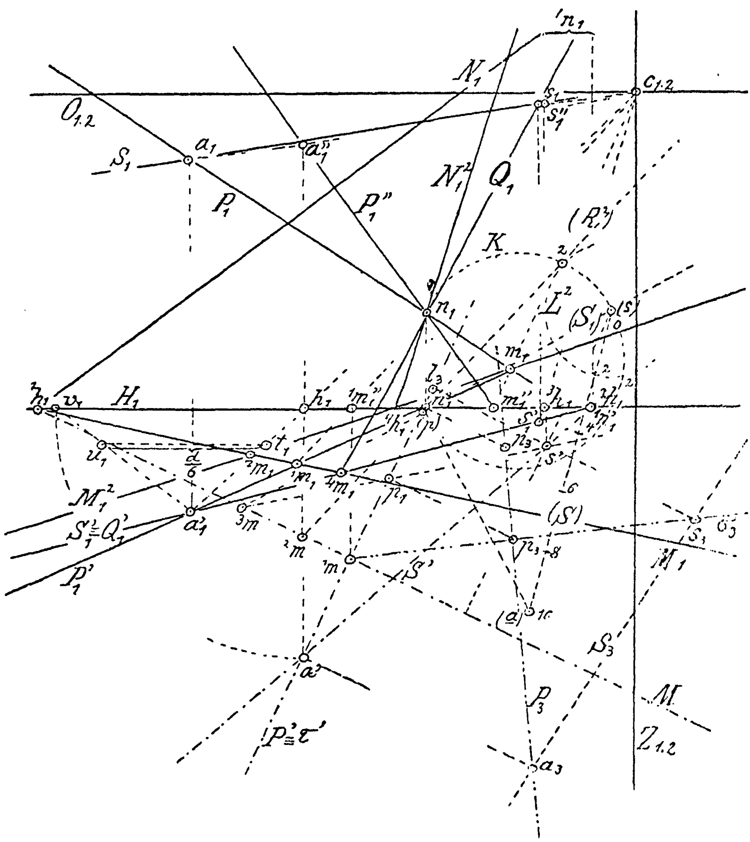
Dotyčné body 3 tečen těchto s kružnicí L^3 leží zároveň v kružnici K, sestrojené nad úsečkou $a'h_1$, jakožto nad průměrem. Můžeme tedy body 3 sestrojiti také jakožto průsečíky kružnice L^3 s kružnicí K.

Jak obrazy perspektivné stop $M^4 N^4$ a $M^3 N^3$ sestrojíme, jest z obrazu 3. dostatečně patrno.

4. *Sestrojiti šikmou přímkou rovinu svírající s danou přímkou určitou odchylku.*

Máme-li přímkou P (P_1 P_1'), nakloněnou k rovině základní i průmětně perspektivné, sestrojiti rovinu ϱ svírající s přímkou S (S_1 S_1') daný úhel, sklopíme opět základní rovinu do roviny $\nu \parallel \pi$, protínající rovinu onu ve přímce H. (Obr. 4.) Tím obdržíme sklopený průmět P' a S'.

Abychom mohli konstrukcí v předcházejícím odstavci uvedených užiti, použijeme roviny pomocné σ, kolmé ku přímce P, jejíž sklopená stopa v rovině základní budiž $M \perp P'$ a stopa v rovině ν budiž $N \perp P''$.



Obr. 4.

Použijme dále roviny τ, promítající přímku P do roviny základní μ, jakožto další pomocné průmětny orthogonalné, do níž promítneme také přímku S. Obraz P_3 tohoto průmětu přímky P obdržíme, když v bodě a' vztýčíme kolmici ku obrazu P' a na ni naneseme délku $h_1 a_1''$, jakožto souřadnici z_a bodu a dle měřítka pro rovinu v. Tím obdržíme obraz a_3. Stejným způsobem obdržíme obraz n_3 stopy n přímky P. Oběma obrazy a_3 a n_3 jest obraz P_3 určen.

Stejně zobrazíme přímku S. Jelikož se tato přímka s přímkou P v bodě a protíná, bude zapotřebí zobraziti vedle tohoto bodu ještě jeden bod oné přímky, a k tomu zvolíme onen, ve kterém ona rovinu σ protíná.

Obrazy s_1 a s_1' tohoto bodu sestrojeny jsou známým způsobem pomocí přímky Q v rovině σ ležící, která má s přímkou S týž průmět půdorysný.

Z obrazu s_1' odvodíme si obraz s' tohoto bodu po sklopení tím, že sestrojíme přímku $s_1' c_{1.2}$, která protíná obraz přímky H v obraze ${}^3h_1$. Kolmice $s_1^3 h_1$ ku obrazu H_1 vztyčená protíná obraz S' v obraze s'. Spustíme-li s obrazu s' kolmici $s_1 l_3$ ku obrazu $P' \equiv \tau'$ a naneseme na ni od bodu l_3 souřadnici

$$z_s = s_1'' {}^3h_1$$

bodu s dle měřítka pro rovinu v, obdržíme obraz s_3, který zároveň padá do obrazu $\sigma_3 \perp P_3$ roviny $\sigma \perp P$. (Obraz σ_3 prochází obrazem ${}^1m$, v němž obraz P' s M se protíná, a stojí kolmo ku obrazu P_3).

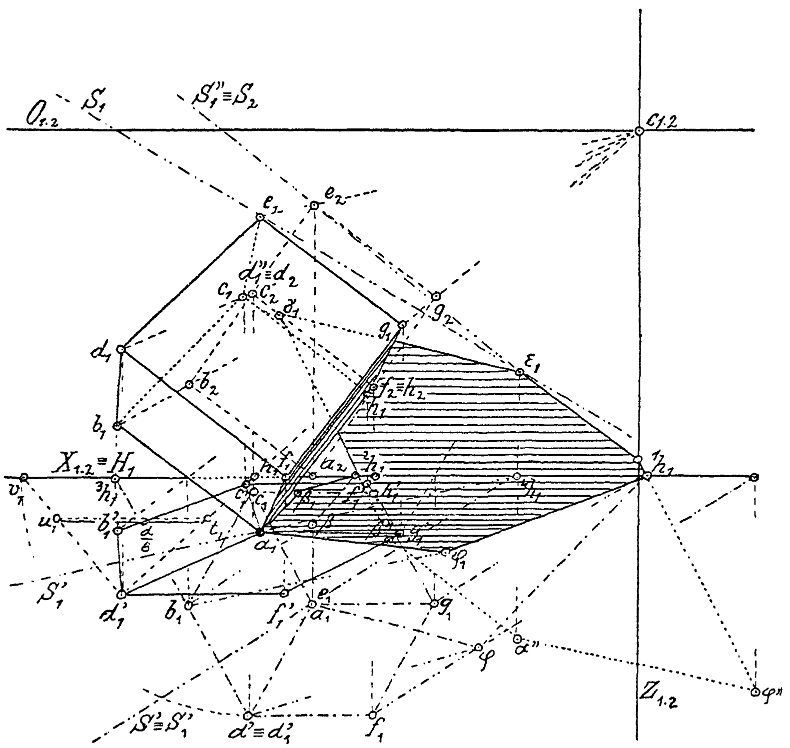
Rovinu tuto σ sklopíme nyní do roviny půdorysné kolem její stopy M. Tu průsečík p ($p_1\,p_3$) přímky P s rovinou σ padne do bodu (p), bod s do polohy (s) a průmět (S) přímky S do roviny σ po sklopení bude ve přímce (p) (s).

Nyní máme vše upraveno ku konstrukci v předcházejícím odstavci provedené.

V bodě p vztyčíme kolmici (p) (a) ku přímce (a) (s), na níž naneseme vzdálenost ap bodu a od roviny σ, vyjádřenou délkou a_3p_3 v obraze třetím.

Máme-li sestrojiti na př. rovinu ϱ^2, která svírá s přímkou S úhel, jehož sinus se rovná 0·2, rozdělíme úsečku (a) (s), kterou za jednotku zvolíme, na deset stejných dílů a sestrojíme poloměrem (s)2 kružnici L^2, jež kružnici K, nad délkou (p) (s) jako nad průměrem sestrojenou, protíná v bodech 2, jež určují s bodem (p) stopy (R^2) hledaných rovin ϱ^2. (Z těchto dvou možných rovin zvolena jen jedna). Ze stopy této (R^2) roviny ϱ^2

ve sklopení odvodíme horizontalní stopu M roviny této, přihlížíme-li k tomu, že stopa tato obsahovati bude bod ${}^2m$, v němž stopa (R^2) protíná stopu M, (jehož perspektivný půdorys ${}^2m_1$ si odvodíme v obraze M_1) a stopu m přímky P, kterou rovina ϱ^2 obsahuje. Proto spojnice ${}^2m_1$ m_1 bude obrazem M_1^2, kterýž protíná obraz hlavní přímky H v obraze ${}^4h_1$, určujícím s obrazem n_1 druhé stopy n přímky P obraz N_1^2 druhé stopy roviny ϱ^2. —



Obr. 5.

Konstrukcí, v tomto a předcházejícím odstavci uvedenou, jest řešena úloha: *Stanoviti intensitu osvětlení roviny položené přímkou* P *a osvětlené paprsky rovnoběžnými, jichž směr jest dán přímkou* S.

Zároveň také řešena úloha: *Sestrojiti přímkou* P *roviny* ϱ, *jimž náleží určitá intensita vzhledem k rovnoběžným paprskům, jichž směr jest dán přímkou* S.

5. *Sestrojení obrazu perspektivného pomocí půdorysu a nárysu.* Jsou-li dány sdružené obrazy: půdorys a nárys, můžeme jich užiti dle dříve uvedeného způsobu ku sestrojení perspektivného obrazu následním způsobem.

Je-li bod d vyjádřen obrazy d_1 a d'_1, odvodíme si známým způsobem obraz d' sklopeného půdorysu (obr. 5.). Obrazy d' a d''_1 můžeme pak považovati za půdorys a nárys bodu d, kteréž jsou sdruženy dle osy $X_{1.2} \equiv H_1$ a sestrojeny dle měřítka příslušného rovině ν, obsahující přímku hlavní H.

V obraze 5. sestrojeny nyní sdružené obrazy krychle, jejímž jedním vrcholem jest zobrazený bod d a jejíž jedna úhlopříčna stojí ku rovině základní μ kolmo. (Obraz první jest čerchán a druhý čárkován).

Jakých zjednodušení lze při sestrojování obrazu perspektivného z těchto sdružených obrazů orthogonalných užiti, jest z obrazu patrno.

V obrazu tomto zároveň sestrojen vlastní a vržený stín zobrazené krychle na rovinu základní a rovinu ν vzhledem k paprsku S, jehož obrazy sdružené jsou dány.

O poučce polynomické a binomické, jakož i o některých identitách na nich založených.

Pro studující napsal

Vilém Jung, professor v Praze.

1. Poučka polynomická odvozuje se obyčejně na základě binomické*).

---

*) Viz na př.: Dr. *F. J. Studnička*, Všeobecné tvarosloví algebraické, pag. 41—52. Praha, 1880.

F. Hoza, Algebra pro vyšší reálky, pag. 230. Praha, 1892.

H. Weber, Lehrbuch der Algebra, I. Bd, pag. 53—54, 2. Auflage. Braunschweig, 1898.