Arnold Walfisz

O některých novějších výsledcích z teorie mřížových bodů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 3, 200--223

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109070

O některých novějších výsledcích z teorie mřížových bodů.

Od *Arnolda Walfisze.*[1] [2])

Dovolím si v následujícím podati zprávu o nejdůležitějších pokrocích, které zaznamenala teorie mřížových bodů asi během posledního roku. Při tom je však vhodno zmíniti se také o dřívějších vyšetřováních v tomto oboru, aby nejnověji docílené pokroky byly postaveny do pravého světla.

Mřížové body jsou body o celistvých souřadnicích ve 2, 3 neb vícerozměrném cartezském prostoru. V takovém prostoru udáme konečný, uzavřený obor $B(x)$, který závisí na jedné positivní proměnné x, a v podstatě jde pak o to, odhadnouti shora a zdola počet $G(x)$ mřížových bodů v $B(x)$ s rostoucím x. (O-problémy a Ω-problémy.) Obory $B(x)$ musí při tom býti „slušné", aby připouštěly vyšetřování v tomto směru. Co však znamená „slušný", nemusím vykládati, neboť v dalším budou uvažovány jen problémy docela specielního druhu, při kterých obor $B(x)$ bude explicite vypsán. Při těchto problémech, jako vůbec při nejdůležitějších problémech tohoto oboru, tvoří geometrický původ oboru $B(x)$ jen vhodný plášť čistě aritmetického jádra. Nemůže tudíž překvapiti, že se nahlíží na teorii mřížových bodů jako na oddíl teorie čísel.

Ačkoliv klasické problémy z teorie mřížových bodů jsou velmi dávné, přece začalo systematické vyšetřování podle moderních principů teprve před čtvrt stoletím. Jediná učebnice, která věnuje těmto otázkám náležitou pozornost, je trojsvazková učebnice od

[1]) Tento článek jest rozšířené znění referátu, který pan Dr. A. Walfisz přednesl ve Varšavě na prvním sjezdu slovanských matematiků dne 26. září 1929. Pan Walfisz vypracoval laskavě rukopis tohoto článku pro náš časopis. Překlad obstaral p. Vladimír Knichal, asistent matematického semináře na Karlově universitě. Časovým odkazům jest rozuměti vzhledem ke dni 26. září 1929; tedy „počátkem minulého roku" znamená „počátkem roku 1928" a pod. *Red.*

[2]) Panu V. Knichalovi děkuji srdečně za laskavé obstarání překladu.

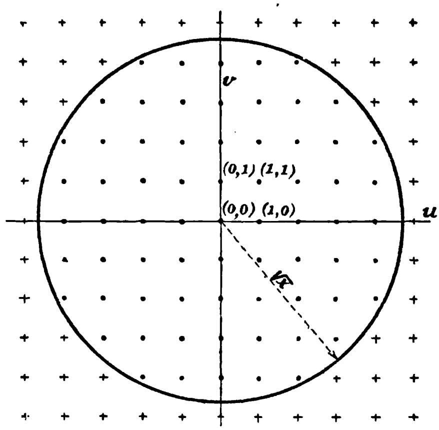
Landaua „Vorlesungen über Zahlentheorie", vyšlá roku 1927. Odkazuji zejména na druhý díl tohoto monumentálního díla k doplnění následujících vývodů.

Z problémů o mřížových bodech upoutávaly odedávna zájem dva problémy, kterými se již Gauss a Dirichlet zabývali. Mám na zřeteli Gaussův kruhový problém a Dirichletův problém dělitelů. V prvém případě je $B(x)$ kruh

$$u^2 + v^2 \leqq x \tag{1}$$

se středem v počátku systému souřadnic (u, v) a s poloměrem $\sqrt{x}$; ve druhém případě je $B(x)$ tříroh omezený dvěma úsečkami a obloukem hyperboly:

$$u \geqq 1, \quad v \geqq 1, \quad uv \leqq x \tag{2}$$



Obr. 1.

Aritmetické jádro těchto otázek je nasnadě. Funkce $G(x)$ odpovídající kruhu (1) vyjadřuje počet všech párů celých čísel (m, n), které splňují nerovninu

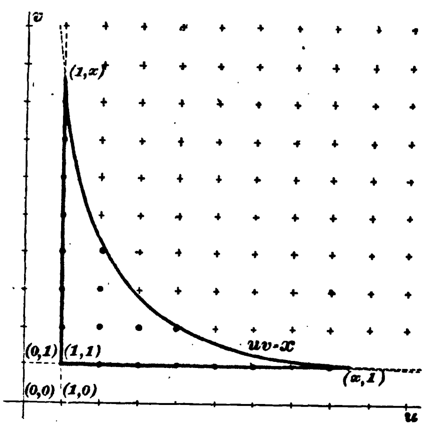
$$m^2 + n^2 \leqq x.$$

$G(x)$ tedy udává, kolika způsoby lze vyjádřiti všechna čísla nezáporná $\leqq x$ jako součet dvou celých kvadrátů. Funkce $G(x)$ odpovídající hyperbolickému třírohu (2) — je často označována $D(x)$ a my ji budeme také tak nazývati — udává, kolik párů přirozených čísel (m, n) hoví nerovnině

$$m \, . \, n \leqq x,$$

t. zn. kolika způsoby lze všechna přirozená čísla $\leqq x$ vyjádřiti součinem dvou právě takových činitelů, t. zn. kolik positivních dělitelů mají všechna přirozená čísla $\leqq x$.

Na kruhový problém a na problém dělitelů musíme se dívati jako na jistý druh matematických dvojčat — ačkoliv prvý vyskytl se o několik desítiletí dříve — neboť jejich způsob vyšetřování je velice analogický a až posud každý výsledek pro jeden z nich dal se s přibližně stejnou ostrostí převésti na druhý (tato dalekosáhlá analogie spočívá především v tom, že známá Jacobiho věta o počtu všech rozkladů určitého čísla na součet dvou kvadrátů vyjadřuje tento počet dělitelovou funkcí). Při tom chová se problém kruhový trochu slušněji, což v zásadě spočívá v dokonalé okrouhlosti základního oboru, kdežto hyperbolický tříroh má ostré rohy.



Obr. 2.

V následujícím podám zprávu jen o problému dělitelů, neboť k tomuto problému vztahuje se pokrok docílený J. G. van der Corputem[3]) před krátkým časem (van der Corput přenechal pak svému žáku L. W. Nielandovi aplikaci svojí metody na kruh;[4]) jiné aplikace podal jsem na začátku tohoto roku[5])).

$D(x)$ označuje, jak již bylo řečeno, počet všech mřížových bodů v hyperbolickém třírohu (2). Pak je, jak již Dirichlet ele-

[3]) *1* „Zum Teilerproblem", Mathematische Annalen *98* (1928), S. 697—716. Srovnej k tomu ještě *2* „Neue zahlentheoretische Abschätzungen" (Zweite Mitteilung.), Mathematische Zeitschrift *29* (1929), S. 397—426 a *3* „Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme" (Zweite Mitteilung.), Mathematische Zeitschrift *28* (1928), S. 301—310.

[4]) „Zum Kreisproblem", Mathematische Annalen *98* (1928), S. 717 až 736.

[5]) „O pewnem zagadnieniu dzielników Ramanujana (Über ein Ramanujansches Teilerproblem.)", Prace matematyczno-fizyczne, *34* (1929), S. 101—126.

mentárně dokázal, $D(x)$ přibližně dáno výrazem:

$$x \log x + (2C - 1)\, x$$

(C je Eulerova konstanta) a sice tak, že klademe-li

$$D(x) - x \log x - (2C - 1)\, x = \Delta(x),$$

je

$$\Delta(x) = O(\sqrt{x}). \tag{3}$$

Ve (3) vystupuje P. Bachmannem zavedený odhadní symbol O, o jehož všeobecné rozšíření se přičinil zejména Landau. (3) praví, že

$$\limsup_{x=\infty} \left| \frac{\Delta(x)}{\sqrt{x}} \right| < \infty$$

a analogicky je rozuměti všem ostatním O-formulím.

Přes mnohé pokusy trvalo mnoho desítiletí, než se podařilo tento odhad zostřiti. Teprve 1903 podařilo se ruskému badateli Voronoïovi dokázati:

$$\Delta(x) = O\,(\sqrt[3]{x} \log x). \tag{4}$$

Musíme se při této formuli trochu zdržeti, abychom viděli, jak asi jest oceniti pokrok proti formuli (3).

Funkce $\log x$ roste s x do nekonečna, ale přece slaběji než libovolná sebe menší pevná positivní mocnina x. Neboť při pevném $\varepsilon > 0$ a libovolném $x > 1$ je

$$\log x = \int_1^x \frac{du}{u} < \int_0^x \frac{u^{\frac{1}{2}\varepsilon}}{u} du = \frac{2}{\varepsilon} x^{\frac{1}{2}\varepsilon},$$

a tedy

$$\frac{\log x}{x^\varepsilon} < \frac{2}{\varepsilon} x^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \to 0.$$

Odhad (4) praví tedy méně než

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{3}}),$$

ale více než

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}) \tag{5}$$

při každém pevném $\varepsilon > 0$.

Srovnání (5) a (4) ukazuje tedy, že se Voronoïovi podařilo snížiti zbytkový exponent $\frac{1}{2}$ v Dirichletově formuli (3) „téměř“ na $\frac{1}{3}$.

Elementární, ale dosti obšírný a dlouhý (40 tiskových stránek) Voronoïův důkaz vzorce (4), který spočívá na zvláštním spojení geometrických a aritmetických principů, byl v dalším velice zjednodušen. Za příslušné metody důkazů vděčíme hlavně dvěma badatelům. Od r. 1912 věnoval Landau kruhovému problému, problému dělitelů a příbuzným otázkám celou řadu pojednání základního významu a 7 let později připojil se k němu van der Corput, který rovněž uveřejnil slušný počet prací. Oba badatelé vytvořili a zdokonalili celou řadu metod, které operují s nejrůznějšími pomůckami (reálná funkční teorie, komplexní funkční teorie, geometrie a aritmetika), a všechny tyto metody, aplikujeme-li je na problém dělitelů, vedou svorně k Voronoïovu odhadu (4).[6])

Souběžně s tím probíhají od r. 1915 vyšetřování Hardyho a Landaua, jejichž cílem je odhad funkce $\Delta(x)$ zdola. Nejostřejší docílený výsledek (Hardy) je:

$$\Delta(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x \log \log x). \tag{6}$$

Zde vystupuje Hardym a Littlewoodem zavedený odhadní symbol Ω, který v předloženém případě vyjadřuje, že

$$\limsup_{x=\infty} \left| \frac{\Delta(x)}{x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x \log \log x} \right| > 0;$$

ostatním Ω-formulím je rozuměti analogicky. Ve vzorci (6) přirozeně $\log^{\frac{1}{4}} x$ a $\log \log x$ padají méně na váhu. Formule vyjadřuje více než

$$\Delta(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}}), \tag{7}$$

ale méně než

$$\Delta(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$$

pro jakékoliv pevné $\varepsilon > 0$, tedy ne o „mnoho" více než (7).

Zmínil bych se ještě, že se podařilo — ne sice pro funkci $\Delta(x)$, ale pro střední hodnotu

$$\Delta_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x | \Delta(u) | \, du —$$

docíliti odhadů shora, jež daleko překonávají Voronoïův výsledek (4). (Je zřejmo, že tento integrál existuje, neboť $D(x)$ je funkce po částech konstantní, „Treppenfunktion".) Podle Hardyho (1916) je totiž pro každé pevné $\varepsilon > 0$

$$\Delta_1(x) = O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}), \tag{8}$$

kdežto H. Cramér (1922) ještě mohl ε v exponentu škrtnouti:

$$\Delta_1(x) = O(x^{\frac{1}{4}}). \tag{9}$$

[6]) V této souvislosti bylo by ještě zmíniti se o tom, že W. Sierpiński již 1906 užil Voronoïovy metody na kruhový problém. Asi do r. 1916 spadají publikace Hardyho, Wigerta a Vinogradova. Za jednu ze svých nejplodnějších metod děkuje Landau nezdařenému pokusu Pfeifferovu z osmdesátých let minulého století. Tato „Pfeifferova metoda" byla také Cauerem, Hammersteinem, Rogosinskim a van der Corputem užita a vybudována, dnes se však na ni pohlíží, právě tak jako na metodu Voronoïovu, jako na zastaralou. Za jinou metodu děkuje Landau a van der Corput neuveřejněným náčrtům Piltzovým, jemuž se však nezdařilo dokázati ani vztah (5).

Že jsme mohli jíti tak daleko, tkví v tom, že se nerovnoměrnosti výchylek funkce $\Delta(x)$ integrací hodně vyrovnávají.

Z (6) následuje, že odhad (9) by byl jistě nesprávný, kdybychom v něm funkci $\Delta_1(x)$ nahradili funkcí $\Delta(x)$. Neboť

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{4}}) \tag{9a}$$

praví, že

$$\left|\frac{\Delta(x)}{x^{\frac{1}{4}}}\right|$$

pro velká x je ohraničeno, z čehož následuje

$$\frac{\Delta(x)}{x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x \log \log x} \to 0,$$

což je ve sporu se (6). Tušíme ale, snad již 50 let, že odhad (8) platí také pro $\Delta(x)$, že tedy

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}) \tag{10}$$

pro každé pevné $\varepsilon > 0$. Těšilo by mě velice, kdybych se dožil důkazu formule (10). Pravděpodobnost pro to je ale velmi nepatrná. Může se zdáti podivným, že věříme v odhad (10), ačkoliv tolik různorodých metod, které užívají nejrozmanitějších prostředků, poskytují všechny v podivuhodné harmonii Voronoïův výsledek, takže tento se zdá přirozeným a definitivním. Ale každá z těchto metod, sebe duchaplnější konstrukce, obsahuje na některém místě odhady, které nebylo sice možno nahraditi lepšími, jejichž nedostatečnost však zřetelně cítíme, zatím co Ω-metody žádné takové citelné slabosti neukazují. Domněnka (10) získala také na pravděpodobnosti od té doby, co byl znám Hardyho odhad (8).

Harmonický charakter vzorce (4) byl konečně 1922 porušen, když van der Corputovi zdařilo se elementární, ale neobyčejně komplikovanou metodou dokázati, že

$$\Delta(x) = O(x^{\Theta}), \text{ pro jisté vhodné } \Theta < 0{\cdot}33.$$

Jeho přesný výsledek zněl ostatně:

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{163}{494}}). \tag{11}$$

Pokrok proti (4) spočívá v podstatě v užití Weylem objevené (1914), dnes klasické věty o diofantických aproximacích. (Nauka o diofantických aproximacích — název pochází od Minkowskiho — pojednává v podstatě o problémech, které souvisí buď přímo nebo nepřímo s přibližným vyjádřením iracionálních čísel racionálními. Jednou takovou otázkou budu se zabývati v druhé části tohoto referátu, když budu pojednávati o jedné z Jarníkových prací.) Ale teprve technicky svrchovaně těžké, mnohonásobně opětované použití této věty podává odhad (11). Úsilí Littlewoodovu, Landauovu a přednášejícího zdařilo se dále (1924) již po jednom užití Weylovy věty zbytkový exponent v $\Delta(x)$ snížiti pod $\frac{1}{3}$ a dokázati aspoň

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{37}{112}+\varepsilon}) \tag{12}$$

pro každé $\varepsilon > 0$. (Při tom podařilo se Landauovi ještě ve zbytkovém členu nahraditi x^ε vhodnou mocninou logaritmu.)

Metody vedoucí ke (12) jsou daleko průhlednější než van der Corputův důkaz vzorce (11). Výsledek sám však proti jeho je méně ostrý, neboť

$$\frac{163}{494} < \frac{37}{112}.$$

Metody těchto tří spisovatelů, jakož i van der Corputovy, užil jsem ještě na rozmanité otázky.

Velmi komplikované odvození vzorce (11), kterýžto výsledek se nepodařilo od té doby jednoduššeji dokázati, dalo badatelům málo odvahy, pokusiti se o zlepšení tohoto odhadu. A tak bylo opětně van der Corputovi vyhrazeno, podniknouti nový úspěšný nápor. Na začátku tohoto roku objevila se od něho velice významná práce (je citována v poznámce 3) pod *2*), ve které dokázal nové, svrchovaně hluboce založené věty o diofantických aproximacích. Také zde jedná se o opětované použití vět Weylova druhu, jejichž odvození není již však tak spletité. Užitím nových pomůcek (interpolace parabolickými oblouky — myšlenka ještě neužitá v této souvislosti) zdařilo se van der Corputovi vytvořiti nástroj, který dovoluje překonati jeho dosavadní výsledek (11). Jak van der Corput dokázal (v práci citované v poznámce 3) pod *1*), je

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{27}{82}} \log x^{\frac{11}{41}}), \tag{13}$$

čímž skutečně formule (11) je zostřena, neboť

$$\frac{27}{82} < \frac{163}{494}$$

a mocnina logaritmu zřejmě ve vzorci (13) nevadí.

Jak vidíte, jsme ještě od cíle (10) nesmírně vzdáleni. Pokrok proti Voronoïovi, když vezmeme v úvahu pouze numerické zlepšení zbytkového exponentu, je velmi malý. Velká námaha, kterou si vyžádalo toto zlepšení, ukazuje rozhodně, že nejsme ještě dnes při vyšetřování O-problému na správné cestě — tím spíše, že také při van der Corputových vyšetřováních nedostatečnost užitých prostředků z teorie diofantických aproximací zrovna tak jasně vystupuje, jako tomu bylo před tím při jednodušších prostředcích vedoucích ke (4). Zdá se také, že dnešní matematika (jakož vůbec tak často v číselné teorii) je ještě slabá, aby dosáhla vytouženého cíle. Stojíme před uzavřenými dveřmi, které přes veškerou námahu můžeme pootevříti jen o několik milimetrů.

Ale pokusů o otevření těchto dveří nebude se nedostávati — tato větev matematiky má totiž také ještě sportovní zájem, který každému badateli dává podnět k předstižení rekordů jeho předchůdců. Mohl bych tento běh o závod, abych se vyjádřil trochu odvážnou analogií, srovnati se sprintem, s během na krátkou vzdálenost. Těšme se tedy tím, že ku příkladu v běhu na sto metrů zlepšil se rekord před sto lety docílený dnes třeba jen o jednu sekundu. Pohlížíme-li na van der Corputovy výkony v tomto světle, nesmíme je měřiti minimálním zmenšením zbytkového exponentu, nýbrž musíme vzíti v úvahu velký ostrovtip, kterého bylo potřeba k tomu, aby se při našich nedostatečných prostředcích těchto výkonů dosáhlo. Van der Corput je od r. 1922 v teorii mřížových bodů světovým O-mistrem na krátké vzdálenosti a nebude snadno, odejmouti mu tento titul.

Obrátíme se nyní k jinému problému z teorie mřížových bodů, který bychom mohli nazvati „vytrvaleckým problémem".

Buď $k \geqq 2$ celé,

$$Q(u_1, u_2 \ldots, u_k) = \sum_{\mu, \nu = 1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}) \tag{14}$$

buď positivně definitní kvadratická forma s libovolnými reálnými koeficienty — t. zn. taková kvadratická forma, která pro všechny systémy reálných hodnot proměnných je $\geqq 0$ a jen tenkráte vymizí, když všechny proměnné jsou $= 0$.

Determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

takové formy je positivní číslo. Budeme považovati systémy reálných hodnot $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ za body v k-dimensionálním prostoru a rovněž formu samotnou budeme nazývati k-dimensionální. Za základní obor $B(\mathfrak{x})$ zvolíme souhrn všech těch bodů, které hoví nerovnině:

$$Q\,(u_1, u_2, \ldots, u_k) \leqq x. \tag{15}$$

Pro $k = 2$ představuje obor (15) elipsu, pro $k = 3$ elipsoid, tedy vejčité těleso; pro $k \geqq 2$ nazýváme (15) analogicky k případu trojdimensionálnímu k-dimensionálním elipsoidem. Počet mřížových bodů, ležících v elipsoidu (15), označíme $A_Q(x)$; index Q má při tom naznačiti, že tato funkce závisí na kvadratické formě Q. Jak vidíte, jedná se při vyšetřování funkce $A_Q(x)$ — při problému elipsoidů — o dalekosáhlé zevšeobecnění Gaussova kruhového problému, ke kterému dospějeme, volíme-li pro formu Q

$$Q(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2.$$

Klademe-li obecněji

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2, \tag{14a}$$

tu poskytuje (15) k-dimensionální kouli

$$u_1^2 + u_2^2 \ldots + u_k^2 \leqq x, \tag{15a}$$

která obsahuje jako speciální případ kruh ($k = 2$) a trojdimensionální kouli ($k = 3$).

Elipsoidu (15) náleží objem

$$I_Q(x) = \int_{Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) \leqq x} \ldots \int du_1\, du_2 \ldots du_k.$$

Vyčíslíme-li tento k-násobný integrál — integruje se přes celý elipsoid — dostaneme

$$I_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\sqrt{D}\,\Gamma(\frac{1}{2}k + 1)}\, x^{\frac{1}{2}k}, \tag{16}$$

při čemž pro $k = 2$ a $k = 3$ dospějeme ke známým formulím. Problémem elipsoidu zabýval se — i když ne pro něj samotný — již Eisenstein. Z jeho vyšetřování vyplývá, že pro velká x funkce $A_Q(x)$ je asymptoticky vyjadřitelná objemem elipsoidu (16):

$$A_Q(x) \backsim I_Q(x);$$

to znamená, že

$$\lim_{x=\infty} \frac{A_Q(x)}{I_Q(x)} = 1.$$

Leží nyní nasnadě vytvořiti zbytkovou funkci

$$P_Q(x) = A_Q(x) - I_Q(x).$$

Poněvadž není třeba se obávati nedorozumění, budu místo toho krátce psáti $P(x)$.

Jak Minkowski (1905) dokázal, je

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}(k-1)}).$$

Tento výsledek odpovídá co do ostrosti Dirichletovu odhadu (3); pro kruh byl již znám Gaussovi.

Od r. 1912 vyšetřoval Landau elipsoidický problém svou komplexní „sprinterskou" metodou. Jak (1915) dokázal, je

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}k - \frac{k}{k+1}}). \tag{17}$$

Tento výsledek odpovídá Voronoïovu odhadu (4) a byl pro kruh odvozen Sierpińskim (1906). Později (1919) odvodil vztah (17) van der Corput Pfeifferovou reální metodou.

Co se odhadu zdola týče, docílil Landau (1924) odhadu

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}(k-1)}\right), \tag{18}$$

který je o něco slabší než výsledek Hardyho (6). Pro k-dimensionální kouli obdržel Szegö (1926)

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}(k-1)} \log^{\frac{1}{4}(k-1)} x\right); \tag{19}$$

v tom je obsažen pro kruh odhad rovnocenný formuli (6), jejž odvodil Hardy (1916). Metody, vedoucí k (19) a (18) náleží v podstatě také „sprinterskému" oboru.

Již r. 1912 užil Landau při vyšetřování čtyřdimensionální koule nové myšlenky, která tvoří přechod k pozdějšímu vyšetřování elipsoidického problému pomocí „vytrvaleckých" metod. Užil při tom známé Jacobiho věty o počtu všech vyjádření určitého čísla součtem čtyř kvadrátů a obdržel tak

$$P(x) = O(x^{1+\varepsilon}) \tag{20}$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Jak Landau později (1924) právem poukázal, vede jeho metoda dávající (20) také k ostřejšímu výsledku

$$P(x) = O(x \log x). \tag{21}$$

Jak (20) tak také (21) jsou přirozeně podstatně lepší než zbytek

$$O(x^{\frac{6}{5}})$$

získaný ze (17) pro $k = 4$. Snížení zbytkového exponentu obnáší „téměř" $\frac{1}{5}$. Spojením Landauovy metody s prostředky teorie diofantických aproximací (Weylova věta) zlepšil jsem (1927) ještě o něco málo odhad (21) na

$$P(x) = O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right). \tag{22}$$

Během posledních pěti let byl elipsoidický O-problém velmi intensivně vyšetřován, při čemž se především uplatnila proslulá Hardy-Ramanujan-Littlewoodova metoda z aditivní teorie čísel. Tato metoda dosáhla ovšem svého kulminačního bodu při jiném číselně teoretickém problému, který jedná o rozkladu čísel na součet mocnin (s týmž exponentem), na příklad na třetí neb čtvrté, o t. zv. Waringově problému. Při elipsoidech uplatní se primitivnějším způsobem.

Základní princip této metody — krátce řečeno — je následující (vzhledem k bližším jednotlivostem odkazuji na nahoře citované Landauovo dílo): Máme v jednotkovém kruhu konvergentní potenční řadu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{23}$$

která jednotkovou kružnici má za přirozenou hranici — to zn. nedá se přes ni analyticky pokračovat — a jedná se o vyšetřování koeficientů a_n s rostoucím n. Podle Cauchyho integrační formule je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \tag{24}$$

při čemž integrační dráhu — kružnici o středu v počátku a o poloměru $r < 1$ — probíháme kladně. Při tom učiníme, třeba volbou

$$r = 1 - \frac{1}{n}$$

r tak závislým na n, $r = r_n$, že s rostoucím n

$$r_n \to 1.$$

Následkem toho projevuje se vliv singularit funkce $f(z)$, vyplňujících jednotkovou kružnici, na integrační dráze $|z| = r_n$ s rostoucím n stále silněji. Tuto integrační dráhu rozdělíme pak pomocí t. zv. Fareyových zlomků (pomůcka, mající svůj základ v diofantických aproximacích) vhodně na oblouky. Na každém takovém Fareyově oblouku zanechává jistá vhodná singularita funkce $f(z)$, ležící na jednotkové kružnici, jistý „daktyloskopický otisk", při čemž přirozeně nikoli každá funkce $f(z)$ je tak laskava, aby se tímto způsobem projevovala. Tyto „otisky" poskytují ve svém celku aproximativní výraz pro a_n — Hardy a Littlewood nazývají jej singulární řadou, poněvadž má mnoho pozoruhodných vlastností.

Při elipsoidickém problému je vytvořující funkcí $f(z)$ specialisovaná k-násobná theta-funkce

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} z^{Q(n_1, n_2, \ldots, n_k)}, \tag{25}$$

kde Q je dáno vzorcem (14). Aby se ale taková řada dala psáti jako řada potenční, je nutno, aby forma Q měla celistvé koeficienty nebo aspoň aby její koeficienty byly racionální násobky jednoho a téhož reálného čísla — my budeme nazývati takové formy a příslušné elipsoidy racionálními.[7]) Při sbírání „otisků" používá se pak základních transformačních vlastností theta-funkcí.

[7]) Že pro formy s celočíselnými koeficienty — celočíselné formy — dá se výraz (25) převésti v potenční řadu (23), je na snadě; stačí shrnouti pro každé $n \geqq 0$ ty členy, pro které

$$Q(n_1, n_2, \ldots, n_k) = n.$$

A v obecném případě racionálního Q klademe

$$Q = c\,Q',$$

kde forma Q' má racionální koeficienty. Jestliže pak N je společný jmenovatel těchto koeficientů, tedy

Tímto způsobem odvodil Hardy (1918—1920) přibližnou formuli pro počet řešení $r_k(n)$ rovnice

$$n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2 = n \quad (k \geqq 5);$$

při tom se ukázalo — což šlo velmi těžce dokázati — že pro $5 \leqq k \leqq 8$ singulární řada $\mathfrak{S}_k(n)$ vyjadřuje přesně počet řešení $r_k(n)$:

$$r_k(n) = \mathfrak{S}_k(n) \qquad (5 \leqq k \leqq 8), \tag{26}$$

zatím co obecně pro $k \geqq 5$ je:

$$r_k(n) - \mathfrak{S}_k(n) = O(n^{\frac{1}{4}k}). \tag{27}$$

Jak jsem později (1924) dokázal, následuje ze vzorců (26) a (27) velmi rychle

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-1}) \tag{28}$$

pro $k \geqq 5$-dimensionální kouli. Zobecnění rovnice (27) na $k \geqq 5$-dimensionální celočíselné formy Q neposkytuje také žádných potíží, poskytuje však vzorec (28) jen pro $k \geqq 8$-dimensionální racionální elipsoidy.

Landau ukázal (1924), jak se můžeme pomocí jisté modifikace Hardyho metody obejíti bez vzorce (26) a obdržel tak (28) pro $k \geqq 5$-dimensionální, racionální elipsoidy. Současně obdržel Landau pro čtyřdimensionální, racionální Q

$$P(x) = O(x \log^2 x), \tag{29}$$

odhad to, který byl H. D. Kloostermanem (1925-27) zostřen na[8])

$$P(x) = O(x \log x). \tag{29a}$$

Rovněž pro racionální k-dimensionální elipsoidy dokázal Jarník (1925, uveřejněno v jednom Landauově pojednání) ele-

---

$$Q' = \frac{1}{N} Q'',$$

Q'' celočíselné, pak následuje

$$Q = \frac{c}{N} Q'',$$

a řada (25) je pak potenční řada v

$$z' = z^{\frac{c}{N}}.$$

Ostatně dá se takové převedení racionálních na celočíselné Q již z definice $A_Q(x)$ a z formule (16) pro elipsoidický objem snadno vyčísti.

[8]) V jedné ještě neuveřejněné práci jsem ukázal, že (22) platí také pro libovolné čtyřdimensionální racionální elipsoidy. Na místě Jacobiho formule vystupují komplikované Heckeovy věty z teorie eliptických modulových forem; vedle Weylovy věty ukazuje se nutné užíti jedné z Landauových „sprinterských" metod. Poukazuji zde pouze na velmi interesantní vyšetřování Heckova, a jeho družiny Kloostermana a Estermanna, abych se příliš od svého cíle nevzdálil. Dále nemohu nechati bez povšimmutí, že H. Petersson (1926) zesílením Hardyho metody docílil velmi pozoruhodných vět o elipsoidech.

mentárně

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}k-1}). \tag{30}$$

Tento odhad — také pro $k = 2$ a $k = 3$ platný, ale pak ne nový — dal podnět k velmi početným Ω-vyšetřováním (Landau, Müntz, Petersson, Jarník, Walfisz), o kterých se však blíže nebudu zmiňovati.

Zastavíme-li se na okamžik u dvojice formulí (28) — (30), zpozorujeme ihned, že v obou napravo vyskytuje se tatáž srovnávací funkce $x^{\frac{1}{2}k-1}$. Oba symboly O a Ω vstoupily spolu v harmonické manželství — což v teorii čísel je vzácný zjév — a jako ovoce tohoto manželství vzešlo úplné řešení O- a Ω-problému pro $k \geqq 5$-dimensionální, racionální elipsoidy. To bylo tím více překvapující, že v případu dvojrozměrném vypadá úplné splynutí tohoto času nejlepších odhadů (6) a (13), jak jsem se vším důrazem poukázal, beznadějně.

Při čtyřdimensionálních, racionálních elipsoidech je ještě mezi odhady (20), (21) a (22) s jedné strany a mezi odhadem (30) pro $k = 4$:

$$P(x) = \Omega(x) \tag{30a}$$

s druhé strany jistá mezera, která se však již nejeví ve zbytkovém exponentu, nýbrž jen v logaritmickém faktoru. (30a) dá se při čtyřdimensionální kouli, jak jsem (1927) rovněž s pomocí Jacobiho věty ukázal, ještě o něco málo zlepšiti:

$$P(x) = \Omega(x \log \log x). \tag{31}$$

Z (31) následuje, že ve čtyřrozměrnu odhad (28) nemůže platit (to nahlédneme právě tak, jak před tím nemožnost rovnice (9a) na základě vztahu (6)). Tím je především dokázáno, že čtyřdimensionální racionální elipsoidy chovají se jinak než vícedimensionální. To se projevuje analyticky v tom, že singulární řady v posledním případě ($k \geqq 5$) konvergují absolutně, v prvém případě ($k = 4$) pak nikoliv. Čtyřdimensionální problémy jsou aditivním metodám právě ještě přístupny — zatím co při dvoj- a trojrozměrných případech těmito metodami již nic nespravíme — způsobují však již mnoho potíží, které úplné řešení O- a Ω-problému činí v nejbližší budoucnosti nepravděpodobným.[9])

Jsme-li nyní s O- a Ω-problémem pro racionální elipsoidy

---

[9]) Domnívám se, že odhad (31) je definitivní, že tedy je také

$$P(x) = O(x \log \log x).$$

Této formuli odpovídal by v teorii Riemannovy zeta-funkce odhad

$$\xi(1 + ti) = O(\log \log t),$$

který až posud můžeme dokázati jen pomocí nedokázané slavné „Riemannovy hypotesy".

úplně ($k \geqq 5$) resp. „téměř" úplně ($k = 4$) hotovi, vzniká další otázka: Jak se chovají *iracionální* elipsoidy? Tím míním elipsoidy, jejichž Q nedá se psáti ve tvaru

$$Q = cQ', \quad Q' \text{ racionální},$$

kde tedy, jak budeme říkati, Q je iracionální. Zde existuje mezi Landauovými odhady (17) a (18) ještě veliká mezera. Poslední odhad zdál se ostatně vzhledem k (30) ještě schopný velkého zlepšení — ačkoliv se věří v jeho přesnost ve dvojrozměrnu — zatím co snížení zbytkového exponentu $\frac{1}{2}k - k/(k+1)$ v rovnici (17) na $\frac{1}{2}k - 1$ v rovnici (28) nebylo již tak velké.

Při iracionálních elipsoidech vypověděla nahoře načrtnutá metoda službu, neboť vytvořující funkce (25) není již potenční řadou (vrátím se k tomu ještě později). Můžeme si to obrazně tak představiti, že zavedením iracionalit ony „daktyloskopické otisky" se k nerozeznání rozplynou a celá singulární řada zmizí v propadlišti.

Následující pochod myšlenkový snaží se tuto potíž obejíti, ale neodstraní ji.

Buď forma (14) specialisována následujícím způsobem:

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = au_1^2 + Q_1(u_2, u_3, \ldots, u_k), \tag{32}$$

kde $a > 0$ je iracionální a Q_1 je celočíselná forma (nebo, což vede k témuž, forma mající racionální koeficienty). Na tuto formu Q_1 dá se užíti Hardyho metody a je jen nyní nutno příslušnou singulární řadu — ovšem opatrně jako dítě v peřince — sečíst podle k-té proměnné. To jsem (1927) provedl pomocí některých Weylových vět o rovnoměrném rozdělení z teorie diofantických aproximací a obdržel jsem tak pro iracionální formu Q tvaru (32) a pro $k \geqq 10$

$$P(x) = o(x^{\frac{1}{2}k-1}). \tag{33}$$

Zde vystupuje třetí ze známých odhadních symbolů, Landauův symbol o, který v právě uvedeném případě praví, že

$$\lim_{x=\infty} \frac{P(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}} = 0.$$

Z obou znamének o a Ω je tedy každé záporem druhého. (33) a (30) nejsou tedy současně možné, z čehož následuje, že iracionální elipsoidy — aspoň v některých případech — ukazují chování od racionálních odchylné.

Že se odhad (33) nedá zostřiti, pokud v (32) ke konkurenci jsou připuštěna *všechna* iracionální $a > 0$, dá se bez velkých potíží ukázati. Vzniká ale otázka, zda se pro *některá* iracionální a zbytkový exponent v (33) nedá snížiti nebo tento odhad vůbec jakkoliv zlepšiti. V tomto směru jsem ukázal, že pro „*téměř*" *všechna* $a > 0$

a $k \geqq 10$ je:

$$P(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}k - \frac{6}{5}} \log^{\frac{1}{4}} x\right). \tag{34}$$

Jako „téměř" všechna $\alpha > 0$ jsou zde označována všechna $\alpha > 0$ nejvýše s výjimkou jistého množství o Lebesgueově míře rovné nule. Při důkazu vzorce (34) bylo, vedle jisté asymptotické transformační formule theta-funkcí od Hardyho a Littlewooda, užito na rozhodujícím místě jisté van der Corputovy „sprinterské" metody toho druhu, jaká vedla ke (4). O tom, že (34) neposkytuje definitivního výsledku, nebylo tedy lze pochybovati. Přes to byl tím prvý krok vykonán.

Ačkoliv tedy odhady (33) a (34) přinesly jistý průhled do teorie mřížových bodů v iracionálních elipsoidech, bylo přece jen hned od začátku zřejmo, že myšlenkový pochod k nim vedoucí tvořil jen jakýsi orientační prostředek z nedostatku lepšího. Bylo tedy nutno hoditi singulární řadu přes palubu a nalézti něco docela jiného. Myslil jsem, že to ještě nějakou dobu potrvá. Tím více mě překvapily — a jistě ne mne samotného — objevy Jarníkovy. V řadě pojednání,[10]) jejichž publikace se datuje od středu minulého roku a které originalitou, hloubkou myšlenek a technickým provedením se čítají k nejpozoruhodnějším pracím moderního badání, ujal se Jarník s velmi vydatnými pomocnými prostředky problému a obdržel tak celou řadu výsledků překvapující přesnosti.

Také Jarník nevyšetřoval nejobecnější formu (14), nýbrž požadoval, aby v Q vystupovaly jen kvadratické členy:

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_k u_k^2; \tag{35}$$

při tom musí všechny koeficienty býti positivní, aby forma byla positivně definitní, jinak však neklade se na ně žádných omezení. Vidíte, že zde je docílen proti (32) značný pokrok, neboť předně nepředpokládáme žádná racionální jádra, jako byla v (32) forma Q_1 a za druhé jest zde tolik libovolných koeficientů, kolik činí dimense formy Q. Při některých vyšetřováních jeví se však účelným učiniti tyto koeficienty jistým způsobem na sobě závislými — tím získáme velmi zajímavé výsledky o stupňovitém zasahování jednotlivých iracionálních koeficientů. Singulární řada je nyní

[10]) *1.* „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Mathematische Annalen *100* (1928), S. 699—721, *2.* „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung", Mathematische Annalen *101* (1929), S. 136—146, *3.* „O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech", Rozpravy 2. třídy české akademie *37* (1928), Nr. 27, S. 1—19. *4.* „Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions", Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1928, S. 1—10. *5.* „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", The Tôhoku Mathematical Journal *30* (1929), S. 354—371. Tyto práce budeme krátce citovati *1*—*5*.

mrtva, objevuje se však jako duch a káže předpokládati $k \geqq 4$, při čemž krajní případ $k = 4$ též zde je zvláště nepříjemný.

Vytvořující funkce (25) má teď tvar, klademe-li $z = e^{-s}$, za Q pak výraz (35) a označíme-li funkci (25) samotnou $\Theta_Q(s)$:

$$\Theta_Q(s) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} e^{-(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + \dots + a_k n_k^2)s}. \tag{36}$$

Tato řada konverguje pro $|z| < 1$, to zn. pro $\Re(s) > 0$ absolutně; při tom označujeme znakem $\Re(s)$ reálnou část u komplexního čísla $s = u + it$. Buďte nyní

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots \tag{37}$$

všechny hodnoty, kterých nabývá forma (35) při celistvých hodnotách proměnných $u_1, \dots, u_k$, uspořádané podle velikosti (tedy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_n \to \infty$). Shrneme-li všechny členy ze (36), které náleží k témuž λ_n, obdržíme pro $\Theta_Q(s)$ vyjádření jednoduchou, pro $u > 0$ absolutně konvergentní řadou

$$\Theta_Q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}. \tag{36a}$$

Řady typu (36a) — nazývají se Dirichletovými — jsou od několika desítiletí předmětem zevrubného vyšetřování. Základní Perronova věta jejich teorie dovoluje z rovnice (36a) učiniti závěr, že pro každé pevné $u > 0$ a každé x, které se nerovná žádnému číslu posloupnosti (37), platí:

$$A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \Theta_Q(s) \frac{e^{xs}}{s}\, ds. \tag{38}$$

Při tom se integruje přes celou kolmou přímku $\Re(s) = u$, $-\infty < t < \infty$ zdola nahoru. (38) nastupuje teď na místo (24), jednotkový kruh $|z| \leqq 1$ přechází do půlroviny $u \geqq 0$, jeho hranice $|z| = 1$ v imaginární osu $u = 0$. Přes tuto osu nelze funkci $\Theta_Q(s)$ analyticky pokračovati. Aby nám singularity působily na integrační dráhu v (38) (nezůstavují již žádných „otisků", ale přes to působí), musíme přeložiti tuto dráhu — tentokráte v závislosti na x — do blízkosti imaginární osy. Proto klade Jarník $u = \frac{1}{x}$ a obdrží tak

$$A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \Theta_Q(s) \frac{e^{xs}}{s}\, ds. \tag{38a}$$

(38a) platí, jak bylo řečeno, pro taková x, která nesplývají se žádnou z hodnot (37). Jak Jarník ukázal, stačí se omeziti na taková x, jejichž vzdálenost od každého λ_n není příliš malá — totiž je nejméně $x^{-\frac{1}{2}k}$. Pro ona x dávají ony tři části integrálu z (38a), pro něž

$$t \geqq x^k, -\frac{A}{\sqrt{x}} \leqq t \leqq \frac{A}{\sqrt{x}}, t \leqq -x^k,$$

kde A je vhodná, na $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ závislá positivní konstanta, dohromady objem elipsoidu (16) — který převeden na levou stranu přeměňuje $A(x)$ v $P(x)$ — vedle zbytkového členu řádové velikosti $O(x^{\frac{1}{2}k})$ (pro pozdější účely budiž zde poznamenáno, že $I_Q(x)$ vzniká ze středního integrálu o konečné integrační dráze). Z obou zbývajících integrálů o integrační dráze

$$\frac{A}{\sqrt{x}} \leqq t \leqq x^k, \quad -x^k \leqq t \leqq -\frac{A}{\sqrt{x}} \tag{38b}$$

stačí s ohledem na symetrii vyšetřovati pouze prvý

$$P^*(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+ix^k} \Theta_Q(s) \frac{e^{xs}}{s} ds. \tag{39}$$

Toto převedení problému na studium funkce $P^*(x)$ není zvlášť komplikované a dá se provésti pro jakákoliv libovolná Q tvaru (14). Teprve při vyšetřování integrálu (39) počínají vlastní potíže.

Všimneme-li si, že v (36) dají se jednotlivé součty separovat, v důsledku čehož platí

$$\Theta_Q(s) = \Theta(\alpha_1 s)\, \Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_k s), \text{ kde } \Theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 s}, \tag{40}$$

pak jednoduchá úvaha poskytuje z (39) nerovnost

$$| P^*(x) | \leqq \sum_{m=1}^{k} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^k} \left| \frac{\Theta^k(\alpha_m s)}{s} \right| dt. \tag{41}$$

Každý na pravé straně nerovnosti (41) vystupující integrál obsahuje jen *jeden* koeficient α, odpovídá tedy jisté k-dimensionální kouli, neboť funkce

$$\Theta^k(\alpha s)$$

je přiřazena podle definice (40) kulové formě

$$Q = \alpha\,(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2).$$

V tom jest důvod toho, že můžeme vyšetřovati tyto integrály z podobných hledisek, která byla rozhodující pro racionální elipsoidy. Každá z k integračních drah se vhodným způsobem rozdělí užitím

Fareyových zlomků v intervaly — Fareyovy intervaly — a v každém takovém částečném intervalu odhadne se integrand užitím transformačních vlastností funkce $\Theta(s)$; ovšem nevystačíme zde již se základními transformacemi jako při důkazu (28), což především spočívá v tom, že délka integrační dráhy s rostoucím x roste do nekonečna. Singulární řada zde nevystupuje — o to pečuje jak okleštění nekonečné integrační dráhy v (38), tak také připojení znaménka absolutní hodnoty v integrované funkci.

Tímto způsobem dosáhl Jarník (*1*) pro formy (35) následujících odhadů

$$P(x) = O\,(x^{\frac{1}{2}k-1} \log x) \qquad (k \geqq 5), \tag{42}$$

$$P(x) = O\,(x \log^2 x) \qquad (k = 4). \tag{43}$$

(43) odpovídá přesně odhadu (29), zatím co (42) je o logaritmický faktor slabší než (28). Poněvadž také případ *racionálního* Q tvaru (35) jest připuštěn, vidíme na základě (30) a (30a), že sdělené Jarníkovy výsledky nejsou příliš schopny zlepšení, nýbrž jsou „téměř“ přesné.

Později podařilo se Jarníkovi (*3*—*4*), škrtnouti logaritmický faktor ve (42) a dokázati tudíž

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-1}) \qquad (k \geqq 5). \tag{44}$$

Odhad (44) odpovídá právě odhadu (28) a jest vzhledem k (30) nezlepšitelný. Tohoto zlepšení vzhledem k (42) docílí se jistou změnou výchozí formule (38).

Již ve „sprinterské“ teorii přišlo se na myšlenku, nevyšetřovati přímo funkci $G(x)$, nýbrž její integrál

$$\int_0^x G(v)\, dv;$$

jednoduchý, od Pfeiffera nejdříve užitý obrat dovolí pak, vrátiti se k funkci $G(x)$ samotné. V uvažovaném případě můžeme na základě (36a) a jistého zevšeobecnění Perronovy formule převésti tento integrál na tvar

$$\int_0^x A_Q(v)\, dv = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \Theta_Q(s) \frac{e^{xs}}{s^2}\, ds. \tag{45}$$

Toto vyjádření platí pro *všechna* $x > 0$ a je proti (38) absolutně konvergentní a následkem toho dá se početně snadněji zvládnouti.

Na základě (45) probíhá nyní důkaz vzorce (44) analogicky jako před tím důkaz vzorce (42). Také v (45) ukazují se oba částečné integrály z (38b) býti rozhodujícími (při čemž teď ale není nutné žádné omezení hodnot x), a konstanty α v (35) se opětně na základě (40) a na základě nerovniny analogické k (41) separují.

Odhady (42) až (44) tvoří velmi vítané doplňky k (28) a (29), nevyjadřují ale žádné charakteristické vlastnosti iracionálních elipsoidů, neboť, jak bylo řečeno, je připuštěn případ *racionálního* Q. Další krok učiníme, předpokládáme-li formy Q libovolně *iracionální*. Poněvadž tento případ zahrnuje formy (32) s příslušně specialisovaným Q_1, smíme očekávati, že zde platí odhad (33). To ve skutečnosti Jarník (2) pro $k \geqq 6$ dokázal.

Při důkazu položil za základ integrál (45) s $u = \frac{1}{x}$ a převedl jeho vyšetřování na částečný integrál pro

$$t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}}.$$

Tentokráte probíhají ale vyšetřování o něco zdlouhavěji, neboť úplná separace α podle vzoru (41) byla by setřela charakter iracionality. Ukazuje se tedy nutnost rozděliti Fareyovy intervaly na dvě třídy. Na jeděch odhadne se theta-součin (40) analogicky jako při úvaze, vedoucí k nerovnosti (41):

$$| \Theta_Q(s) | \leqq \sum_{m=1}^{k} | \Theta^k (\alpha_m s) |, \tag{46}$$

zatím co na ostatní užije se tohoto odhadu jen na k—1 faktorů a k-tý vyšetřuje se samostatně, tedy ku př.

$$| \Theta_Q(s) | \leqq | \Theta(\alpha_1 s) | \sum_{m=2}^{k} | \Theta^{k-1} (\alpha_m s)|.^{11)} \tag{46a}$$

Rozdělení na třídy vedoucí ke dvojici (46), (46a) vychází z velmi jednoduché myšlenky Jarníkovy, která v základě spočívá v tom, že posloupnost zlomků $\frac{p_n}{q_n}$ $(p_n > 0,\ q_n > 0;\ n = 1, 2, \ldots)$ jen tenkráte konverguje k positivní iracionalitě (zde tedy k jednomu z k—1 poměrů koeficientů $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_k}{\alpha_1}$), když

---

[11]) Napravo zde vystupující mocniny funkce Θ odpovídají (k — 1)-dimensionálním koulím; pro $k = 5$ byly by tyto čtyřdimensionální a v dalším počtu vystupující logaritmický faktor by vše pokazil. Avšak již nepatrná modifikace vzorce (46a), totiž

$$|\Theta_Q (s) | \leqq | \Theta(a_1 s) |^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{k} |\Theta^{k-\frac{1}{2}}(a_m s)|,$$

kde vpravo pro $k = 5$ vystupují „$4\frac{1}{2}$-dimensionální koule“, dovoluje dosáhnouti cíle (33) také pro $k = 5$. Dá se dále ukázati, že (33) neplatí pro $k = 4$, což se jeví plausibilním na základě (31). Srovnej k tomu: V. Jarník a A. Walfisz „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“ — vyjde co nejdříve v Mathematische Zeitschrift.

$p_n \to \infty$, $q_n \to \infty$. Přiměřeným užitím této myšlenky obešel Jarník Weylovy pomocné prostředky, kterých bylo užito k důkazům vzorce (33) pro formy (32).

Dá se lehce ukázati, že Jarníkův odhad (33) pro formy (35) je definitivní, jestliže připustíme *všechny* koeficienty α s iracionálním Q. Abychom tedy dosáhli dalších, ostřejších výsledků, jsme nuceni — jako při důkazu vztahu (34) — tyto koeficienty omeziti. Při tom je opětně účelné, nejdříve hledati věty, vztahující se k „*téměř všem*" systémům koeficientů. Zevšeobecňujíce definici vystupující při (34) budeme nyní říkati, že *téměř všechny* systémy hodnot $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ r positivních čísel mají jistou vlastnost, když tuto vlastnost mají všechny takové systémy hodnot až na množství o Lebesgueově míře nulové v r-dimensionálním prostoru bodů $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$.

Aby v tomto směru pokročil, omezil dále Jarník (*1*) formy (35) předpokladem, že k koeficientů α_m rozpadá se v nejméně dvě serie, každá o nejméně čtyřech stejných koeficientech. Forma Q vypadá nyní tedy následovně:

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \beta_1 (u_{1,1}^2 + \ldots + u_{r_1,1}^2) + \beta_2 (u_{1,2}^2 + \ldots + u_{r_2,2})^2 + \\ + \ldots + \beta_\sigma (u_{1,\sigma}^2 + \ldots + u_{r_\sigma,\sigma}^2), \text{ kde} \qquad (47)$$
$$\sigma \geqq 2; \ \beta_m > 0, \ r_m \geqq 4 \ (m = 1, 2, \ldots, \sigma); \ r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma = k$$

a je nejméně osmidimensionální.

Cílem naším nyní je (*1*): při formách (47) s hořejšími vedlejšími podmínkami platí

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-\sigma+\varepsilon}) \qquad (48)$$

pro každé pevné $\varepsilon > 0$ a téměř všechna $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$.

Důkaz vztahu (48) sotva si zadá co do těžkosti s důkazem formule (13), třebaže spočívá na docela jiných základech a je podstatně kratší. Východiskem je opětně (39). Separace α-koeficientů v (35) je možná jen na základě jejich shrnutí v β-serie, zatím co β-serie již musíme podržeti všechny pohromadě. Aby to umožnil, dokázal Jarník hluboce založenou větu z metrické teorie diofantických aproximací (k čemuž mu asi dala podnět vyšetřování ruského badatele Chinčina), kterou položil za východisko neobyčejně komplikovaného roztřídění Fareyových intervalů.

Jak ostrá je rovnice (48), vidíme ihned, když předpokládáme, že k je dělitelno 4 a že vystupuje zde $\sigma = \frac{1}{4}k$ β-serií, každá po čtyřech stejných členech. Pak praví (48):

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{4}k+\varepsilon}). \qquad (49)$$

Můžeme ale, jak Jarník (*1*) ukázal, z (48) na několika řádcích odvoditi jednoduchým způsobem, že (49) je splněna pro *téměř* *všechny* formy (35) pro $k \geqq 4$ (pro $k = 4$ je ovšem (49) překonána rovnicí (43)).

Pokrok proti (28) obnáší „téměř" $\frac{1}{4}k - 1$. Že by bylo možné takové zostření, nebyl by jistě nikdo očekával. Odhad (49) ukazuje jasně, jaké výjimečné postavení mají racionální elipsoidy — kterých je ovšem jen spočetně mnoho typů. Zároveň tvoří krásnou rehabilitaci Landauovy Ω-formule (18).

Je možno, že již příští léta přinesou nám úplné nebo téměř úplné řešení tohoto O- a Ω- problému. Není ovšem také vyloučeno, že po velikolepém běhu Jarníkově dospělo se k nepřekonatelnému „sprinterskému finishi". Rovnice (18) je vzhledem k (19) jistě nesprávna, nahradíme-li tam Ω symbolem O. Je však zcela dobře myslitelno, že pro téměř všechny formy (35) a pro každé pevné $\varepsilon > 0$ platí:

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{4}(k-1)+\varepsilon}).$$

To by bylo pak právě zevšeobecnění odhadu (10).

Pro formy (47) je však odhad (48), jak Jarník (*1*) ukázal, téměř definitivní, neboť platí pro *všechny* ony formy

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}k-\sigma}), \tag{50}$$

pro *téměř všechny* pak

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}k-\sigma} \log^{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} x). \tag{51}$$

Důkaz vzorce (50) spočívá na docela jednoduchých myšlenkových pochodech, zatím co důkaz vzorce (51) užívá také ne příliš komplikované Chinčinovy věty z metrické teorie diofantických aproximací.

Zmíním se ještě, že Jarník (*3—4*) vyšetřil také formy (47), bez vedlejší podmínky $r_m \geqq 4$ vhodnou obměnou své metody. Budiž

$$\lambda_m = \tfrac{1}{4}r_m \text{ pro } r_m = 1 \text{ neb } 2 \text{ neb } 3; \quad \lambda_m = 1 \text{ pro } r_m \geqq 4; \tag{52}$$
$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\sigma.$$

Pak zní odhad odpovídající odhadu (48):

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-\lambda+\varepsilon}). \tag{53}$$

V něm je obsažena (48) jako speciální případ. Neboť jestliže stále $r_m \geqq 4$, je podle (52) stále $\lambda_m = 1$, tedy $\lambda = \sigma$. Volíme-li dále

$$\sigma = 2,\ r_1 = 1,\ r_2 = k - 1,\ k \geqq 5,$$

následuje z (52)

$$\lambda = \tfrac{1}{4} + 1 = \tfrac{5}{4}$$

a (53) poskytuje

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-\frac{5}{4}+\varepsilon}) \tag{54}$$

pro formy Q tvaru :

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \beta_1 u_1^2 + \beta_2 (u_2^2 + \ldots + u_k^2),$$

čili, což znamená totéž, pro formy

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = au_1^2 + (u_2^2 + \ldots + u_k^2).$$

Při tom odpovídají „téměř všem" systémům (β_1, β_2) „téměř všechny" hodnoty a. (54) podává tedy zostření vztahu (34), když Q_1 je kulová forma.

Speciální případ $\sigma = 2$ ze (48) a (51) praví: buď

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \beta_1 (u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \beta_2 (u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_{r_1+r_2}^2), \quad (47a)$$

$$\beta_1 > 0, \ \beta_2 > 0, \ r_1 \geqq 4, \ r_2 \geqq 4, \ r_1 + r_2 = k;$$

pak je pro *téměř všechny* systémy (β_1, β_2) a pro každé pevné $\varepsilon > 0$

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-2+\varepsilon}), \quad (48a)$$

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}k-2} \log^{\frac{1}{3}} x); \quad (51a)$$

dále je podle (44) a (50) pro formy (47a) pro *všechny* systémy (β_1, β_2)

$$P(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-1}), \quad (44a)$$

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}k-2}). \quad (50a)$$

Můžeme uvažovati tyto výsledky s následujícího hlediska. Z definice O- a Ω- symbolů následuje, že pro pevné Q dvojice odhadů

$$P(x) = O(x^u), \quad P(x) = \Omega(x^v) \quad (55)$$

má za následek jednak nerovnost $u \geqq v$, jednak vztahy

$$P(x) = O(x^{u'}), \quad P(x) = \Omega(x^{v'})$$

pro všechna u', v', pro která $u' > u$, $v' < v$. Z toho vyplývá, že čísla u a v, která hoví (55), tvoří Dedekindův řez, kterému odpovídá jisté číslo $\mu = \mu(Q)$. Pro toto μ — nazýváme je pravým zbytkovým exponentem — je splněno současně

$$P(x) = O(x^{\mu+\varepsilon}), \quad P(x) = \Omega(x^{\mu-\varepsilon}) \quad (56)$$

pro každé pevné $\varepsilon > 0$. U forem (47a) je podle (44a) a (50a) $\frac{1}{2}k-1$ číslo třídy u, $\frac{1}{2}k - 2$ číslo třídy v. Pravý zbytkový exponent hoví tedy nerovnině

$$\tfrac{1}{2}k - 2 \leqq \mu \leqq \tfrac{1}{2}k - 1. \quad (57)$$

Pro téměř všechny formy (47a) je dále podle (48a) a (51a)

$$\mu = \tfrac{1}{2}k - 2. \quad (57a)$$

Jarníkovi (5) se nyní zdařilo množství dvojic (β_1, β_2) vyloučené z (48a) a (51a) (jehož míra rovná se nule) rozděliti ve vhodné třídy (částečné množiny) pomocí velmi jednoduchého kriteria a pro každou z těchto tříd udati pravý zbytkový exponent μ, při čemž každé μ, hovící nerovnině (57), se skutečně může vyskytnouti.

Rozdělovací princip vzniklý z teorie diofantických aproximací je následující: buď $\beta > 0$. Vyšetřujme množinu M_γ všech reálných čísel γ, pro která existuje posloupnost dvojic positivních celých čísel $p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3; \ldots$, pro něž:

$$p_n \to \infty,\ q_n \to \infty,\ \frac{p_n}{q_n} - \beta = O\left(\frac{1}{q_n^{2+\gamma}}\right). \tag{58}$$

Horní hranici množiny M_γ označme $\nu(\beta)$ a nazývejme ji pravým exponentem čísla β.

Z teorie diofantických aproximací je známo, že pro žádné β číslo $\nu(\beta)$ není negativní, pro téměř všechna β pak

$$\nu(\beta) = 0.$$

Všem positivním ν odpovídá tedy množství čísel β míry nulové. Pro racionální β je, jak snadno nahlédneme,

$$\nu(\beta) = \infty; \tag{59}$$

neboť pro $\beta = p/q$ je splněna (58) pro $p_n = np$, $q_n = nq$ pro každé $\gamma > 0$; obráceně ovšem nepotřebuje býti číslo β, pro které platí (59), racionální. Dále je podle (58) jasno, že

$$\nu(\beta) = \nu\left(\frac{1}{\beta}\right). \tag{60}$$

Pro každé γ, vyhovující vztahu (58), je totiž také $\frac{1}{\beta}\,\frac{q_n}{p_n}$ ohraničeno, tedy

$$\frac{1}{\beta} - \frac{q_n}{p_n} = \frac{1}{\beta}\,\frac{q_n}{p_n}\left(\frac{p_n}{q_n} - \beta\right) = O\left(\frac{1}{q_n^{2+\gamma}}\right).$$

Buď nyní Q forma (47a), $\beta = \beta_2/\beta_1$. Pak platí podle Jarníka pro pravý zbytkový exponent definovaný pomocí (56)

$$\mu = \tfrac{1}{2}k - 1 - \frac{1}{\nu + 1} \quad (\nu < \infty), \tag{61}$$

$$\mu = \tfrac{1}{2}k - 1 \quad (\nu = \infty). \tag{62}$$

K témuž výsledku dojdeme vzhledem k (60) volbou $\beta = \beta_1/\beta_2$, nesymetričnost je tedy jen zdánlivá. Pro $\nu = 0$ splývá (61) s (57a), pro racionální Q jest odhad (62) vzhledem k (59) obsažen v (28) a (30). Ve všech ostatních případech jsou odhady (61) a (62) nové. Že se skutečně může vyskytnouti každá hodnota μ v intervalu (57), je na základě definice čísla ν zřejmé.

Při důkaze vzorců (61) a (62) vyšel Jarník z (45), při čemž se i tentokráte ukázal podstatným částečný integrál pro

$$t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}}.$$

K vyšetření posledního užil Jarník jisté věty z teorie diofantických aproximací, která je podobná větě užité při (48), ale zde se dá lehčeji dokázati (hlavně proto, že se zde jedná o jednodimensionální množství β, zatím co případ $\sigma > 2$ vede na analogické množiny vícedimensionální). Této větě odpovídající roztřídění Fareyových intervalů je však stejně komplikované jako roztřídění užité při (48), od kterého se jen nepodstatně liší.

Proti „sprinterské teorii", která dostoupila jistého klidového stadia (i když vedle O- a Ω- problémů jiné rozličné otázky s úspěchem byly vyšetřovány), jsou elipsoidická vyšetřování, jak právě nejnovější výsledky přesvědčivě ukazují, v čilém proudu a můžeme doufati, že ještě mnohý zajímavý výsledek v nejbližších letech se vynoří. Ovšem i zde projeví se časem jistá stagnace, jakmile bude „smetana sebrána". Prozatím otvírá se však každému, kdo k tomuto oboru přistupuje, vděčné pole činnosti.