Počet členů determinantu, neobsahujících určité prvky.

Dr. Jaroslav Jarušek.

V článku stejného názvu v předešlém ročníku tohoto časopisu (str. 333—342) odvodil p. Knichal součtový vzorec pro počet členů v rozvedeném determinantu stupně n, jež neobsahují žádný z určitých prvků. Tyto vyloučené prvky jsou obsaženy, je-li $n = \varrho\mu + \alpha$, $0 \leqq \alpha < \mu$, v ϱ skupinách po μ^2 prvků, v nichž se protíná vždy μ různých řádků a μ sloupců a v jedné skupině o α^2 prvcích, v nichž se protíná zbývajících α řádků a α sloupců. Takové součtové vzorce jsou zajímavé, ale nehodí se pro skutečný výpočet.[1] V následujícím odvodíme zcela jednoduchý vzorec pro případ daleko obecnější. Podáme nejprve známé odvození,[2] nepatrně upravené, pro počet členů determinantu, jež neobsahují žádný z prvků hlavní diagonály. Odvození bude trochu obšírnější, než jinak by bylo třeba, ale dostaneme z něho pak přímo obecný případ.

Mějme determinant stupně n

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Subdeterminant příslušný součinu $a_{ii} a_{jj} \dots a_{kk}$ označme $D_{ij\dots k}$. Hledejme členy, jež neobsahují žádný prvek hlavní diagonály. Od D odečteme každý diagonální prvek, násobený jeho subdeterminantem, to jest výraz

$$a_{11} D_1 + a_{22} D_2 + \dots + a_{nn} D_n.$$

V tomto výrazu všechny členy determinantu, obsahující jen jeden diagonální prvek, se vyskytují jedenkrát, ale součiny obsahující více diagonálných prvků jsou tu vícekráte. Součiny, obsahující dva a ne více diagonálných členů, jsou tu dvakráte. Proto každý takový člen musíme jednou přičísti. Přidáme výraz

$$a_{11} a_{22} D_{12} + a_{11} a_{33} D_{13} + \dots + a_{n-1, n-1} a_{nn} D_{n-1, n}.$$

---

[1]) Pozn. red. Budiž upozorněno, že cílem práce p. Knichala bylo právě skutečné explicitní vyjádření počtu členů determinantu, o něž běželo.

[2]) Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten, p. 29.

Ve výrazech dosud vypsaných jsou součiny, které obsahují tři prvky z hlavní diagonály, obsaženy každý v počtu $1-\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=1$. Odečteme tedy výraz

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,D_{123}+a_{11}\,a_{22}\,a_{44}\,D_{124}+\ldots$$

Tak vidíme, že všechny členy determinantu D, které neobsahují žádný prvek hlavní diagonály, jsou dány výrazem

$$D-(a_{11}D_1+a_{22}D_2+\ldots+a_{nn}D_n)+(a_{11}a_{22}D_{12}+a_{11}a_{33}D_{13}+\ldots$$
$$+a_{n-1,\,n-1}\,a_{nn}D_{n-1,\,n})-(a_{11}a_{22}a_{33}D_{123}+a_{11}a_{22}a_{44}D_{124}+\ldots)+\ldots \quad (1)$$

Všechny členy jsou tu vzaty se správným znaménkem, poněvadž každý minor příslušný k libovolnému součinu diagonálných prvků $a_{ii}a_{jj}\ldots a_{kk}$ rovná se příslušnému subdeterminantu $D_{ij\ldots k}$ se znaménkem kladným.

Pro počet uvažovaných členů dostáváme z (1)

$$n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=$$
$$=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots\pm\frac{1}{n!}\right). \quad (2)$$

Vzorec stejného tvaru jako (1) platí ale také v každém zcela obecném případě, kdy máme najíti členy determinantu D, jež neobsahují žádný prvek z libovolně dané skupiny prvků. Tuto skupinu označme A. V tomto případě ve výrazu

$$a_{11}D_1+a_{22}D_2+\ldots+a_{nn}D_n$$

místo prvků $a_{11}, a_{22},\ldots a_{nn}$ vezmeme všechny prvky skupiny A. Místo výrazu $a_{11}a_{22}D_{12}+a_{11}a_{33}D_{13}+\ldots$ vezmeme součiny po dvou prvcích z A, znásobené příslušnými subdeterminanty, ale jen takové součiny, které mohou býti obsaženy v nějakém členu determinantním v D, tedy ne z jednoho řádku nebo z jednoho sloupce. Podobně dále. Správnost toho je patrna z postupu při odvozování (1). Ke každému součinu musíme přidati ještě znaménko takové, jaké mu přísluší v determinantu D (místo subdeterminantů bereme minory). Jedná-li se pouze o počet těchto členů, nezáleží na oněch znaménkách. Podle takto upraveného vzorce (1) v každém speciálním případě najdeme počet hledaných členů.

Jednoduchý výsledek dostaneme, když vylučované prvky tvoří čtvercové skupiny (když po případě řádky a sloupce v D napřed vhodně přestavíme). Při tom žádné dvě čtvercové skupiny nemají společné řádky nebo sloupce. Sem spadá také případ p. Knichalem uvažovaný. Tvoří-li v determinantu D prvky, jež mají býti vyloučeny, čtverce z $i, j, k,\ldots, l$ řádků a sloupců, označme jej $D_{ijk\ldots l}$. (Nyní indexy při D mají jiný význam než na počátku.) Při tom mohou býti v tomto determinantu řádky a sloupce, jež neobsahují žádný vylučovaný prvek. Jest tedy $i+j+k+\ldots+l\leq n$. Na př.

$$D_{321}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . \\ . & . & . & a_{44} & a_{45} & . \\ . & . & . & a_{54} & a_{55} & . \\ . & . & . & . & . & a_{66} \end{vmatrix}.$$

V něm jsou vypsány pouze prvky, jež máme vyloučiti. Čtvercové skupiny vylučovaných prvků označme $A_1, A_2, \ldots\ldots$ Podle (1) od D ubereme nejprve každý prvek ze skupiny A, násobený příslušným subdeterminantem. Rozvedený tento výraz obsahuje $(i^2+j^2+ +\ldots+l^2).(n-1)!$ členů. Pak vybíráme po dvou prvcích ze skupin $A_1, A_2, A_3, \ldots$ a násobíme příslušnými subdeterminanty. Ty dva prvky můžeme bráti buď z téže skupiny nebo po jednom ze dvou různých skupin. Z 1. skupiny A_1 o i^2 členech můžeme vybrati dva prvky, tak aby neležely v témž řádku nebo v témž sloupci, celkem $\frac{i^2(i-1)^2}{2!}$ způsoby. Můžeme totiž každý z i^2 prvků spojiti s každým prvkem příslušného subdeterminantu v A_1, při čemž každý ten součin dostaneme dvakrát. Bereme-li po jednom prvku z první a ze druhé skupiny, dostaneme $\frac{i^2}{1!}\cdot\frac{j^2}{1!}$ členů. Celkem tedy výrazu $a_{11}a_{22}D_{12}+a_{11}a_{33}D_{13}+\ldots$ v (1) odpovídá

$$\left[\frac{i^2(i-1)^2}{2!}+\frac{j^2(j-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{i^2}{1!}\frac{j^2}{1!}+\frac{i^2}{1!}\frac{k^2}{1!}+\ldots\right](n-2)!$$

členů. Dále bereme po třech prvcích ze souhrnu A a násobíme příslušnými subdeterminanty. Tři prvky ze skupiny A_1 můžeme vzíti $\frac{i^2(i-1)^2(i-2)^2}{3!}$ způsoby, dva prvky z A_1 a jeden z A_2 můžeme vzíti $\frac{i^2(i-1)^2}{2!}\cdot\frac{j^2}{1!}$ způsoby a po jednom prvku z A_1, A_2, A_3 můžeme vzíti $\frac{i^2}{1!}\cdot\frac{j^2}{1!}\cdot\frac{k^2}{1!}$ způsoby.

Odtud je již viděti i další postup. Hledaný počet členů jest

$$\begin{aligned} P_{ijk\ldots l}=n!-\left[\frac{i^2}{1!}+\frac{j^2}{1!}+\ldots\right](n-1)!+\left[\frac{i^2(i-1)^2}{2!}+\frac{j^2(j-1)^2}{2!}+\ldots\right. \\ \left.+\frac{i^2}{1!}\frac{j^2}{1!}+\frac{i^2}{1!}\frac{k^2}{1!}+\ldots\right](n-2)!-\left[\frac{i^2(i-1)^2(i-2)^2}{3!}+\right. \\ +\frac{j^2(j-1)^2(j-2)^2}{3!}+\ldots+\frac{i^2(i-1)^2}{2!}\frac{j^2}{1!}+\frac{i^2(i-1)^2}{2!}\frac{k^2}{1!}+\ldots+ \\ \left.+\frac{i^2}{1!}\frac{j^2}{1!}\frac{k^2}{1!}+\ldots\right](n-3)!+\ldots \qquad (3) \end{aligned}$$

Tomuto vzorci můžeme dáti jiný tvar. Dělme jej součinem $i!\, j!\, k! \ldots l!$ Pak bude na př.

$$\frac{i^2(i-1)^2(i-2)^2}{3!} \cdot \frac{(n-3)!}{i!\, j! \ldots l!} = \binom{i}{3} \cdot \frac{(n-3)!}{(i-3)!\, j! \ldots l!},$$

$$\frac{i^2(i-1)^2}{2!} \frac{j^2}{1!} \cdot \frac{(n-3)!}{i!\, j! \ldots l!} = \binom{i}{2}\binom{j}{1} \cdot \frac{(n-3)!}{(i-2)!\,(j-1)!\, k! \ldots l!}.$$

Pak $P_{ijk\ldots l}$ bude se rovnati součinu z $i!\, j!\, k! \ldots l!$ a výrazu

$$\frac{n!}{i!\, j! \ldots l!} - \left[\binom{i}{j}\frac{(n-1)!}{(i-1)!\, j! \ldots l!} + \binom{j}{1}\frac{(n-1)!}{i!\,(j-1)! \ldots l!} + \ldots\right] +$$
$$+ \left[\binom{i}{2}\frac{(n-2)!}{(i-2)!\, j! \ldots l!} + \binom{i}{1}\binom{j}{1}\frac{(n-2)!}{(i-1)!\,(j-1)!\, k! \ldots l!} + \ldots\right] -$$
$$- \left[\binom{i}{3}\frac{(n-3)!}{(i-3)!\, j! \ldots l!} + \ldots + \binom{i}{2}\binom{j}{1}\frac{(n-3)!}{(i-2)!\,(j-1)! \ldots l!} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \binom{i}{1}\binom{j}{1}\binom{k}{1}\frac{(n-3)!}{(i-1)!\,(j-1)!\,(k-1)! \ldots l!} + \ldots\right] + \ldots \qquad (4)$$

Všechny zlomky v tomto výrazu, jako na př. $\frac{(n-3)!}{(i-2)!(j-1)! \ldots l!}$, jsou celá čísla, poněvadž udávají počet jistých permutací s opakováním. Jest tedy výraz (4) celé číslo a $P_{ijk\ldots l}$ jest vždy dělitelno součinem $i!\, j! \ldots l!$

Pro sestavení výrazu (4) mohli bychom si na př. stanoviti následující pravidlo: Vybíráme součiny vylučovaných prvků jen z hlavní diagonály. Je-li subdeterminant z D příslušný k takovému součinu stupně r tvaru $D_{i'j'\ldots l'}$, vezmeme tento součin $\frac{(n-r)!}{i'!\, j'! \ldots l'!}$-krát. Toto číslo udává, kolik členů má rozvoj determinantu $D_{i'j'\ldots l'}$ v součiny determinantů stupňů $i', j', \ldots, l'$, při čemž tyto determinanty tvořeny vždy z týchž řádků (determinanty stupně i' z prvních i' řádků, determinanty stupně j' vždy z následujících j' řádků atd.). Na př. dva prvky z první skupiny a jeden prvek ze druhé skupiny můžeme vybrati $\binom{i}{2}\binom{j}{1}$ způsoby. Každý ten součin má subdeterminant tvaru $D_{i-2,j-1,k\ldots l}$ a bude tedy vzhledem k těmto součinům ve (4) výraz $\binom{i}{2}\binom{j}{1}\frac{(n-3)!}{(i-2)!\,(j-1)! \ldots k!}$.

Na př. pro determinant D_{321} výše vypsaný je výraz (4)

$$\frac{6!}{3!\,2!} - \left(3 \cdot \frac{5!}{2!\,2!} + 2 \cdot \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!\,2!}\right) + \left(9 \cdot \frac{4!}{2!} + 3 \cdot \frac{4!}{3!} + 3 \cdot \frac{4!}{2!\,2!}\right) -$$
$$- \left(\frac{3!}{3!} + 13 \cdot \frac{3!}{2!} + 6 \cdot 3!\right) + \left(4 \cdot \frac{2!}{2!} + 11 \cdot 2!\right) - 6 + 1 = 3.$$

Jest tedy

$$P_{321} = 3!\,2!\,1!\,.\,3 = 36.$$

Zde a zrovna tak v mnohých jiných případech dostaneme $P_{ij\dots l}$ mnohem jednodušeji přímo. Členy bez vypsaných prvků může dávati pouze jeden součin dvou determinantů třetího stupně a jest tedy $P_{321} = 6\,.\,6 = 36$.

Tak jako jsme odvozovali výrazy (3) a (4), mohli bychom odvozovati P ještě v jiných případech, na př., když vylučované prvky tvoří skupiny obdélníkové. Tvoří-li tyto skupiny obdélníky o svislých stranách s i', j', ..., l' prvky a o vodorovných stranách s i'', j'', ... l'' prvky, pak ve vzorci (3) místo čísel i^2, $i^2(i-1)^2$, $i^2(i-1)^2(i-2)^2$, ... bude $i'i''$, $i'(i'-1)\,.\,i''(i''-1)$, $i'(i'-1)(i'-2)\,.\,i''(i''-1)(i''-2)$, ... Ve výrazu (4) můžeme pak vytknouti různé součiny, na př. $i'!\,j'!\dots l'!$ nebo $i'!\,j''!\dots l'!$ atd. Můžeme třebas vzíti součin faktoriel všech větších čísel ze dvojic i', i''; j', j''; .... Dělíme-li na př. součinem $i'!\,j'!\dots l'!$, upravujeme výrazy ze (3) podle vzoru

$$\frac{i'(i'-1)\,i''(i''-1)}{2!}\,\frac{j'j''}{1!}\cdot\frac{(n-3)!}{i'!\,j'!\dots l'!} = \binom{i''}{2}\binom{j''}{1}\cdot\frac{(n-3)!}{(i'-2)!\,(j'-1)!\dots l!}.$$

Také místo determinantu D mohli bychom vzíti matici obdélníkovou.

*

Le nombre de termes d'un déterminant qui ne contiennent pas certains éléments donnés.

(Extrait de l'article précédent.)

Choisissons, dans un déterminant D, un groupe arbitraire A d'éléments. La somme de termes du déterminant D qui ne contiennent aucun élément du groupe A est donnée par la formule

$$D - (aD_a + bD_b + \cdots) + (abD_{ab} + acD_{ac} + \cdots) - (abcD_{abc} + \cdots),$$

où $a, b, c, \dots$ sont les éléments du groupe A, $D_{abc\dots}$ désigne le mineur, affecté du signe convenable, par lequel est multiplié, dans le développement du déterminant, le produit $abc\dots$ On prend pour $abc\dots$ tous les produits possibles des éléments de A, formés de manière que chaque produit ne contienne qu'un élément de la même ligne et de la même colonne.

L'expression ci-dessus fournit directement le nombre P des termes du déterminant D ne contenant aucun élément de A. Si, p. ex., le groupe A se compose de plusieurs matrices carrées ayant respectivement $i, j, k, \dots, l$ lignes, deux quelconques de ces matrices n'ayant jamais de lignes ou de colonnes comunnes,[1]) P est donné par l'expression (4), multipliée par $i!\, j!\, k! \ldots l!$. L'expression (4) est, en tout cas, un nombre entier.

Si l'on prend, au lieu de matrices carrées, des matrices rectangulaires ayant, respectivement, $i', j', k', \ldots$ lignes et $i'', j'', k'', \ldots$ colonnes, il faut remplacer, dans (3) les carrés i^2, $i^2 (i-1)^2, \ldots$ par $i', i'', i'(i'-1)\, i''(i''-1), \ldots$

On obtiendrait, facilement, de formules semblables encore dans plusieurs autres cas.

---

[1]) C'est d'un cas spécial de ce genre que s'est occupé M. Knichal (v. ce Journal, t. LV, p. 333—342).