Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jiří Klapka

O kubických systémech kuželoseček se společnou normálou

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 3, 175--192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109051

O kubických systémech kuželoseček se společnou normálou.

Napsal *Jiří Klapka*.

I.

Tážeme-li se po kuželosečkách svazku či duálního svazku (řady), pro něž daná přímka n jest normálou, jsme vedeni k větám:

Je-li O_n orthocentrum a O'_n bod s O_n konjugovaný vzhledem k svazku, poláry bodu O_n vzhledem ke kuželosečkám svazku tvoří (obecně) paprskový svazek o středu O'_n, jehož paprsky protínají n v bodové řadě projektivní s Desargues-ovou involucí, svazkem na n vyťatou. 3 samodružné elementy této korespondence [1,2] jsou ony body, jimiž procházejí hledané kuželosečky a to tak, že jejich tečny v těchto bodech jsou incidentní s O_n.

Je-li n' přímka s n konjugovaná vzhledem k duál. svazku, pak póly přímky n vzhledem k jeho kuželosečkám tvoří (obecně) bodovou řadu na n', promítající se z O_n v paprskový svazek projektivní s involucí tečen, jež lze vésti z O_n ke kuželosečkám duálního svazku. 3 samodružné elementy této korespondence [1, 2] jsou ony přímky, jichž se hledané kuželosečky dotýkají a to v bodech ležících na n.

Proto: *Ve svazku (duálním svazku) obecně existují 3 kuželosečky, pro něž daná přímka jest normálou.*

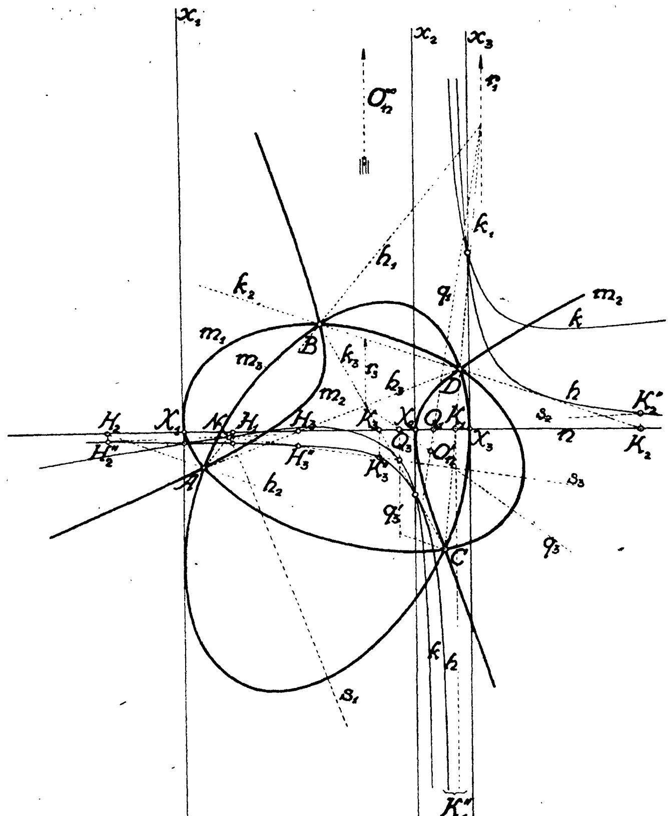
Z uvedeného vyplývají tyto *konstrukce:*

Je-li normála n — a tudíž i orthocentrum O_n — dána

a mimo ni body A, B, C, D base svazku (obr. 1.), označme spojnice (AB), (AC), (AD), (CD), (BD), (BC) po řadě $h_1, h_2, h_3, k_1, k_2, k_3$. Spojnici průsečíku $h_i \,.\, k_i$ s O_n označme r_i. Přímky q_i, pro něž $(q_i r_i h_i k_i) = -1$, procházejí jediným bodem O'_n a protínají n v bodech Q_i, projektivně přiřazených dvojicím průsečíků $n \,.\, h_i \equiv H_i$ a $n \,.\, k_i = K_i$, jež náležejí téže involuci.

a mimo ni přímky a, b, c, d base duál. svazku, označme průsečíky $a \,.\, b$, $a \,.\, c$, $a \,.\, d$, $c \,.\, d$, $b \,.\, d$, $b \,.\, c$ po řadě $H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3$. Průsečík spojnice $(H_i K_i)$ s n označme R_i. Body Q_i, pro něž $(Q_i R_i H_i K_i) = -1$, leží na jedné přímce n' a promítnuty z O_n dávají paprsky q_i, projektivně přiřazené dvojicím paprsků $(O_n H_i) = h_i$, $(O_n K_i) = k_i$, jež náležejí téže involuci.

Zvolme libovolnou kuželosečku h jdoucí orthocentrem. Z něho Q_i se promítá na h do Q'_i, podobně H_i a K_i do H''_i a K''_i. Poslední 3 dvojice bodů



Obr. 1.

náležejí opět jediné involuci a jejich spojnice jedinému svazku o středu N.

Je-li $q'_i \equiv (Q_i Q'_i)$ a k kuželosečka určená body O_n, N a $s_i . q'_i$,

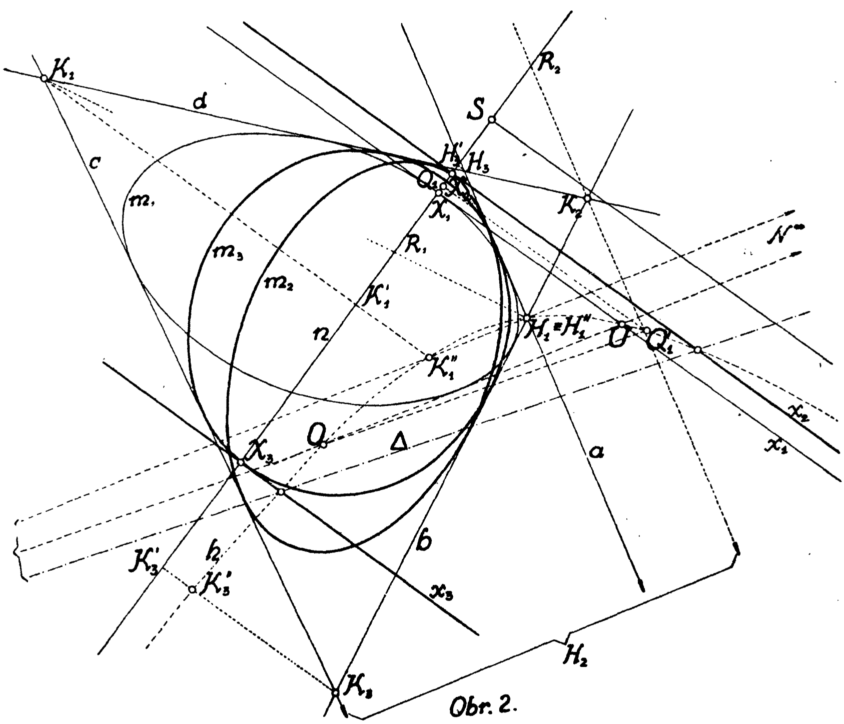
Zvolme libovolnou kuželosečku h jdoucí orthocentrem. Z něho Q_i se promítá na h do Q'_i. Mimo to h seče posledně jmenované dvojice paprsků v dvojicích bodů H''_i, K''_i, jejichž spojnice s_i náležejí jedinému svazku o středu N.

Je-li k kuželosečka určená body O_n, N a $s_i . q_i$,

pak h a k se protínají mimo v O_n ještě ve 3 bodech, promítajících se z O_n v tečny x_1, x_2, x_3 hledaných kuželoseček m_1, m_2, m_3. Průsečíky těchto tečen s n jsou jejich body dotyku X_1, X_2, X_3.

Také promítneme-li body Q'_i z libovolného bodu O na h do paprsků $p_i \equiv (OQ'_i)$, kuželosečka l určená body $O, N, p_i.s_i$ protíná h mimo v O v bodech, promítajících se z O_n v x_1, x_2, x_3.

Je zřejmé, že — jsou-li body (přímky) base svazku (duál. svazku) reálné, aspoň jedno ze tří řešení jest reálná kuželosečka. Je-li tato známa, zbývá úloha kvadratická, již lze vysloviti takto:



Obr. 2.

Dána kuželosečka m_1 body $ABCDX_1$. Sestrojiti kuželosečky m_2, m_3, procházející body $ABCD$, pro něž normála n kuželosečky m_1 v X_1 jest též normálou.

Známým způsobem sestrojena tečna x_1 kuželosečky m_1 v X_1 a normála n. Označme spojnice $(AB), (AC), (AD), (CD), (BD), (BC)$, po řadě $h_1, h_2, h_3, k_1, k_2, k_3$ a spojnice průsečíků $h_i.k_i$

Dána kuželosečka m_1 (obr. 2) tečnami $abcdx_1$. Sestrojiti kuželosečky m_2, m_3, dotýkající se přímek $abcd$, pro něž normála n kuželosečky m_1 v jejím bodě styku s x_1 jest též normálou.

Známým způsobem sestrojen dotyčný bod X_1 tečny x_1 s m_1 a v něm normála n. Označme průsečíky $a.b, a.c, a.d, c.d, b.d, b.c$ po řadě $H_1, H_2, H_3, K_1,$

s $O_n r_i$. Dvojice $h_i k_i$ protínají n v dvojicích bodů $H'_i K'_i$, jež náležejí involuci.

K_2, K_3 a průsečíky spojnic $(H_i K_i)$ s n R_i. Dvojice $H_i K_i$ promítají se z O_n na n do dvojic bodů $H'_i K'_i$, jež náležejí involuci.

Její střed volme za střed pomocné kuželosečky h, jež budiž rovnoosou hyperbolou o jedné asymptotě v n.

Je-li $(H_i H''_i) \parallel (K_i K''_i) \parallel x_1$ a $H''_i K''_i$ dvojice bodů ležících v konečnu na h, pak spojnice $(H''_i K''_i)$

Spojnice $(H_i H'_i)$ a $(K_i K'_i)$ protínají h v konečnu v dvojicích bodů $H''_i K''_i$, jejichž spojnice

náležejí témuž svazku o středu N^∞ v nekonečnu. x_1 protíná h v konečnu v bodě U a spojnice (UN^∞) touž křivku v bodě O. Budiž

$(q_i r_i h_i k_i) = -1$ a q'_i rovnoběžka s x_1 incidentní s průsečíkem $q_i . n$. Pak q'_i

$(Q_i R_i H_i K_i) = -1$ a q_i rovnoběžka s x_1 incidentní s Q_i. Pak q_i

protíná h v konečnu v bodě Q'_i a je-li Q''_i průsečík spojnic $(OQ'_i) . (H''_i K''_i)$, 3 body Q''_i leží na téže přímce $\triangle$ protínající h v obou bodech, jimiž — rovnoběžně s x_1 — procházejí tečny x_2 resp. x_3 hledaných kuželoseček m_2 resp. m_3. Jejich body dotyku leží na n.

Je zřejmé, že v obou posledních konstrukcích bod O na h byl volen tak, aby l se rozpadla.

Není bez užitku předchozí výsledky verifikovati analyticky.

Kuželosečka, jejíž rovnice v homog. souřadnicích

bodových jest

$$f \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

přímkových jest

$$\varphi = \Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$$

$$i, k = 1, 2, 3$$

má evolutu o přímkové rovnici

$$E(f) \equiv a\omega^2(u) - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} . \Sigma a_{ik} \omega_i \omega_k = 0,$$

$$E(\varphi) \equiv a\omega^2(u) - \varphi(u) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \omega_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \omega_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

kde $a = |a_{ik}|$, $\omega_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega(u)}{\partial u_i}$ jsou souřadnice orthocentra přímky (u_1, u_2, u_3) a $\omega(u) = 0$ jest přímková rovnice absolutní kvadriky.[1])

Rovnice $E(f) = 0$ i $E(\varphi) = 0$ jsou kubické vzhledem ke koeficientům a_{ik}, jak jsme mohli podle uvedených konstrukcí očekávati.

[1]) Gundelfinger, Kegelschnitte p. 215.

Proto charakteristiky[2]) podmínky, jež vyjadřuje, že kuželosečka má normálu $n(u_1, u_2, u_3)$ jsou $\alpha = \beta = 1$. Odtud vyplývají pro počet p kuželoseček,[3]) určených n body, m tečnami a r normálami, (cayley-ovskými) čísla:

n	m	r	p
4	0	1	3
3	1	1	6
2	2	1	8
1	3	1	6
0	4	1	3
3	0	2	9
2	1	2	14
1	2	2	14
0	3	2	9
2	0	3	23
1	1	3	28
0	2	3	23
1	0	4	51
0	1	4	51
0	0	5	102

V dalším budeme vždy klásti $n(0, 0, 1)$ i $O_n(0, 0, 1)$, takže $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = 1$, $\omega(0, 0, 1) = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3 = 1$. Tyto hodnoty vloženy do $E(f) = 0$ a $E(\varphi) = 0$ dávají tutéž rovnici

$$g \equiv a - a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2) = 0 \qquad (1)$$

čili

$$g \equiv 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{22}a_{13}{}^2 - a_{11}a_{23}{}^2 = 0 \qquad (1a)$$

Ptejme se nyní, v jakém vztahu k přímce n a jaký musí býti svazek (duální svazek), aby pro více než 3 — a tudíž pro všechny — jeho kuželosečky přímka n byla normálou.

Jsou-li k_1, k_2 dvě kuželosečky uvažovaného svazku (duál. svazku) o rovnicích

$$f^{(1)} \equiv \Sigma a_{ik}^{(1)} x_i x_k = 0, \quad f^{(2)} \equiv \Sigma a_{ik}^{(2)} x_i x_k = 0,$$

$$(\varphi^{(1)} \equiv \Sigma a_{ik}^{(1)} u_i u_k = 0, \quad \varphi^{(2)} \equiv \Sigma a_{ik}^{(2)} u_i u_k = 0)$$

a vložíme-li do (1) $a_{ik} = \lambda_1 a_{ik}^{(1)} + \lambda_2 a_{ik}^{(2)}$, vznikne kubická rovnice, která má býti splněna identicky. Annulováním koeficientů obdržíme tudíž 4 nutné i postačující podmínky proto, aby svazek (d. svazek) měl žádanou vlastnost.

Tři z nich obdržíme ihned uvažujeme-li zvrhlé kuželosečky. Rovnice $a = 0$ musí míti tytéž kořeny jako

$$a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2) = 0$$

vzhledem k (1). Odtud je patrno, že

---

[2]) Viz na př. Clebsch-Lindemann, Vorl. über. Geometrie I p. 390 a 401.
[3]) Clebsch, l. c. p. 403 rovnice (9).

kdykoliv svazek (d. svazek) má žádanou vlastnost, jedna zvrhlá kuželosečka prochází orthocentrem (obsahuje normálu) a zbývající mají své dvojné body (přímky) incidentní s $n(O_n)$.

Splněním těchto podmínek jest toliko zaručeno, že kubické binární formy na levých stranách posledních 2 rovnic mají koeficienty úměrné, nikoli však, že rovné, nejsou-li vesměs nulami. T. j. tyto podmínky jsou také postačující samy o sobě toliko tehdy, víme-li ještě, že všechny kuželosečky svazku (d. svazku) jsou zvrhlé.

Abychom nalezli čtvrtou podmínku, povšimněme si vpředu uvedené příbuznosti [1, 2]. Necháme-li stranou triviální případ, kdy O_n jest pólem přímky n (osy) pro všechny kuželosečky svazku (duál. svazku), lze rovnicí této příbuznosti psáti ve tvaru

$$x_1(k_{11}y_1^2 + k_{12}y_1y_2 + k_{22}y_2^2) + x_2(l_{11}y_1^2 + l_{12}y_1y_2 + l_{22}y_2^2) = 0.$$

Má-li míti více než tři body samodružné, musí býti

$$k_{11} = k_{12} + l_{11} = k_{22} + l_{12} = l_{22} = 0,$$

takže poslední rovnice přejde v

$$(x_1y_2 - x_2y_1)(k_{12}y_1 + k_{22}y_2) = 0.$$

odkud je ihned patrno, že involuce bodů (tečen), jíž svazek (duál. svazek) vytíná na n (vysílá do O_n) jest parabolická a lze vysloviti pomocnou větu:

A) Jestliže všechny kuželosečky

svazku nejsou zvrhlé a mají společnou normálu, pak	duálního svazku nejsou zvrhlé a mají společnou normálu, pak

1) buď tato jest pro všechny osou

2) nebo všechny procházejí bodem A na n a mají v něm společnou tečnu, která	2) nebo všechny se dotýkají přímky a incidentní s O_n ve společném bodě, který
a) jest incidentní s O_n	a) leží na n
b) není incidentní s O_n,	b) neleží na n,
ale tečny všech kuželoseček svazku v jejich průsečících s n (od A různých) tvoří svazek paprsků o středu O_n.[4]	ale body dotyku všech kuželoseček duál. svazku (s od a různými tečnami z O_n) tvoří bodovou řadu na n.

Není-li n normálou všech kuželoseček svazku (duál. svazku), může se státi dvojím způsobem, že 2 z tří řešení m_1, m_2, m_3 splývají. Jest to jednak tehdy, když na př. O_n a n jsou pro m_1 pólem a polárou. Pak jest $m_1 \equiv m_2$ a jest tomu tak v každém m_1 obsa-

[4]) Jestliže všechny kuželosečky svazku se navzájem dotýkají v bodě A, jsou v persp. kolineaci o středu A a ose o, jež jest spojnicí zbývajících bodů base. Proto O_n a o jsou incidentní v uvaž. případě.

hujícím svazku (duál. svazku) a m_1 nazývám kuželosečkou *dvojnou*. Je-li tomu tak v určitém (ale ne v každém) svazku (duál. svazku) nazývám jej tečným a m_1 jeho kuželosečkou *dotyčnou*. Uvažuji-li svazky o třech v jednom splývajících řešeních, třeba rozeznávati svazek a kuželosečku *inflexní* od *tečného svazku s dvojnou kuž. dotyčnou* a svazek obsahující kuželosečku *trojnou*. Označení je analogické onomu v geometrii bodové.

II.

V lineárních systémech kuželoseček nejblíže vyšší dimense t. j. v síti a duální síti, existuje obecně celý systém S_1 resp. σ_1 kuželoseček, závislý na jednom parametru, jehož kuželosečky mají danou normálu. Jsou-li

$$f^{(n)} \equiv \Sigma a_{ik}^{(n)} x_i x_k = 0 \text{ resp. } \varphi^{(n)} \equiv \Sigma a_{ik}^{(n)} u_i u_k = 0, \quad i, k, n = 1 \ldots 3$$

rovnice tří kuželoseček sítě (duál. sítě) k_1, k_2, k_3, jež nenáležejí témuž svazku (duál. svazku), pak její obecná kuželosečka k má rovnici

$$f = \lambda_1 f^{(1)} + \lambda_2 f^{(2)} + \lambda_3 f^{(3)} = 0 \text{ resp. } \varphi = \lambda_1 \varphi^{(1)} + \lambda_2 \varphi^{(2)} + \lambda_3 \varphi^{(3)} = 0,$$

takže $a_{ik} = \lambda_1 a_{ik}^{(1)} + \lambda_2 a_{ik}^{(2)} + \lambda_3 a_{ik}^{(3)}$. λ_1, λ_2, λ_3 jsou tedy souřadnice kuželosečky sítě a nazveme-li je též souřadnicemi bodu — obrazu oné kuželosečky — obrazem systému S_1 resp. σ_1 jest křivka (rovinná) g_1. Tato křivka jest kubická (totéž pravíme o S_1 a σ_1), jak snadno ověříme vložením uvedených výrazů pro a_{ik} do (1a); rovnice takto získaná jest vskutku rovnicí g_1.

Pro další jest podstatná věta:

A) g_1 *jest racionální*. (Totéž pravíme o S_1 a σ_1.)

Platí obecněji:

B) Jestliže existuje neincidentní přímka n a bod O_n takové, že toliko jediná křivka c_p algebraického systému Σ algebraických křivek (o dvou parametrech) se dotýká obecného paprsku p, incidentního s O_n, v jeho průsečíku s n, křivky c_p (při proměnném p) tvoří racionální systém o jednom parametru.

Vskutku, křivky c_p posledně jmenovaného systému jsou jednojednoznačně přiřazeny bodům na n, jež jest rodu O, takže věta B) jest zřejma. Klademe-li za Σ síť resp. duál. síť kuželoseček, obdržíme větu A).

Tato vyplývá též snadno[5]) z rovnice (1a) kubiky g_1. Je-li matice

$$\begin{Vmatrix} a_{13}^{(1)} & a_{13}^{(2)} & a_{13}^{(3)} \\ a_{23}^{(1)} & a_{23}^{(2)} & a_{23}^{(3)} \end{Vmatrix} \ldots (M_1)$$

[5]) Uvádím-li B), jest to proto, aby byla zřejma možnost zobecnění následujících úvah pro lineární systémy alg. křivek řádu n.

řádu 2 — a jen tehdy — v síti existuje jediná kuželosečka dvojná, pro niž normála n a bod O_n jsou polárou a pólem. S tím současně přímky o rovnicích $a_{13}=0$, $a_{23}=0$ mají společný jediný bod O, jenž jest obrazem oné kuželosečky dvojné a jenž jest středem svazku přímek

$$\lambda a_{13} - \mu a_{23} = 0. \tag{2}$$

Přímky tohoto svazku protínají g_1 jednak v dvakrát počítaném bodě O, jednak v bodě ležícím na přímce

$$a_{11}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda\mu + a_{22}\mu^2 = 0. \tag{3}$$

Tato jest tehdy a jen tehdy incidentní s O, když jest

$$\begin{vmatrix} a_{13}^{(1)} & a_{13}^{(2)} & a_{13}^{(3)} \\ a_{23}^{(1)} & a_{23}^{(2)} & a_{23}^{(3)} \\ a_{11}^{(1)}\lambda^2-2a_{12}^{(1)}\lambda\mu+a_{22}^{(1)}\mu^2, & a_{11}^{(2)}\lambda^2-2a_{12}^{(2)}\lambda\mu+a_{22}^{(2)}\mu^2, & a_{11}^{(3)}\lambda^2-2a_{12}^{(3)}\lambda\mu+a_{22}^{(3)}\mu^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Kořeny poslední rovnice charakterisují tečny kubiky g_1 v dvojném bodě O. Není na újmu obecnosti, předpokládáme-li, že kuželosečka, jejímž obrazem jest 0, je k_3, takže $a_{13}^{(3)} = a_{23}^{(3)} = 0$ a rovnice (4) se redukuje na

$$(a_{13}^{(1)} a_{23}^{(2)} - a_{23}^{(1)} a_{13}^{(2)})(a_{11}^{(3)}\lambda^2 - 2a_{12}^{(3)}\lambda\mu + a_{22}^{(3)}\mu^2) = 0, \tag{5}$$

kde první činitel na levé straně jest od nuly různý vzhledem k předpokladu učiněnému o M_1. Tento předpoklad se vskutku redukoval na

$$a_{13}^{(1)} a_{23}^{(2)} - a_{23}^{(1)} a_{13}^{(2)} \neq 0,$$

kterážto nerovnost jest nutnou a post. podmínkou toho,

aby orthocentrum nebylo bodem hessieny sítě, k němuž konjugovaný leží na normále.	aby normála nebyla přímkou duální sítě, k níž konjugovaná prochází orthocentrem.

(Jest možno, aby O_n ležel na hessieně sítě, aniž by konjugovaný bod ležel na n. Jest to v tom jediném případě, když k_3 jest zvrhlá a má dvojný bod v O_n ($a_{33}^{(3)} = 0$). Rovněž duálně).

Za téhož předpokladu o M_1 bod O jest tehdy a jen tehdy trojný, když podle (5) jest

$$a_{11}^{(3)} = a_{12}^{(3)} = a_{22}^{(3)} = 0 \quad \text{t. j. tehdy a j. t., když}$$

síť obsahuje dvakrát počítanou normálu jako prvek.	duální síť obsahuje $2\times$ počítaný svazek paprsků o středu v O_n jako prvek.

g_1 se může ještě rozpadati a rozpadá již jen v tom[6]) dalším případě:

[6]) Jak snadno lze nalézti diskusí na př. parametrických rovnic kubiky g_1, jež z (2) a (3) vyplývají ve tvaru

když aspoň jednu z tečen α, β vedených z O_n ke k_3 kuželosečky sítě protínají v dvojicích bodů, jež náležejí jediné involuci.

když aspoň z jednoho z průsečíků α, β kuželosečky k_3 s n ke kuželosečkám duál. sítě vycházející dvojice tečen náležejí jediné involuci.

Je-li tomu tak g_1 se rozpadá v kuželosečku a přímku, jež se v O protínají či dotýkají podle toho, jsou-li α, β různé či splývající.

B_1) Je-li tomu tak i pro α i pro β, které jsou různé, g_1 se rozpadá ve tři přímky $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$ z nichž první dvě se protínají v O a jsou obrazy prvních dvou ze tří svazků $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ (duál. svazků $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\sigma^{(3)}$), v něž se rozpadá S_1 (σ_1). Kuželosečky

svazku $S^{(1)}$ resp. $S^{(2)}$ se vesměs dotýkají tečny α resp. β v jejím průsečíku s n. Tento bod a tečna jím jdoucí určují dva nekonečně blízké body base svazku a zbývající $P^{(1)}, Q^{(1)}$ resp. $P^{(2)}, Q^{(2)}$ leží na k_3.

duál. svazku $\sigma^{(1)}$ resp. $\sigma^{(2)}$ vesměs procházejí bodem α resp. β majíce v něm tečnu incidentní s O_n. Tento bod a tečna určují dvě nekonečně blízké tečny base d. svazku a zbývající $p^{(1)}$, $q^{(1)}$ resp. $p^{(2)}$, $q^{(2)}$ se dotýkají k_3.

$S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ zřejmě splňují podmínky 2a) pomocné věty A) odstavce I. Jak jest tomu s $S^{(3)}$ ($\sigma^{(3)}$)?

Kuželosečky svazku $S^{(1)}$ protínají n kromě společného jejich bodu na α ještě v druhých bodech a tečny v těchto bodech k nim sestrojené tvoří paprskový svazek[7]) o středu $U \equiv (P^{(1)}, Q^{(1)}) . \beta$. Je-li obdobně $V \equiv (P^{(2)}, Q^{(2)}) . \alpha$, existuje v $S^{(1)}$ a $S^{(2)}$ po jedné kuželosečce dotýkající se spojnice (UV) v jejím průsečíku s n.

Kuželosečky d. svazku $\sigma^{(1)}$ kromě společné tečny incidentní s α vysílají do O_n ještě druhé tečny, jejichž body dotyku tvoří bodovou řadu na přímce $u \equiv (p^{(1)} . q^{(1)}, \beta)$. Je-li obdobně $v \equiv (p^{(2)} . q^{(2)}, \alpha)$, existuje v $\sigma^{(1)}$ a $\sigma^{(2)}$ po jedné kuželosečce dotýkají se v průsečíku $u . v$ jeho spojnice s O_n.

Těmito 2 kuželosečkami je stanoven svazek $S^{(3)}$ resp. duální svazek $\sigma^{(3)}$, jenž splňuje podmínky 2b) pomocné věty A) odstavce I.

Nyní lze vysloviti věty:

C) *K tomu, aby* g_1 *měla toliko jeden bod vícenásobný jest nutno a stačí, když*

$$\varrho\lambda_1 = (a_{13}^{(2)}\lambda - a_{23}^{(2)}\mu)(a_{11}^{(3)}\lambda^2 - 2a_{12}^{(3)}\lambda\mu + a_{22}^{(3)}\mu^2)$$

$$\varrho\lambda_2 = -(a_{13}^{(1)}\lambda - a_{23}^{(1)}\mu)(a_{11}^{(3)}\lambda^2 - 2a_{12}^{(3)}\lambda\mu + a_{22}^{(3)}\mu^2)$$

$$\varrho\lambda_3 = (a_{13}^{(1)}\lambda - a_{23}^{(1)}\mu)(a_{11}^{(2)}\lambda^2 - 2a_{12}^{(2)}\lambda\mu + a_{22}^{(2)}\mu^2) - (a_{13}^{(2)}\lambda - a_{23}^{(2)}\mu)(a_{11}^{(1)}\lambda^2 - 2a_{12}^{(1)}\lambda\mu + a_{22}^{(1)}\mu^2).$$

[7]) Jak snadno nalezneme, aplikujíce na Sturmovu větu o třech kuželosečkách, jdoucích dvěma body, na tyto tři kuželosečky: k_3, $2\times$ počítanou n a obecnou kuželosečku svazku $S^{(1)}$.

orthocentrum O_n přímky n není takovým bodem hessieny sítě, k němuž konjugovaný leží na n. | *normála n nenáleží hessieně duál. sítě tak, aby konjugovaná přímka procházela orthocentrem O_n.*

Není-li tato podmínka splněna, g_1 jest reducibilní. Je-li splněna, g_1 jest ireducibilní, když dále

1) *síť neobsahuje dvakrát počítanou normálu jako prvek.* 2) *žádný z průsečíků kuželosečky k_3 s n spojen s O_n nedává tečnu Cayley-ovy křivky sítě.* | 1) *duál. síť neobsahuje 2× počítaný svazek paprsků o středu O_n jako prvek.* 2) *žádná z obou tečen vycházejících z O_n ke kuželosečce k_3 neprotíná n v bodě Cayleyovy křivky duál. sítě.*

Předpokládáme-li koeficienty $a_{ik}^{(l)}$ reálné, můžeme nyní věty projektivní geometrie rovinné racionální kubiky přenášeti na S_1 resp. σ_1, připojíme-li z rovnice (5) zřejmou větu:

D) *Ireducibilní g_1 má v O bod* 1) *uzlový;* 2) *isolovaný;* 3) *kuspidální tehdy a j. t., když k_3*

seče normálu n ve dvou bodech 1) *reálných různých* 2) *sdruženě imaginárních* 3) *splývajících.* | *má se svazkem o středu O_n společné dva paprsky* 1) *reálné různé;* 2) *sdruženě imaginární;* 3) *splývající.*

O racionální kub. křivce platí, jak známo,[8]) tato věta:

„Křivka má tři inflexní body ležící na přímce, když sing. bod není kuspidální. Z těchto jsou všechny reálné či toliko jeden reálný, když sing. bod jest isolovaný či uzlový. Křivka s bodem kuspidálním má toliko jeden bod inflexní a to reálný."

Tato věta se přenáší na S_1 a σ_1 takto:

E) *Jsou-li podmínky věty* C *splněny a když*

k_3 seče normálu ve dvou bodech různých α, β, | *z orthocentra ke k_3 vycházejí dvě různé tečny α, β*

v síti (duál. síti) existují tři inflexní svazky[9]) (duál. svazky) obsahující po inflexní kuželosečce. Tyto náležejí jedinému svazku (duál. svazku).

Jsou-li α, β reálné, toliko jedna z inflexních kuželoseček jest reálná.[10]) Jsou-li α. β sdruženě imaginární, všechny tři inflexní kuželosečky jsou reálné.

---

[8]) Na př. Clebsch l. c. p. 585.
[9]) Viz konec odstavce I.
[10]) Rozuměj algebraicky reálná, t. j. o reálných koeficientech rovnice.

Je-li $\alpha \equiv \beta$, existuje v síti (duál. síti) jediný svazek (duál. svazek) a jediná kuželosečka inflexní a to reálná.[11])

Poznamenejme ještě, že vhodnou volbou kuželoseček k_1, k_2, k_3 a faktorů jejich rovnic lze vždy docíliti, aby parametrické rovnice systému S_1 (σ_1) byly

$$\lambda_1 = 6t^2 \quad \lambda_2 = -6t \quad \lambda_3 = 1 + t^3 \quad \text{(není-li } g_1 \text{ kuspidální)},$$

nebo

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = t^2 \quad \lambda_3 = t^3 \quad \text{(je-li } g_1 \text{ kuspidální)}.$$

III.

Konečně uvažujme kuželosečky komplexu (duál. komplexu), pro něž přímka n jest normálou. k_1, k_2, k_3, k_4 buďtež opět kuželosečky, jimiž jest komplex (duál. komplex) stanoven, takže jeho obecná kuželosečka má rovnici

$$f \equiv \lambda_1 f^{(1)} + \lambda_2 f^{(2)} + \lambda_3 f^{(3)} + \lambda_4 f^{(4)} = 0$$

$$\text{resp. } \varphi = \lambda_1 \varphi^{(1)} + \lambda_2 \varphi^{(2)} + \lambda_3 \varphi^{(3)} + \lambda_4 \varphi^{(4)} = 0.$$

Interpretujeme-li opět λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 jako souřadnice bodu projekt. prostoru R_3, $a_{ik} = 0$ jest rovnice roviny a (1), (1a) jsou rovnice kubické *plochy* g_2, jíž — v stejném smyslu jako v předcházejícím odstavci — nazveme *obrazem* systému S_2 (σ_2) kuželoseček obsažených v komplexu (duál. komplexu), pro něž n jest normálou.

Každá síť komplexu (duál. komplexu) zobrazuje se v R_3 jako rovina sekoucí g_2 v racionální kubice g_1. To stačí,[12]) abychom mohli vysloviti větu:

Kubická plocha g_2 jest přímková.

Je-li matice

$$\left\| \begin{matrix} a_{13}^{(1)} & a_{13}^{(2)} & a_{13}^{(3)} & a_{13}^{(4)} \\ a_{23}^{(1)} & a_{23}^{(2)} & a_{23}^{(3)} & a_{23}^{(4)} \end{matrix} \right\| \ldots (M_2)$$

řádu 2 — a jen tehdy — roviny $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$ mají společnou jedinou přímku d, jež jest osou rovinového svazku (2). Roviny tohoto svazku sekou g_2, jednak v dvakrát počítané přímce d, jednak v další přímce ležící též v rovině o rovnici (3). Jest tudíž d dvojnou přímkou plochy g_2. Bude nám rozlišovati *dva případy:* 1) d jest dvojnásobnou direktricí a g_2 *není Cayley-ova*; 2) d jest jednoduchou direktricí e jednoduchou tvořící přímkou, takže g_2 *jest Cayley-ova.*

---

[11]) Laskavý čtenář dovede nyní, užívaje téhož principu, interpretovati každou projektivní větu o g_1 jako větu o S_1 (σ_1). Zde stačí se omeziti na větu E.

[12]) Podle věty od Picarda pocházející jest plocha, jejíž všechny rovinné řezy jsou racionální, buď přímková nebo Steinerova plocha 4. řádu. (Viz Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazii p. 302.) g_2, jsouc kubická, musí býti přímková. V našem jednoduchém případě, je věc i bez této věty zřejma. Pomocí jí a věty B odst. II. jest však zřejma i když místo kuželoseček uvažujeme křivky řádu n.

Uveďme též, že nutná i post. podmínka pro to, aby plocha nebyla či byla Cayley-ova jest existence dvou různých či splývajících přímek torsálních.

Klademe-li v rovnicích (2) a (3) $\lambda = u$, $\mu = -1$, pak koeficienty u $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ v první resp. druhé z těchto rovnic jsou rovinovými souřadnicemi $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(4)}$ resp. $\eta^{(1)}, \dots \eta^{(4)}$ roviny ξ resp. η, jejichž průsečnice $(\xi\eta)$ jest přímkou osnovy tvořících přímek plochy g_2.[13]) Pak, jak známo,[14]) torsální přímky osnovy hodnotami svých parametrů anulují determinant

$$\left(\xi, \eta, \frac{d\xi}{du}, \frac{d\eta}{du}\right).$$

Zde jest

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a_{13}u + a_{23} & \eta &= a_{11}u^2 + 2a_{12}u + a_{22} \\ \frac{d\xi}{du} &= a_{13} & \frac{d\eta}{du} &= 2(a_{11}u + a_{12}) \end{aligned}\right\} \qquad (5a)$$

a tudíž

$$\left(\xi, \eta, \frac{d\xi}{du}, \frac{d\eta}{du}\right) = [(a_{23}a_{12}a_{13}a_{11})u^2 + (a_{23}a_{22}a_{13}a_{11})u + \\ + (a_{23}a_{22}a_{13}a_{12})].$$

Proto nutná podmínka pro g_2 Cayley-ovu jest

$$\Delta \equiv (a_{23}a_{22}a_{13}a_{11})^2 - 4(a_{23}a_{12}a_{13}a_{11})(a_{23}a_{22}a_{13}a_{12}) = 0.$$

Předpokládáme-li, že n jest pro k_3 a k_4 osou, t. j. že jest

$$a_{13}^{(3)} = a_{23}^{(3)} = a_{13}^{(4)} = a_{23}^{(4)} = 0,$$

možno psáti

$$\Delta = (a_{13}^{(1)}a_{23}^{(2)} - a_{23}^{(1)}a_{13}^{(2)})^2 [(a_{11}^{(3)}a_{22}^{(4)} - a_{22}^{(3)}a_{11}^{(4)})^2 + 4(a_{12}^{(3)}a_{11}^{(4)} - \\ - a_{12}^{(4)}a_{11}^{(3)})(a_{12}^{(3)}a_{22}^{(4)} - a_{12}^{(4)}a_{22}^{(3)})].$$

První činitel tohoto součinu jest — vzhledem k předpokladu učiněnému o M_2 — od nuly různý.

Tento předpoklad se vskutku redukoval na

$$a_{13}^{(1)}a_{23}^{(2)} - a_{23}^{(1)}a_{13}^{(2)} \neq 0,$$

kterážto nerovnost jest nutná i post. k tomu, aby

orthocentrum neleželo na hessieně každé sítě komplexu tak, aby konjugovaný bod ležel na n.

normála nenáležela hessieně každé duál. sítě duál. komplexu tak, aby konjugovaná přímka procházela O_n.

[13]) Užívám terminologie a symboliky projektivní diferenciální geometrie. Viz E. Čech: Projektivní geometrie diferenciální 1926.

[14]) Čech, l. c. p. 143.

Je-li tato podmínka splněna, Δ se anuluje současně s druhým činitelem, který jest zřejmě[15]) resultantou binárních forem

$$a_{11}^{(3)}x_1^2+2a_{12}^{(3)}x_1x_2+a_{22}^{(3)}x_2^2$$
$$a_{11}^{(4)}x_1^2+2a_{12}^{(4)}x_1x_2+a_{22}^{(4)}x_2^2.$$

Proto,

je-li ireducibilní g_2 Cayley-ova

normála n jest incidentní s jedním bodem base svazku kuželoseček v komplexu obsažených, pro něž n jest osou.

Kuželosečky tohoto svazku pak také mají ve svém společném bodě na n společnou tečnu incidentní s O_n.

orthocentrum O_n leží na jedné z přímek base duál. svazku kuželoseček v duál. komplexu obsažených, pro něž n jest osou.

Kuželosečky tohoto duál. svazku se pak dotýkají společné tečny incidentní s O_n v jejím průsečíku s n.

a) Jestliže ireducibilní g_2 není Cayley-ova každou kuželosečku k svazku (duál. svazku) $(k_3\,k_4)$ určeného kuželosečkami k_3, k_4, obsahují dva svazky $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ $(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$ systému S_2 (σ_2)[16]), jejichž obrazy jsou ony tvořící přímky na g_2, které procházejí obrazem kuželosečky k na d. $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ $(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$ splňují podmínky 2a) věty A odst. I. a jsou dotud různé, dokud k není některou z obou zvrhlých kuželoseček r, s svazku (k_3, k_4), jež mají své dvojné body (resp. duálné) na n. Obrazy kuželoseček r, s jsou totiž kuspidální body plochy g_2 a je-li $k\equiv r$ nebo $k\equiv s$, pak $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ $(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$ splývají v jediný svazek (duál. svazek) R resp. S, jehož obrazem jest torsální přímka plochy g_2.

Na g_2 ještě existuje mimo d jednoduchá direktrice $g^{(3)}$. Tato jest obrazem svazku $S^{(3)}$ (duál. svazku $\sigma^{(3)}$), splňujícího podmínky 2b) věty A odst. I. a jest společným svazkem všech sítí (duál. sítí), určených dvojicemi $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ $(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$.

V S_2 (σ_2) není jiných svazků (duál. svazků) než právě uvedené.

Každé přímce prostoru R_3 odpovídá svazek (duál. svazek) a jejím průsečíkům s g_2 odpovídající jeho kuželosečky jsou ony, pro něž n jest normálou. Z této představy je patrno, že — nehledíme-li k přímkám plochy g_2 — čára l jedině tehdy jest obrazem systému L, jehož každá kuželosečka se soumeznou určují svazek (duál. svazek) inflexní, když jest asymptotickou čarou plochy g_2.

Je známo,[17]) že asymptotické čáry na g_2 jsou bikvadratické čáry druhého druhu a procházejí vesměs kuspidálními body plochy, majíce v nich trojbodový styk s torsálními přímkami.

[15]) Platí identita $(a\gamma-c\alpha)^2+4(b\alpha-a\beta)(b\gamma-c\beta)\equiv(2b\beta-a\gamma-c\alpha)^2-$ $-4(b^2-ac)(\beta^2-\alpha\gamma)$.

[16]) Srovnej s A) odst. I. a s B_1 odst. II.

[17]) Sturm, Verwandschaften IV. p. 295.

Odtud vyplývá:

Existuje ∞^1 *systémů* L, *jež jsou bikvadratické, t. j. rovnice všech kuželoseček takového systému obdržíme, necháme-li nabývati všech hodnot parametr, jehož jistými celistvými funkcemi čtvrtého stupně jsou koeficienty rovnice kuželosečky. Svazek (duál. svazek)* R *resp.* S *má s každým z těchto systémů společné tři kuželosečky, jež však splývají v* r *resp.* s.

Abychom nalezli parametrické vyjádření systémů L, uveďme, že diferenciální rovnice duálních křivek adjungovaných[18]) k asymptotickým křivkám plochy jest

$$2\left(\xi,\eta,\frac{d\xi}{du},\frac{d\eta}{du}\right)\left(t_2\frac{dt_1}{du}-t_1\frac{dt_2}{du}\right)=\left(\xi,\frac{d\xi}{du},\frac{d^2\xi}{du^2},\eta\right)t_1^2+$$
$$+\left\{\left(\xi,\eta,\frac{d\xi}{du},\frac{d^2\eta}{du^2}\right)-\left(\xi,\eta,\frac{d^2\xi}{du^2},\frac{d\eta}{du}\right)\right\}t_1t_2+\left(\eta,\frac{d\eta}{du},\xi,\frac{d^2\eta}{du^2}\right)t_2^2. \tag{6}$$

Není na újmu obecnosti předpokládáme-li $k_3\equiv r$, $k_4\equiv s$ a kromě toho klademe-li strany $x_1=0$ a $x_2=0$ souř. trojúhelníka (resp. vrcholy $u_1=0$, $u_2=0$) do spojnic dvojných bodů kuželoseček k_3 a k_4 s O_n (do průsečíků dvoj. přímek kuželoseček k_3 a k_4 s n). Pak jest

$$a_{12}^{(3)}=a_{22}^{(3)}=a_{13}^{(3)}=a_{23}^{(3)}=a_{11}^{(4)}=a_{12}^{(4)}=a_{13}^{(4)}=a_{23}^{(4)}=0 \tag{7}$$

a mimo to lze klásti

$$(a_{23}a_{22}a_{13}a_{11})=1. \tag{7a}$$

Dosadíme-li do (6) z (5a), obdržíme

$$2[(a_{23}a_{12}a_{13}a_{11})u^2+(a_{23}a_{22}a_{13}a_{11})u+(a_{23}a_{22}a_{13}a_{12})]\left(t_2\frac{dt_1}{du}-t_1\frac{dt_2}{du}\right)=$$
$$=[2(a_{23}a_{12}a_{13}a_{11})u+(a_{23}a_{22}a_{13}a_{11})]t_1t_2+2[(a_{22}a_{12}a_{13}a_{11})u+$$
$$+(a_{22}a_{12}a_{23}a_{11})]t_2^2.$$

Poslední rovnice s ohledem na (7) a (7a) se může psáti ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)-\frac{1}{2u}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)=a_{11}^{(3)}a_{22}^{(4)}\left[(a_{13}^{(1)}a_{12}^{(2)}-a_{12}^{(1)}a_{13}^{(2)})+(a_{23}^{(1)}a_{12}^{(2)}-a_{12}^{(1)}a_{23}^{(2)})\frac{1}{u}\right].$$

Odtud nalézáme

$$\frac{t_1}{t_2}=a_{11}^{(3)}a_{22}^{(4)}\sqrt{u}\left(\int\frac{(a_{23}^{(1)}a_{12}^{(2)}-a_{12}^{(1)}a_{23}^{(2)})+(a_{13}^{(1)}a_{12}^{(2)}-a_{12}^{(1)}a_{13}^{(2)})u}{u\sqrt{u}}du+\text{Const.}\right)$$

a zavedeme-li novou neodvisle proměnnou $u=t^2$ obdržíme

$$\frac{t_1}{t_2}=2a_{11}^{(3)}a_{22}^{(4)}[(a_{13}^{(1)}a_{12}^{(2)}-a_{12}^{(1)}a_{13}^{(2)})t^2+t\,.\,\text{const.}+a_{12}^{(1)}a_{12}^{(2)}-a_{12}^{(1)}a_{12}^{(2)}].$$

---

[18]) Čech, l. c. p. 133.

Křivka vytvořená bodem

$$\lambda = t_1\left(\xi, \eta, \frac{d\xi}{dt}\right) + t_2\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{dt}\right)$$

est asymptotická čára. Posnadné úpravě obdržíme její rovnicej parametrické

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -a_{11}^{(3)} a_{22}^{(4)} (a_{13}^{(2)} t^2 + a_{23}^{(2)}) t \\
\lambda_2 &= a_{11}^{(3)} a_{22}^{(4)} (a_{13}^{(1)} t^2 + a_{13}^{(1)}) t \\
\lambda_3 &= -a_{22}^{(4)} \{(a_{13}^{(1)} a_{11}^{(2)} - a_{13}^{(2)} a_{11}^{(1)}) t^3 + [2(a_{13}^{(1)} a_{12}^{(2)} - a_{12}^{(1)} a_{13}^{(2)}) + \\
&\qquad + a_{23}^{(1)} a_{11}^{(2)} - a_{23}^{(2)} a_{11}^{(1)}]\, t + \text{Const.}\} \\
\lambda_4 &= a_{11}^{(3)} t \{t^3 . \text{Const.} + [2(a_{12}^{(1)} a_{23}^{(2)} - a_{23}^{(1)} a_{12}^{(2)}) + a_{13}^{(2)} a_{22}^{(1)} - \\
&\qquad - a_{13}^{(1)} a_{22}^{(2)})]\, t^2 + a_{22}^{(1)} a_{23}^{(2)} - a_{22}^{(2)} a_{23}^{(1)}\}
\end{aligned} \tag{8}$$

Dosadíme-li tyto výrazy do

$$f \equiv \lambda_1 f^{(1)} + \lambda_2 f^{(2)} + \lambda_3 f^{(3)} + \lambda_4 f^{(4)} = 0,$$

$$\text{resp. } \varphi = \lambda_1 \varphi^{(1)} + \lambda_2 \varphi^{(2)} + \lambda_3 \varphi^{(3)} + \lambda_4 \varphi^{(4)} = 0,$$

obdržíme hledané parametrické rovnice systémů L.

b) Je-li g_2 Cayley-ova uveďme zejména, že asymptotické čáry jsou prostorové kubiky procházející jediným existujícím bodem kuspidálním plochy.[19]) Jejich společnou tečnou v tomto bodě jest dvojná přímka d, jež jest jednoduchou direktricí a tvořící přímkou. Odtud vyplývá: *Systémy L jsou racionální kubické a každý obsahuje jedinou existující zvrhlou kuželosečku s dvojným bodem na n (s dvojnou přímkou incidentní s O_n), pro niž n a O_n jsou polárou a pólem. Tato představuje dvě splývající společné prvky svazku (duál. svazku) (k_3, k_4) s každým ze systémů L.*

Při tom předpokládáme, že svazek (duál. svazek) (k_3, k_4) jest onen v komplexu (duál. komplexu) obsažený, pro jehož kuželosečky n jest osou. Abychom nalezli parametrické vyjádření systémů L, položme tentokráte

$$a_{11}^{(3)} = a_{22}^{(3)} = a_{13}^{(3)} = a_{23}^{(3)} = a_{33}^{(3)} = a_{11}^{(4)} = a_{12}^{(4)} = a_{13}^{(4)} = a_{23}^{(4)} = 0.$$

Počtem k minulému obdobným nalezneme pro duální křivky adjungované k asymptotickým křivkám plochy g_2

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2(a_{23}^{(1)} a_{13}^{(2)} - a_{13}^{(1)} a_{23}^{(2)})} \{(a_{11}^{(1)} a_{13}^{(2)} - a_{13}^{(1)} a_{11}^{(2)})\, u^2 + 2(a_{11}^{(1)} a_{23}^{(2)} - a_{23}^{(1)} a_{11}^{(2)}) u + \text{Const.}\}$$

a rovnice

---

[19]) Pascal, Repertorium der M., II_2 (1922) p. 841.

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\,4a_{12}^{(3)}a_{22}^{(4)}(a_{13}^{(2)}u + a_{23}^{(2)})\\
\lambda_2 &= \,4a_{12}^{(3)}a_{22}^{(4)}(a_{13}^{(1)}u + a_{23}^{(1)})\\
\lambda_3 &= -\,a_{22}^{(4)}\{3(a_{13}^{(1)}a_{11}^{(2)} - a_{11}^{(1)}a_{13}^{(2)})u^2 + 2[(a_{23}^{(1)}a_{11}^{(2)} - a_{11}^{(1)}a_{23}^{(2)}) +\\
&\qquad + 2(a_{13}^{(1)}a_{12}^{(2)} - a_{12}^{(1)}a_{13}^{(2)})]u + \text{Const.} + 4(a_{23}^{(1)}a_{12}^{(2)} - a_{12}^{(1)}a_{23}^{(2)})\}\\
\lambda_4 &= \,2a_{12}^{(3)}\{(a_{13}^{(1)}a_{11}^{(2)} - a_{11}^{(1)}a_{13}^{(2)})u^3 + [\text{Const.} + 2(a_{22}^{(1)}a_{13}^{(2)} -\\
&\qquad - a_{13}^{(1)}a_{22}^{(2)})]u + 2(a_{22}^{(1)}a_{23}^{(2)} - a_{23}^{(1)}a_{22}^{(2)})\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

jsou parametrické rovnice systémů L.

IV.

Předchozí úvahy je možno v nejednom směru zobecniti. Především — od čehož zde upouštím — zbývá vyšetřiti množství kuželoseček o dané normále v lineárních systémech čtvrté a páté dimense. Zvláště však je upozorniti, že nahradíme-li lin. systémy kuželoseček stejnými systémy křivek řádu (třídy) n, podle věty B) odst. I. a poznámky [12]), *obrazy obdobně definovaných systémů těchto křivek jsou racionální křivky, přímkové plochy a t. d. obecně řádu $2n-1$.* Dovolím si těmito otázkami, jakož i s nimi souvisejícími konstrukcemi, zabývati se při jiné příležitosti.

Zde budiž mi ještě dovoleno vysloviti mínění, že normála jako určovací prvek alg. křivky byla dosud vůbec málo a často ne dosti vhodně uvažována. Dobrý doklad toho nalézám na př. v Jarolímkových Základech geometrie polohy, v jejichž V. svazku autor konstruuje elipsu, danou osami a dvěma normálami. Konstrukce vychází z této věty, již autor v cit. díle dokazuje: „Místem bodů středově souměrných se středem elipsy podle půlících bodů úseků, ležících na normálách mezi osami elipsy, jest opět elipsa, s první souosá.“

Věta platí však i pro hyperbolu a jest jednoduchým důsledkem okolnosti, že evoluta kuželosečky k_1 o rovnici v Cartes. souř.

$$\lambda_2 x^2 + \lambda_1 y^2 + \mu = 0,$$

podle odst. I. má evolutu o rovnici v souř. Plückerových

$$\frac{(u^2+v^2)^2}{\lambda_1\lambda_2} - \left(\frac{u^2}{\lambda_1} + \frac{v^2}{\lambda_2} + \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{u^2}{\lambda_2} + \frac{v^2}{\lambda_1}\right) = 0.$$

Kvadratickou korelací

$$u = -\frac{1}{X} \qquad v = -\frac{1}{Y} \tag{10}$$

přímce (u, v) neincidentní s počátkem jest přiřazen bod (X, Y) symetrický s počátkem podle středu úseku, ležícího na oné přímce mezi osami souřadnic. Touto korelací rovnice evoluty přechází v

$$\frac{(X^2+Y^2)^2}{\lambda_1\lambda_2} - \left(\frac{X^2}{\lambda_2} + \frac{Y^2}{\lambda_1} + \frac{X^2Y^2}{\mu}\right)\left(\frac{X^2}{\lambda_1} + \frac{Y^2}{\lambda_2}\right) = 0,$$

t. j. po zkrácení X^2Y^2 v

$$\frac{X^2}{\lambda_1} + \frac{Y^2}{\lambda_2} = \frac{\mu}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2,$$

což je rovnice souosé kuželosečky k_2, jak bylo dokázati.

Korelací (10) přímka neprocházející počátkem se transformuje v parabolu, dotýkající se os soustavy. Pro 6 bodů kuželosečky k_2 platí věta Pascalova, proto pro 6 normál (z nichž žádná není osou) středové kuželosečky platí věta:

Označíme-li v jakémkoli pořádku 6 normál středové kuželosečky 1, 2, 3, 4, 5, 6, pak normálami i, k a osami kuželosečky je určena parabola p_{ik}; *paraboly* p_{12} *a* p_{45}, *resp.* p_{23} *a* p_{56} *resp.* p_{43} *a* p_{61} *mají kromě os kuželosečky v konečnu společnou tečnu* t_1, *resp.* t_2, *resp.* t_3. *Tyto tři přímky jsou opět tečny jediné paraboly dotýkající se též os kuželosečky.*

Obecné tečně kuželosečky k_2 (jejíž bod dotyku není na k_2 vrcholem) korelací (10) jest přiřazena Steinerova parabola kuželosečky k_1. Pro 6 tečen k_2 platící věta Brianchonova se tudíž transformuje v tuto větu v St. parabolách středové kuželosečky:

Označíme-li v jakémkoli pořádku 6 Steinerových parabol středové kuželosečky 1, 2, 3, 4, 5, 6, pak paraboly i, k mají kromě os kuželosečky v konečnu společnou tečnu t_{ik}; *osami kuželosečky a dvojicí přímek* t_{12} *a* t_{45}, *resp.* t_{23} *a* t_{56}, *resp.* t_{23} *a* t_{61} *je určena jediná parabola* p_1, *resp.* p_2, *resp.* p_3. *Tyto tři paraboly náleží téže řadě (duál. svazku) kuželoseček.*

Konče pokládám za milou povinnost poděkovati panu Ing. C. J. Hložánkovi, asistentu ústavu deskr. geometrie čs. techniky v Brně, za ochotné a zdařilé provedení obou náčrtků.

*

Sur les systèmes cubiques de coniques ayant une normale commune.

(Extrait de l'article précédent.)

Il existe, en général, dans un faisceau de courbes du r-ième ordre, $2r-1$ courbes pour lesquelles une droite donnée n est normale. Si

$$f^{(i)} = 0 \qquad (i = l, \ldots, k)$$

sont les équations de courbes du r-ième ordre linéairement indépendantes, il existe, dans le système linéaire

$$\sum \lambda_i f^{(i)} = 0$$

pour $k > 2$, en général, tout un système S_{k-2} à $(k-2)$ paramètres de courbes ayant pour normale la droite n. Si le point $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ d'un espace projectif R_{k-1} est pris pour image de la courbe respective du système linéaire, l'image du système S_{k-2} est une variété algébrique g_{k-2} de cet espace de l'ordre $2r-1$. Cette variété est rationnelle et même, pour $k=3$, réglée.

Dans le présent travail sont étudiés avec plus de détails les cas $n=2$, $k=2, 3, 4$. L'auteur a payé une attention particulière aux éléments d'inflexion et à la question de réductibilité de la variété g_{k-2}.

g_1 est une cubique rationnelle, douée, dans de certaines conditions, d'un point cuspidal. g_2 est une surface cubique réglée, laquelle peut se réduire, dans des cas particuliers, à une surface de Cayley. Aux asymptotiques de g_2 correspondent des systèmes L de coniques ayant la propriété suivante: si k est une conique quelconque du système et k' la conique consécutive dans le système, les trois coniques du faisceau (k, k') ayant la normale n coïncident avec k. Les équations paramétriques (8), (9) de ces systèmes ont été établies par intégration.

À la fin, deux théorèmes sont énoncés sur six normales, c. à d., sur six paraboles de Steiner d'une conique centrale. Ce sont des théorèmes analogues aux théorèmes de Pascal et de Brianchon.