Matyáš Lerch
Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 4, 178–182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109032

aneb užijeme-li vzorce (18),

$$2a_2^{\frac{n}{2}} \cos n\varrho = (-1)^n \left[a_1^n - \frac{n}{1} a_2 a_1^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)_1 a_2^2 a_1^{n-4} - \ldots\right];$$

dosadíme-li sem za a_1 hodnotu ze vzorce (24) a zkrátíme-li co možná, zjednáme si konečně nový, velezajímavý vzorec *)

$$\cos n\varrho = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{n}{k} (n-k-1)_{k-1} 2^{n-k-1} \cos^{n-2k}\varrho, \qquad (26)$$

kterýž vyjadřuje cos multipla ϱ pomocí mocnin cos ϱ.

Že v něm obsaženy jsou pro

$$\varrho = 0$$

vzorce předcházející, jde z původu jeho přímo na jevo. A že naopak vzorec (26) vyjádřiti možná determinantem, též snadno se tu poznává; jestiť

$$\cos n\varrho = \begin{vmatrix} \cos\varrho & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\cos\varrho & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varrho & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\varrho & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\cos\varrho \end{vmatrix}. \qquad (27)$$

Drobné zprávy.

Napsal

M. Lerch, v Praze.**)

I. Pojem čísla irracionalního.

Mathematikové před *Bolzanem* nezabývali se přesnými důkazy základních vět arithmetiky. Základní kámen přesné definice čísla irracionalního položil hluboký ten myslitel v pojednání vydaném v Praze r. 1817. pod titulem „Ryze analytický důkaz poučky atd.“, jehož se dostalo čtenářstvu tohoto časopisu výtečným překladem p. prof. *Studničky* v ročníku XI. Bolzano

---

*) Srovnej *Studnička* „O počtu differencialním“, II. vyd. pag. 125.

**) Tyto drobné zprávy mající za účel seznámiti čtenáře s t. zv. náukou o soustavách bodů, odevzdal nám auktor v květnu 1884. R.

považuje za veličinu vše, co lze číselně s předepsanou chybou vystihnouti, jak z §. 7. řečeného pojednání vyplývá (na str. 24. překl. „Předpokládáme-li však neproměnnou veličinu, kteráž má tuto vlastnost přibližovati se členům řady, nežádáme nic nemožného, *což plyne z toho, že v případě tomto jest možná tuto veličinu určiti tak přesně, jak jen libo".).*

Dalšího rozvoje dostalo se tomuto pojmu pracemi *Weierstrassovými*; čtenář nalezne náčrtek jeho nauky z péra p. dra. *Krause* v XII. ročníku tohoto časopisu.

Poněvadž theorie Weierstrassova je velmi pracna a těžko přístupna, podal *G. Cantor* v Lipských Annalech r. 1871 (sv. V.) ve svém pojednání o řadách trigonometrických přeloženém do frančiny v časopisu „Acta Mathematica" (II. sv., p. 336) definici čísla irracionalního, která se s §. 7. řečeného pojednání *Bolzanova* nalezá v souvislosti velmi těsné. Můžeme-li podlé určitého zákona utvořiti neomezený počet *) racionalních čísel a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, která mají tu vlastnost, že pro každé dané sebe menší kladné racionalní číslo ε existuje číslo ν takové, aby pro všecka kladná μ bylo $|a_{\nu+\mu} - a_\nu| < \varepsilon$, vyjádříme tuto vlastnost *řady***) (či posloupnosti) čísel a_ν následovním výrokem: „Posloupnost a_ν má určitou mez či limitu". Pak zavedeme pojem rovnosti a chceme-li též, nazveme dle určitých známek tuto limitu větší neb menší, a označíme ji písmenem na př. b. Tyto limity nejsou tedy čísla v původním slova smyslu; my ale význam slova číslo rozšíříme a budeme také limity nazývati čísly. Tento pojem není nikterak ještě zúplna stanoven, nýbrž význam jeho vyplyne teprve definicí všech elementarných operac, čímž se zabývati nebudeme.

Jinak vyjadřuje to *Heine****) v 74. sv. Crelle-Borchardtova žurnálu, zvoliv pro každou řadu určité znamení (Zahlzeichen), a tato znamení považoval za předmět operac.

Předpokládáme-li, že lze každou délku i sebe menší tak znmohonásobiti, že převyší každou délku danou i sebe větší,

---

*) T. j. tolik, kolik si kdo přeje.

**) Cantor ji nazývá později „Fundamentalreihe".

***) *Heine* uveřejnil své pojednání před *Cantorem,* ale sám praví, že se dověděl základní pravdy ústním sdělením od tohoto.

a že lze každou délku rozděliti v libovolný počet rovných dílů (viz o tom násl. zprávu), můžeme každé racionalní číslo znázorniti, tj. vyjádřiti poměrem jisté délky k jiné délce dané, kterou volíme za jednotku. Naopak lze každému bodu na přímce přiřaditi buď číslo racionalní, neb neomezenou posloupnost (a_ν), jejíž čísla mají určitou limitu.

Nedá se však nikterak dokázati, že každé limitě náleží určitý bod (tj. určitá délka od pevného počátku). Každá limita dá se uvésti na t. zv. nekonečný zlomek desetinný, tedy nekonečnou řadu *) tvaru $0 \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots$. Důkaz, kdyby byl možným, záležel by v stanovení bodu, který má tu vlastnost, že jeho vzdálenost od racionalního bodu $0 \cdot \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$ klesá s rostoucím p pod každou mez. P. *Du Bois-Reymond* praví o tom: „... ich behaupte, keine Denkarbeit werde einen solchen Beweis für das Dasein des Grenzpunctes je einem Gehirn abfoltern, und vereinigte es Newtons Divinationsgabe, Eulers Klarheit und die zermalmende Gewalt Gaussischen Geistes“ (d. allgem. Functionenth. p. 66).

Nic nám však nemůže zabrániti, abychom *definovali* bod přímky daným zlomkem desetinným, bod to, jenž s přirozeným t. j. geometrickým bodem nemusí míti nic společného, než název, pojem vzdálenosti, rovnosti a t. d., které se dají ryze formalně vymeziti. P. Cantor zavádí jakožto axiom **), že takový bod existuje vždy skutečně.

Co týče se poměru definice Weierstrassovy a Cantorovy, uvádí poslední v XXI. sv. Lipských Annalů na str. 71. toto:

„Prvý způsob (t. j. Weierstrassův) nezdá se mi býti tak snadno schopným užívání, jedná-li se o přesnou definici součtů řad, které nekonvergují bezpodmínečně... Ano u samých řad konvergence bezpodmínečné je stanovení součtu, jakkoli neodvislého od pořádku členů, pouze při určitém seřadění skutečného provedení schopno...“

---

*) Ve smyslu Weierstrasse, jejíž pojem možno na základě neomezené posloupnosti stanoviti.

**) Viz o tom násl. zprávu.

Třetí definice pochází od *Dedekinda**), jenž, jak sám praví, dlouho marně hledal, nač posléz šťastně dopadl. Neexistuje žádné číslo racionalné, jehož dvojmoc by se rovnala 3; můžeme však veškera čísla racionalná rozděliti ve dvé skupin; čísla skupiny prvé mají čtverce menší a druhá větší než 3; každé racionalné číslo náleží jedné z těchto skupin; toto rozdělení racionalných čísel nazveme *řezem* (Schnitt) a označíme je $\sqrt{3}$.

Patrně existují racionalná čísla různých soustav, která jsou si blíže, než obnáší kterákoli daná veličina.

Takto si můžeme počínati obecně: Máme-li čísla racionalná rozdělena ve dvě skupiny, znamenajíce čísla skupiny prvé $\mathfrak{A}_\nu$, druhé $\mathfrak{B}_\mu$, a je-li každé číslo $\mathfrak{A}_\nu$ menší než každé číslo $\mathfrak{B}_\mu$ a je-li možno pro každé kladné sebe menší δ určiti $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\mu$ tak, aby $\mathfrak{B}_\mu - \mathfrak{A}_\nu < \delta$, nazveme toto rozdělení *řezem* čísel racionalných $(\mathfrak{A}_\nu | \mathfrak{B}_\mu)$, jemuž přiřaďujeme *„číslo"* b (t. j. znamení) atd.

Celkem shledáváme, že definice Weierstrassova vychází od nekonečné řady, Bolzano-Cantorova od obecnějšího pojmu meze či limity, a Dedekindova od sevření v libovolně úzké meze. Prvá nalezla málo stoupenců pro methodické obtíže, druhá nalezla v Německu téměř všeobecného rozšíření, třetí pak hlavně v Italii nalezla horlivé stoupence, jak o tom svědčí znamenitý spis, který napsal p. *Ullise Dini* (Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa, 1878).

Konečně podotýkám, že pojem meze v geometrickém představení vzat opětně na přetřes p. *Du Bois-Reymondem* (Die allgemeine Functionentheorie), jenž předvádí representanty dvou protivných systémů, idealistu a empiristu, kteří o základních pojmech polemisují. Co se mne týče, nepodepsal bych se pod žádný z těchto dvou praporů, uznávaje mnohé principy oběma protivníky pronešené za pravé, a nikterak bych nepřipustil leckterý vývod idealistův a empiristův, ačkoli oběma za důsledný uznaný.

II. Axiom Archimedův.

Základní věty geometrie byly ode dávna předmětem úvah filosofických. Jsou-li buď elementy nějaké vědy přírodní povahy

*) Vyložena v samostatném spisku: Stetigkeit und irrationale Zahlen Braunschweig, 1872.

jednoduché, aneb dosáhla-li zkušenost v oboru tom dostatečné výše, aby byla schopna formalního zpracování, jedná se především o principy či axiomy základní, z nichž možno užitím pouhé logiky, tedy způsobem čistě dialektickým ostatní zákony vyvoditi. Geometrie elementarná ještě nedospěla tak daleko, aby veškery její zákony známy byly v redukované, nejjednodušší formě, jak toho je *princip rovnoběžek* (nejvíce diskutovaný, ačkoli se takových nalezá v geometrii hojnost — viz na př. definici roviny atd.) dostatečným dokladem.

Než co se *doposud* nepodařilo zúplna, mohlo se podařiti aspoň částečně, a tak se nám dostalo z péra znamenitého badatele p. prof. *Stolze* *) v Insbrucku vysvětlení souvislosti, která vládne mezi základními pojmy *měření*. Největší obtíže jako všude působí pojem spojitosti (t. j. jeho formulování).

(Dokončení.)

Úlohy.

Řešení úlohy 7.

(Podal p. *Bohuslav Mašek,* stud. VII. tř. g. v Jindřišské ulici v Praze.)

Rovnice dané kružnice budiž

$$R \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

bod p měj souřadnice $x = b$, $y = 0$. Rovnice tečny v bodě m (x, y) jest $x\xi + y\eta - a^2 = 0$ a vzdálenost od bodu p jest

$$\overline{pq} = \frac{bx - a^2}{a}.$$

Souřadnice bodu $n(\xi, \eta)$ vyhovují podmínkám

$$\xi = x, \quad \frac{bx - a^2}{a} = \sqrt{(\xi - b)^2 + \eta^2},$$

z nichž vyloučením x plyne rovnice hledaného místa geometrického:

*) Lipské Annaly, sv. XXII. str. 504.