František Josef Studnička

O nejjednodušším odvození součinitelů řady, převratnou hodnotu polynomu stupně n-tého o jedné proměnné představující

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 4, 170--178

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109031

ktrickou poměrně s malým rozdílem potentialu a za to velkým množstvím elektrickým.

O nejjednodušším odvození součinitelů řady, převratnou hodnotu polynomu stupně n-tého o jedné proměnné představující.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

V právě vydaném 1. sešitu XV. roč. „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" uvádí se na str. 326:

Faà de Bruno, *„Sur le développement des fonctions rationelles"*. Sylv. Am. J. V. 238—240.

Der Coefficient von x^p in der Entwickelung der Function

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}$$

nach steigenden Potenzen von x lässt sich darstellen als Determinante

$$= \frac{1}{a_0^{p+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{p-1} & a_{p-2} & a_{p-3} & \ldots & a_0 \\ a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Dieses wird bewiesen mit Hülfe eines Satzes, den der Herr Verfasser schon 1855 in Tortolini Ann. gegeben hat, nämlich: Hat man eine Function $\Theta(y)$, wo $y = \omega(z)$, so ist

$$D_z^p \Theta = \Sigma \frac{(p)}{(k_1)(k_2)\ldots(k_p)} D_z^y \Theta \left(\frac{\omega'}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{\omega''}{1.2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{\omega^{(p)}}{1.2\ldots p}\right)^{k_p}$$

unter der Bedingung, dass ..." *)

---

*) Srovnej s tím *Ježek* „Uiber das formale Bildungsgesetz der Coefficienten des Quotienten zweier Potenzreihen" Sitzungsber. d. kön. b. Ges. d. Wiss. 1884, pag. 127.

Na první pohled viděti, že tu k důkazu tak jednoduchého vzorce, jakým se jeví býti (1), užito prostředků zbytečně rozsáhlých, jelikož se zcela jednoduchou a přímou cestou přijde co nejrychleji k témuž výsledku, jakož chceme tuto ukázati.

Užijeme-li methody neurčitých součinitelů, což tuto jest dovoleno, obdržíme patrně

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

takže bude, převede-li se jmenovatel se strany levé na pravou,

$$1 = a_0 A_0 + \left.\begin{matrix} a_0 A_1 \\ a_1 A_0 \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} a_0 A_2 \\ a_1 A_1 \\ a_2 A_0 \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} a_0 A_3 \\ a_1 A_2 \\ a_2 A_1 \\ a_3 A_0 \end{matrix}\right| x^3 + \ldots$$

Z čehož jde, porovnáme-li součinitele stejně vysokých mocnin na obou stranách,

$$(2) \qquad a_0 A_0 = 1,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} a_1 A_0 + a_0 A_1 = 0, \\ a_2 A_0 + a_1 A_1 + a_0 A_2 = 0, \\ a_3 A_0 + a_2 A_1 + a_1 A_2 + a_0 A_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p-1} A_0 + a_{p-2} A_1 + \ldots + a_0 A_{p-1} = 0, \\ a_p A_0 + a_{p-1} A_1 + \ldots + a_1 A_{p-1} = -a_0 A_p. \end{cases}$$

Soustava linearních p rovnic (3) obsahuje p neznámých a sice, vyjme-li se A_p, veličiny

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{p-1};$$

možná tedy kterou koli z nich určiti známým spůsobem. Užijeme-li determinantů k určení neznámé prvé, obdržíme

$$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & a_{p-2} & a_{p-3} & \ldots & a_0 \\ -a_0 A_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix} : \Delta_p,$$

kdež Δ_p značí determinant ve vzorci (1) obsažený. Čitatel tuto uvedený jest však determinant, mající v prvním sloupci za prvky samé nully, vyjmouc prvek poslední; hodnota jeho jest tedy*)

*) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 16. a 21.

$$-(-1)^{p-1}a_0 A_p \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{p-2} & a_{p-3} & & \dots & a_0 \end{vmatrix} = (-1)^p a_0^p A_p .$$

I bude tedy podlé toho, užijemeli vzorce (2),

$$A_0 = \frac{(-1)^p a_0^p A_p}{\varDelta_p} = \frac{1}{a_0},$$

takže řešením podlé A_p se ihned obdrží

$$A_p = (-1)^p \frac{\varDelta_p}{a_0^{p+1}}, \qquad (4)$$

což se až na znaménko shoduje se vzorcem (1); rozdíl pak stran znamének se vysvětluje tím, že naši součinitelové A_k nejsou identičtí s Brunovými, což by se stalo, kdybychom byli naší řadě dali tvar

$$A_0 - A_1 x + A_2 x^2 - \dots$$

Jak patrno, vystačí se tu prostředky zcela elementarními.

Poznámka 1.

Že náš determinant $\varDelta_p$ poskytne 2^{p-1} členů, rozvine-li se v součet,*) pozná se též snadno jednoduchou cestou následující:

Rozložíme-li jej podlé známého vzorce *Laplace-ova*

$$\varDelta_p = \Sigma \pm \varDelta_2 \, . \, \varDelta_{p-2}$$

v algebraický součet součinů, z nichž první činitel jest determinantem stupně druhého z prvků prvních dvou řádek složeným a druhým činitelem jest determinant doplňkový,**) obdržíme tu patrně

$$\varDelta_p = (a_1^2 - a_0 a_2)\varDelta_{p-2} - a_0 a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_1 & a_0 & \dots \\ a_4 & a_2 & a_1 & \dots \\ \vdots & & & \\ a_{p-1} & a_{p-3} & a_{p-4} & \dots \end{vmatrix} + a_0^2 \begin{vmatrix} a_3 & a_0 & 0 & \dots \\ a_4 & a_1 & a_0 & \dots \\ a_5 & a_2 & a_1 & \dots \\ \vdots & & & \\ a_p & a_{p-3} & a_{p-4} & \dots \end{vmatrix};$$

---

*) Viz *Ježek*, ibid. pag. 129.
**) Viz *Studnička*, ibid. pag. 18.

nazveme-li tedy počet členů determinantu Δ_p krátce δ_p, bude podlé posledního vzorce, kdež subdeterminanty mají stejné složení, jako determinant hlavní,

$$\delta_p = 4\delta_{p-2} = 2^2\delta_{p-2}. \tag{5}$$

Rozeznává-li se tu p *sudé* a *liché*, bude tedy, snižuje-li se přípona v případě prvém,

$$\begin{aligned} \delta_{2n} &= 2^2\delta_{2n-2}, \\ \delta_{2n-2} &= 2^2\delta_{2n-4}, \\ &\ldots\ldots \\ \delta_4 &= 2^2\delta_2, \end{aligned}$$

z čehož plyne, znásobíme-li na obou stranách,

$$\delta_{2n} = 2^{2n-2}\delta_2; \tag{6}$$

v případě pak druhém obdržíme podobnou soustavu

$$\begin{aligned} \delta_{2n+1} &= 2^2\delta_{2n-1}, \\ \delta_{2n-1} &= 2^2\delta_{2n-3}, \\ &\ldots\ldots \\ \delta_3 &= 2^2\delta_1, \end{aligned}$$

z níž se obdrží znásobením

$$\delta_{2n+1} = 2^{2n}\delta_1. \tag{7}$$

Poněvadž pak platí, jak z determinantu přímo vysvítá,

$$\delta_2 = 2, \tag{8}$$

$$\delta_1 = 1, \tag{9}$$

zjednáme si spojením vzorce (8) s (6) jakož i spojením vzorce (9) se (7) společný výraz

$$\delta_p = 2^{p-1}, \tag{10}$$

zastupující výrok, že počet členů determinantu stupně p-tého (1) vyjadřuje $(p-1)$ ní mocnina čísla 2.

Poznámka 2.

Vzorec (1) se značně zjednoduší, jest-li

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2};$$

obdržíť determinant, jelikož tu pak všeobecně platí

$$a_k = 0,\ k > 2,$$

význačný tvar

$$\varDelta p = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

jejž nazýváme determinantem *řetězcovým*. A ten možná velmi snadno vyčísliti a vyjádřiti řadou, spořádanou podlé klesajících mocnin příčkového prvku a_1; budeť tu *)

$$\varDelta_p = a_1^p - (n-1)_1\, a_0 a_2 a_1^{p-2} = (n-2)_2\, (a_0 a_2)^2\, a_1^{p-4} - \dots,$$

takže můžeme symbolicky i psáti

$$\varDelta_p = \sum_{k=0} (-1)^k\, (n-k)_k\, (a_0 a_2)^k\, a_1^{p-2k}, \qquad (12)$$

kdež součet končí, jest-li p číslo *sudé*, hodnotou $k = \frac{1}{2}\, n$,
„ p „ *liché*, „ $k = \frac{1}{2}(n-1)$.

Podlé toho jest na př.

$$\varDelta_4 = a_1^4 - 3 a_0 a_2 a_1^2 + (a_0 a_2)^2,$$
$$\varDelta_5 = a_1^5 - 4 a_0 a_2 a_1^3 + 3 (a_0 a_2)^2 a_1,$$

jakož se i přímým vyčíslením snadno obdrží.

Poznámka 3.

Na tvar determinantu (11) možná uvésti determinant příbuzný, vyjadřující součet n-tých mocnin kořenů kvadratické rovnice

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \qquad (13)$$

pomocí koëfficientů a_0, a_1, a_2.

Jakož známo, lze vyjádřiti zvláštními rekurrentními vzorci, jež se obyčejně *Newtonovi* připisují, ač již *Girard* (1629) některé z nich uvádí, součty n-tých mocnin kořenů rovnice kterého koli stupně; z těchto vzorců se pak jednoduchým obratem obdrží vzorec independentní **)

---

*) Odůvodnění lze snadno si sestaviti pomocí vzorců, obsažených ve spise: *Studnička* „Algebraické tvarosloví“, pag. 73.

**) Viz *Řehořovský* „Základové vyšší algebry“, pag. 10.

$$S_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ na_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 \end{vmatrix}, \qquad (14)$$

při čemž základem jest rovnice m-tého stupně

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0.$$

Stane-li se tu ve zvláštním, vzorcem (13) vytknutém případě

$$m = 2,$$

promění se determinant vzorce (14) v jednodušší

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

kterýž se co do tvaru shoduje s determinantem (11) až na druhý prvek sloupce prvního úplně, takže možná tvar D uvésti na tvar $\varDelta$, uvážíme-li, že psáti možná tu

$$2a_2 = a_2 + a_2$$

a podlé toho rozložiti determinant D_n v součet determinantů dvou *)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

takže se pak obdrží

$$D_n = \varDelta_n - a_2\varDelta_{n-2}. \qquad (16)$$

Užijeme-li tedy vzorce (12) a učiníme-li, jakož bývá obyčejem, $a_0 = 1$, obdržíme se zřetelem ku příponám posledního vzorce

$$\varDelta_n = a_1^n - (n-1)_1\, a_2a_1^{n-2} + (n-2)_2\, a_2^2a_1^{n-4} - (n-3)_3\, a_2^3a_1^{n-6} + \dots$$
$$-\, a_2\varDelta_{n-2} = - \qquad a_2a_1^{n-2} + (n-3)_1\, a_2^2a_1^{n-4} - (n-4)_2\, a_2^3a_1^{n-6} + \dots,$$

*) Viz *Studnička*, ibid. pag. 25.

takže spojením obou řad dle vzorce (16) povstane, uvážíme-li, že tu v jednotlivých případech možná koefficienty binomické sloučiti dle vzorce

$$(n-k)_k + (n-k-1)_{k-1} = \frac{n}{k}(n-k-1)_{k-1}, \quad (17)$$

pro druhý determinant výraz

$$D_n = a_1^n - n a_2 a_1^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)_1 a_2^2 a_1^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2 a_2^3 a_1^{n-6} + \ldots$$

anebo symbolicky

$$D_n = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{n}{k}(n-k-1)_{k-1} a_2^k a_1^{n-2k}, \quad (18)$$

při čemž arci výraz součinitele binomického pro $k=0$ nutno bráti za 1.

Podlé tohoto vzorce možná tedy si zjednati součty kterýchkoli mocnin kořenů x_1, x_2 rovnice kvadratické

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$

dle vzorce

$$x_1^n + x_2^n = (-1)^n D_n. \quad (19)$$

Poznámka 4.

Učiníme-li ve zvláštním případě

$$a_1 = -2, \; a_2 = 1,$$

obdržíme tedy všeobecně

$$x_1^n + x_2^n = 2^n - n \,.\, 2^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)_1 2^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2 \,.\, 2^{n-6} + \ldots;$$

a poněvadž tu, jak patrno, platí

$$x_1 = 1, \; x_2 = 1,$$

a tedy pro každou hodnotu mocnitele n se obdrží

$$x_1^n + x_2^n = 2,$$

plyne ze vzorce posledního vzorec zvláštní

$$2 = 2^n - n \,.\, 2^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)_1 2^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2 2^{n-6} + \ldots \quad (20)$$

Rozlišíme-li tu případy, kde n jest *sudé* a *liché*, povstanou z něho vzorce dva, při čemž v případě prvním, kde poslední člen stane se 2, již možná zkrátiti proti 2 na levé straně stojící, jestli n číslo *sudo-sudé*; obdrží se totiž

$$2=2^{2k}-\frac{2k}{1}2^{2k-2}+\frac{2k}{2}(2k-3)_1 2^{2k-4}-\frac{2k}{3}(2k-4)_2 2^{2k-6}+\ldots+(-1)^k 2,$$

a v případě připomenutém ku konci

$$0=2^{4k}-\frac{4k}{1}2^{4k-2}+\frac{4k}{2}(4k-3)_1 2^{4k-4}-\frac{4k}{3}(4k-4)_2 2^{4k-6}+\ldots$$
$$\ldots-(4k)^2, \qquad (21)$$

kdežto pro *lichou* hodnotu mocnitele n se obdrží

$$2=2^{2k+1}-\frac{2k+1}{1}2^{2k-1}+\frac{2k+1}{2}(2k-2)_1 2^{2k-3}$$
$$-\frac{2k+1}{3}(2k-3)_2 2^{2k-5}+\ldots+(-1)^k(2k+1)2,$$

z čehož plyne, zkrátíme-li na obou stranách dvojkou,

$$1=2^{2k}-\frac{2k+1}{1}2^{2k-2}+\frac{2k+1}{2}(2k-2)_1 2^{2k-4}$$
$$-\frac{2k+1}{3}(2k-3)_2 2^{2k-6}+\ldots+(-1)^k(2k+1), \qquad (22)$$

a provedeme-li podobné zkrácení ve vzorci předcházejícím, mezi (20) a (21) uvedeném,

$$1=2^{2k-1}-\frac{2k}{1}2^{2k-3}+\frac{2k}{2}(2k-3)_1 2^{2k-5}-\frac{2k}{3}(2k-4)_2 2^{2k-7}+\ldots$$
$$+(-1)^k. \qquad (23)$$

Jak z posledních těchto dvou vzorců jde na jevo, možná 1 složiti buď ze sudých nebo lichých mocnin čísla 2, vzatých v počtu jakém koli.

Poznámka 5.

Jsou-li kořeny rovnice kvadratické

$$x^2+a_1x+a_2=0$$

soujemné, což nastává, vyhovují-li součinitelové podmínce

$$a_2>\tfrac{1}{2}a_1,$$

obdrží, jak známo, tvar kanonický

$$x_1=a_2^{\frac{1}{2}}(\cos\varrho-i\sin\varrho),$$
$$x_2=a_2^{\frac{1}{2}}(\cos\varrho+i\sin\varrho),$$

takže tu pak platí

$$-(x_1+x_2)=a_1=-2a_2^{\frac{1}{2}}\cos\varrho, \qquad (24)$$
$$x_1^n+x_2^n=2a_2^{\frac{n}{2}}\cos n\varrho, \qquad (25)$$

aneb užijeme-li vzorce (18),

$$2a_2^{\frac{n}{2}} \cos n\varrho = (-1)^n \left[a_1^n - \frac{n}{1} a_2 a_1^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)_1 a_2^2 a_1^{n-4} - \ldots\right];$$

dosadíme-li sem za a_1 hodnotu ze vzorce (24) a zkrátíme-li co možná, zjednáme si konečně nový, velezajímavý vzorec *)

$$\cos n\varrho = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{n}{k} (n-k-1)_{k-1} 2^{n-k-1} \cos^{n-2k} \varrho, \qquad (26)$$

kterýž vyjadřuje cos multipla ϱ pomocí mocnin cos ϱ.

Že v něm obsaženy jsou pro

$$\varrho = 0$$

vzorce předcházející, jde z původu jeho přímo na jevo. A že naopak vzorec (26) vyjádřiti možná determinantem, též snadno se tu poznává; jestiť

$$\cos n\varrho = \begin{vmatrix} \cos\varrho & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\cos\varrho & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varrho & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\varrho & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\cos\varrho \end{vmatrix}. \qquad (27)$$

Drobné zprávy.

Napsal

M. Lerch, v Praze.**)

I. Pojem čísla irracionalního.

Mathematikové před *Bolzanem* nezabývali se přesnými důkazy základních vět arithmetiky. Základní kámen přesné definice čísla irracionalního položil hluboký ten myslitel v pojednání vydaném v Praze r. 1817. pod titulem „Ryze analytický důkaz poučky atd.“, jehož se dostalo čtenářstvu tohoto časopisu výtečným překladem p. prof. *Studničky* v ročníku XI. Bolzano

---

*) Srovnej *Studnička* „O počtu differencialním“, II. vyd. pag. 125.

**) Tyto drobné zprávy mající za účel seznámiti čtenáře s t. zv. náukou o soustavách bodů, odevzdal nám auktor v květnu 1884. R.